УДК 517.982

©2017 р. Г. І. Гуменчук, М. М. Попов

Чернівецький медичний коледж
Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ

ПРО СУМУ ВУЗЬКОГО ТА СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ОПЕРАТОРІВ НА ВЕКТОРНИХ ҐРАТКАХ

Дана робота доповнює дослідження першого автора [2]. Теорема 3.1 з указаної статті, яка стверджує, що сума вузького та скінченновимірного ортогонально адитивних операторів, визначених на векторній ґратці E, є вузьким оператором, була доведена за такими припущеннями на E, які не мають місця для такого широкого класу векторних ґраток, як простори Кете на безатомному вимірному просторі. Використовуючи техніку та ідею доведення цієї теореми в [2], ми встановлюємо нові умови на векторну ґратку, за яких теорема має місце, а також доводимо, що багато природних векторних ґраток задовольняють такі умови, зокрема, простори Кете на безатомному просторі з мірою.

The present paper completes investigation [2] of the first named author. Theorem 3.1 of the cited paper asserting that the sum of a narrow and a finite rank orthogonally additive operator is narrow, is proved under assumptions on the domain vector lattice that fail for the wide class of Köthe spaces on an atomless measure space. Using the technique and the idea of proof of the theorem from [2] we establish new assumptions on the domain vector lattice under which the theorem holds true, and prove that lots of vector lattices satisfy these assumptions, in particular, Köthe spaces on an atomless measure space.

1. Вступ

1.1. Термінологія та позначення

Стандартні відомості про векторні ґратки читач може знайти у підручнику [1]. Нехай E – векторна ґратка та $x, y \in E$. Елемент x називається *фрагментом* елемента y (записується $x \sqsubseteq y$), якщо $x \perp (y - x)$. Множина всіх фрагментів елемента $e \in E$ позначається через $\mathfrak{F}_e$. Якщо E – векторна ґратка функцій, то $x \sqsubseteq y$ означає, що графік функції x є підмножиною графіку функції y, якщо відкинути ту частину графіку, в якій функція x обертається в нуль. Неважко переконатися в тому, що $\sqsubseteq$ – частковий порядок на E, який у роботі [7] названо латеральним порядком.

Елемент $u > 0$ векторної ґратки E називається *атомом*, якщо фрагментами u є лише 0 та самий u. Векторна ґратка називається *безатомною*, якщо вона не містить атомів. Сітка $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ в E називається *порядково збіжною* до елемента $x \in E$ (позначення $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$), якщо існує сітка $(u_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ в E (з тією ж самою множиною індексів) така, що $u_\alpha \downarrow 0$ та $|x_\beta - x| \le u_\beta$ для всіх $\beta \in \Lambda$. Рівність $x = \bigsqcup_{i=1}^n x_i$ означає, що $x = \sum_{i=1}^n x_i$ та $x_i \perp x_j$ при $i \neq j$. Підмножина A векторної ґратки E називається латерально обмеженою, якщо існує $e \in E$ такий, що $x \sqsubseteq e$ для всіх $x \in A$. Згідно з [3], сітка $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ в E називається *латерально збіжною* до елемента $x \in E$ (позначення $x_\alpha \xrightarrow{\text{lat}} x$), якщо $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$ та для деякого індексу α_0 сітка $(x_\alpha)_{\alpha\ge\alpha_0}$ є латерально обмеженою. Відображення $f : E \to X$ з векторної ґратки E у банахів простір X називається:

- *порядково-нормовано неперервним* в точці $x \in E$, якщо для довільної сітки (x_α) в E з умови $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$ випливає $\|x_\alpha - x\| \to 0$;
- *порядково-нормовано неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці $x \in E$;
- *латерально-нормовано неперервним* в точці $x \in E$, якщо для довільної сітки (x_α) в E з умови $x_\alpha \xrightarrow{\text{lat}} x$ випливає $\|x_\alpha - x\| \to 0$;
- *латерально-нормовано неперервним*,

якщо воно є таким в кожній точці $x \in E$.

Оскільки за означенням з латеральної збіжності випливає порядкова збіжність, то кожне порядково-нормовано неперервне відображення є латерально-нормовано неперервним.

1.2. Ортогонально адитивні оператори на векторних ґратках

Ортогонально адитивні оператори, що діють між векторними ґратками, було уведено і досліджено у 1990 р. Х. Мазоном та С. Сегура де Леоном. Питання продовження ортогонально адитивних операторів розглядалися у роботі [4]. В [3] було доведено, що латерально-нормована неперервність ортогонально адитивного оператора рівносильна його латерально-нормованій неперервності в нулі.

Нехай E – векторна ґратка та F – дійсний лінійний простір. Оператор $T : E \to F$ називається *ортогонально адитивним,* якщо $T(x + y) = T(x) + T(y)$ для довільних диз'юнктних елементів $x, y \in E$, тобто, таких елементів, що $|x| \wedge |y| = 0$. З означень безпосередньо випливає, що $T(0) = 0$, а множина всіх ортогонально адитивних операторів утворює лінійний простір відносно природних лінійних операцій. Ось прості природні приклади нелінійних ортогонально адитивних операторів.

1. (Ω, Σ, μ) – простір з мірою, $1 \leq p < \infty$, $T : L_p(\mu) \to \mathbb{R}$, $T(x) = \|x\|^p$, $x \in L_p(\mu)$;

2. E – безатомна векторна ґратка, $T_i : E \to E$, $T_1(x) = x^+$, $T_2(x) = x^-$, $T_3(x) = |x|$, $x \in E$.

1.3. Вузькі оператори

Вузькі оператори, як узагальнення поняття компактного оператора на функціональних просторах, формально було уведено і досліджено в роботі А. М. Плічка та М. М. Попова 1990 р. [8], але фактично ці оператори також були предметом досліджень до появи цієї статті. З сучасним станом теорії вузьких операторів читач зможе ознайомитися у монографії М.М.Попова та Б.Рандріанантоаніни [10].

Якщо простір Кете E на безатомному просторі з мірою (Ω, Σ, μ) має абсолютно неперервну норму, то кожний компактний оператор з E у довільний F-простір вузький. Але на просторі L_∞, норма якого не є абсолютно неперервною, існують лінійні неперервні невузькі функціонали. З іншого боку, навіть на просторі L_p при $1 < p < \infty$ сума двох вузьких операторів не зобов'язана бути вузьким оператором. А отже, природно запитати, чи завжди сума вузького та вузького компактного операторів є вузьким оператором [10, Problem 5.6]. Позитивну відповідь на це питання надав В. В. Михайлюк у роботі [6]. В даній роботі ми доводимо аналогічний результат для поняття вузького ортогонально адитивного оператора, що діє з векторної ґратки у банахів простір, яке було розроблено в роботі [9].

Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною мірою. Банахів простір E класів еквівалентності вимірних функцій $x : \Omega \to \mathbb{K}$ (де $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) називається простором Кете на просторі зі скінченною мірою (Ω, Σ, μ), якщо виконуються такі умови

(i) якщо $y \in E$ та x – такий клас еквівалентності, що $|x(\omega)| \leq |y(\omega)|$ для майже всіх $\omega \in \Omega$, то $x \in E$ і $\|x\| \leq \|y\|$;

(ii) $\mathbf{1}_\Omega \in E$ (тут і надалі через $\mathbf{1}_A$ ми позначаємо характеристичну функцію підмножини $A \subseteq \Omega$).

Кажуть, що банахів простір Кете E на просторі зі скінченною мірою (Ω, Σ, μ) має абсолютно неперервну норму, якщо $\lim_{\mu(A)\to 0} \|\mathbf{1}_A\| = 0$, тобто, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільної множини $A \in \Sigma$ з умови $\mu(A) < \delta$ випливає, що $\|\mathbf{1}_A\| < \varepsilon$. Наприклад, банахів простір Кете $L_p(\mu)$ при $1 \leq p < \infty$ має абсолютно неперервну норму, а норма простору $L_\infty(\mu)$ не є абсолютно неперервною.

Нехай E – безатомна векторна ґратка, X – банахів простір. Зауважимо, що запис $e = e_1 \sqcup e_2$ для елементів E означає, що e подано у вигляді суми своїх диз'юнктних фрагментів e_1 та e_2. Згідно з [9], ортогонально адитивний оператор $T : E \to X$ називається *вузьким*, якщо довільний елемент $e \in E$ для довільного числа $\varepsilon > 0$ допускає розбиття на диз'юнктні фрагменти $e = e_1 \sqcup e_2$, для якого $\|T(e_1) - T(e_2)\| < \varepsilon$. Ортогонально адитивний оператор $T : E \to X$ називається *строго вузьким*, якщо для довільного елементу $e \in E$ існує розбиття на диз'юнктні фрагменти $e = e_1 \sqcup e_2$, для якого $T(e_1) = T(e_2)$.

1.4. Теорема 3.1 з [2]

Згідно з [2] (за аналогією з відомим поняттям порядкової щільності), підмножина D множини $\mathfrak{F}_e$ всіх фрагментів елемента e векторної ґратки E називається *латерально щільною* в $\mathfrak{F}_e$, якщо для довільного $x \in \mathfrak{F}_e \setminus \{0\}$ існує $d \in D$ такий, що $0 \neq d \sqsubseteq x$. Векторну ґратку E в роботі [2] названо *латерально сепарабельною*, якщо для довільного $e \in E$ існує не більш, ніж злічення латерально щільна в $\mathfrak{F}_e$ підмножина $D \subseteq \mathfrak{F}_e$.

Теорема A (теорема 3.1 з [2]). *Нехай E – безатомна порядково повна латерально сепарабельна векторна ґратка, X – нормований простір, $S, T : E \to X$ – ортогонально адитивні оператори. Якщо S – вузький, а T – скінченновимірний латерально-нормовано неперервний оператор, то сума $S + T$ – вузький оператор.*

Зазначимо, що умова латеральної сепарабельності в тексті теореми була пропущена, проте використовувалася при доведенні. Покажемо, що якщо E – простір Кете на безатомному просторі з мірою (Ω, Σ, μ), то E не є латерально сепарабельною векторною ґраткою. Більш того, для довільного $e \in E \setminus \{0\}$ не існує не більш, ніж зліченної латерально щільної в $\mathfrak{F}_e$ підмножини $D \subseteq \mathfrak{F}_e$. Нехай, навпаки, така множина існує $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathfrak{F}_e \setminus \{0\}$. Покладемо $A_n = \operatorname{supp} d_n$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $d_n \neq 0$, то $\mu(A_n) > 0$. Для кожного n, використовуючи безатомність простору з мірою, виберемо множини $B_n \in \Sigma$ такі, що $B_n \subseteq A_n$ та $0 < \mu(B_n) \leq 2^{-n-2}\mu(\Omega)$. Покладемо $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ та $C = \Omega \setminus B$. Тоді $\mu(B) \leq \mu(\Omega)/2$ та $\mu(C) \geq \mu(\Omega)/2$. Зокрема, $e \cdot \mathbf{1}_C \neq 0$. Оскільки $e \cdot \mathbf{1}_C \in \mathfrak{F}_e \setminus \{0\}$, то, згідно з припущенням, існує $m \in \mathbb{N}$ такий, що $d_m \sqsubseteq e \cdot \mathbf{1}_C$. Але тоді $A_m \subseteq C$, що неможливо, адже $B_m \subseteq A_m \subseteq C$, $B_m \subseteq \Omega \setminus C$ та $\mu(B_m) > 0$.

2. Деякі відомості про булеві алгебри та допоміжні леми

Нехай E – векторна ґратка та $e \in E$. Позначимо через $\mathfrak{F}_e$ множину всіх фрагментів елемента e. Згідно з [1, Theorem 3.15], Якщо $e \geq 0$, то $\mathfrak{F}_e$ є булевою алгеброю відносно ґраткових операцій $\vee$ та $\wedge$, нуля 0 та одиниці e, а ґратковий порядок $\leq$ збігається з латеральним порядком $\sqsubseteq$ на $\mathfrak{F}_e$. Більш того, якщо E – порядково повна векторна ґратка, то $\mathfrak{F}_e$ також порядково повна.

Нам будуть потрібні наступні дві елементарні леми.

Лема 1. *Нехай E – векторна ґратка, $0 < e \in E$. Для довільних $x, y \in \mathfrak{F}_e$ маємо:*

1. *$x \sqsubseteq y$ тоді і тільки тоді, коли $x \leq y$;*
2. *$x = x \wedge y \sqcup (x - x \wedge y)$.*

Пункт (1) доведено в [3] та [7], а (2) – в [2]. Наступну лему доведено в [3].

Лема 2. *Нехай E – векторна ґратка та $x, y \in E$ відношення $x \sqsubseteq y$ має місце тоді і лише тоді, коли $x^+ \sqsubseteq y^+$ та $x^- \sqsubseteq y^-$. Крім того, з відношення $x \sqsubseteq y$ випливає відношення $|x| \sqsubseteq |y|$.*

Нагадаємо, що булева σ-алгебра $\mathcal{B}$ називається *вимірною*, якщо існує зліченно-адитивна міра $\mu : \mathcal{B} \to [0, 1]$ така, що $\mu(\mathbf{e}) = 1$, де $\mathbf{e}$ – одиниця $\mathcal{B}$ та $\mu(x) > 0$ для довільного $x \in \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Підмножина $D \subset \mathcal{B}$ булевої алгебри $\mathcal{B}$ називається *диз'юнктною*, якщо $x \cap y = \mathbf{0}$ для довільних різних елементів $x, y \in D$. Кажуть, що булева алгебра має *властивість зліченності ланцюгів*, якщо кожна диз'юнктна множина $D \subset \mathcal{B}$ не більш, ніж злічення. Зазначимо, що кожна вимірна булева алгебра має властивість зліченності ланцюгів. Для прикладу позначимо через Σ – σ-алгебру всіх вимірних за Лебеґом підмножин відрізка $[0, 1]$, яка є булевою алгеброю відносно теоретико-множинних операцій $\cap, \cup, \setminus$. Тоді Σ не є вимірною. Більш того, Σ не має властивості зліченності ланцюгів, оскільки за незліченну диз'юнктну підмножину Σ можна взяти множину всіх одноточкових множин $D = \big\{\{t\} : t \in [0, 1]\big\}$. З іншого боку,

σ-алгебра $\widehat{\Sigma}$ всіх класів еквівалентності вимірних підмножин відрізка $[0,1]$ є вимірною булевою алгеброю, оскільки потрібною мірою є міра Лебеґа.

Послідовність $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів векторної ґратки E називається *диз'юнктним деревом* на елементі $e \in E$, якщо $e_1 = e$ та $e_n = e_{2n} \sqcup e_{2n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що в цьому випадку всі e_n є фрагментами e. Крім того, має місце така лема.

Лема 3. *Нехай $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ – диз'юнктне дерево. Тоді*

1. *для кожного $k = 1, 2, \ldots$ маємо $e = e_{2^k} \sqcup e_{2^k+1} \sqcup \ldots \sqcup e_{2^k+2^k-1}$;*
2. *для для довільних $n, k \in \mathbb{N}$ таких, що $n \geq 2^{k+1}$, існує єдиний номер $\ell \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ такий, що $e_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$.*

Доведення. [Доведення] (1) отримується методом математичної індукції, виходячи з означення. Дійсно, при $k = 1$ маємо $e = e_1 = e_2 \sqcup e_3$. Припустимо, що формула виконується при даному $k = n$ і доведемо її для $k = n + 1$:

$$\begin{aligned} e &= e_{2^n} \sqcup e_{2^n+1} \sqcup \ldots \sqcup e_{2^n+2^n-1} = \\ &= (e_{2\cdot 2^n} \sqcup e_{2\cdot 2^n+1}) \sqcup (e_{2\cdot 2^n+2} \sqcup e_{2\cdot 2^n+3}) \sqcup \\ &\sqcup \ldots \sqcup (e_{2\cdot 2^n+2\cdot 2^n-2} \sqcup e_{2\cdot 2^n+2\cdot 2^n-1}) = \\ &= e_{2^{n+1}} \sqcup e_{2^{n+1}+1} \sqcup \ldots \sqcup e_{2^{n+1}+2^{n+1}+1}, \end{aligned}$$

а отже, доведення індукцією завершено.

(2) Існування номера ℓ також будемо доводити індукцією. Точніше, індукцією відносно i доведемо, що для довільного $i = 1, 2, \ldots$, довільного $k \in \mathbb{N}$ і довільного $j < 2^{k+i}$ таких, що $n := 2^{k+i} + j \geq 2^{k+1}$, існує єдиний номер $\ell \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ такий, що $e_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$.

База індукції. Припустимо, що $n = 2^{k+1} + j$, де $0 \leq j < 2^{k+1}$. Виберемо $\ell < 2^k$ так, щоби $j = 2\ell$ або $j = 2\ell + 1$. Тоді в будь-якому випадку з рівності

$$e_{2^k+\ell} = e_{2^{k+1}+2\ell} \sqcup e_{2^{k+1}+2\ell+1}$$

випливає, що $e_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$.

Крок індукції. Припустимо, що твердження вірне для $i = m$ і доведемо його для $i = m + 1$. Нехай $n = 2^{k+m+1} + j$, де $j < 2^{k+m+1}$. Виберемо $\ell' < 2^{k+m}$ так, щоби $j = 2\ell'$ або $j = 2\ell' + 1$. Тоді в будь-якому випадку з рівності

$$e_{2^{k+m}+\ell'} = e_{2^{k+m+1}+2\ell'} \sqcup e_{2^{k+m+1}+2\ell'+1}$$

випливає, що $e_n \sqsubseteq e_{2^{k+m}+\ell'}$. Тепер для $n' = 2^{k+m} + \ell'$ маємо $n' \geq 2^{k+1}$. Згідно з припущенням індукції, існує $\ell < 2^k$ такий, що $e_{n'} \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$. З останнього відношення та з умови $e_n \sqsubseteq e_{n'}$ отримуємо $e_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$. Твердження індукції доведено. Єдиність номера ℓ випливає з того, що в п. (1) сума диз'юнктна, а один і той самий вектор не може бути фрагментом двох диз'юнктних векторів: $x \sqsubseteq y$, $x \sqsubseteq z$ і $y \perp z$, оскільки з другої частини леми 2 та п. (1) леми 1 випливає $|x| \leq |y|$ та $|x| \leq |z|$, а отже, $0 \leq |x| \leq |y| \wedge |z| = 0$, звідки $x = 0$.

Нагадаємо, що сім'я $(r_i)_{i\in I}$ елементів булевої алгебри $\mathcal{B}$ називається:

- *незалежною*, якщо $\bigcap_{j\in J} \theta_j r_j \neq \mathbf{0}$ для довільної скінченної підмножини $J \subset I$ та довільного набору знаків $\theta_j = \pm 1$, $j \in J$;
- *нескінченно малою на безмежності*, якщо $\bigcap_{j\in J} \theta_j r_j = \mathbf{0}$ для довільної нескінченної підмножини $J \subseteq I$ та довільного набору знаків $\theta_j = \pm 1$, $j \in J$.

Ідеалом в булевій алгебрі $\mathcal{B}$ називається така підмножина $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, що

1. для довільних $x, y \in \mathcal{A}$ маємо $x \cup y \in \mathcal{A}$;
2. якщо $x \in \mathcal{B}$, $y \in \mathcal{A}$ та $x \leq y$, то $x \in \mathcal{A}$.

Згідно з цим означенням, найменшим ідеалом, що містить елемент $0 < b \in \mathcal{B}$ є множина $\mathcal{B}_b = \{x \in \mathcal{B} : x \leq b\}$. Зазначимо, що $\mathcal{B}_b$ є булевою алгеброю з операціями, індукованими з $\mathcal{B}$, та одиницею b.

Булеву алгебру $\mathcal{B}$ називатимемо *зліченно-подільною*, якщо для кожного $0 < b \in \mathcal{B}$ булева алгебра $\mathcal{B}_b$ містить незалежну нескінченно малу на безмежності послідовність.

Твердження 5. *Кожна безатомна вимірна булева алгебра є зліченно-подільною.*

Доведення. [Доведення] Нехай $\mathcal{B}$ – безатомна вимірна булева алгебра та $0 < b \in \mathcal{B}$. Нехай $\mu : \mathcal{B} \to [0,1]$ – додатна ймовірнісна міра. Оскільки булева алгебра $\mathcal{B}$ безатомна, то і додатна міра μ – теж безатомна, тобто, довільний елемент $x \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ можна розбити на два ненульові елементи $x = y \sqcup z$, а отже, елементи додатної міри. Добре відомою властивістю безатомної міри μ є можливість розбиття довільного елементу $x \in \mathcal{B}$ додатної міри на два диз'юнктні елементи однакової міри, яка дорівнює половині $\mu(x)$. Отже, побудуємо рекурсивно незалежну нескінченно малу на безмежності послідовність $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{B}_b$. Розіб'ємо довільно $b = r_1 \sqcup -r_1$ з $\mu(r_1) = \mu(-r_1) = \mu(b)/2$. Припустимо, що вже побудовано $r_1, \ldots, r_n \in \mathcal{B}$ так, що для довільної підмножини $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ і для довільного набору знаків $(\theta_j)_{j \in J}$, $\theta_j = \pm 1$ виконується рівність

$$\mu\Big(\bigcap_{j \in J} \theta_j r_j\Big) = \frac{\mu(b)}{2^{|J|}}. \tag{1}$$

Побудуємо ще один елемент $r_{n+1} \in \mathcal{B}$ зі збереженням властивості (1) для всіх підмножин $J \subseteq \{1, \ldots, n, n+1\}$ і для довільного набору знаків $\theta_j = \pm 1$. Для цього занумеруємо довільним чином множину Θ всіх наборів знаків $\Theta = \big\{(\epsilon_{i,k})_{k=1}^{n},\ i = 1, \ldots, 2^n\big\}$. Для кожного $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ покладемо $s_i = \bigcap_{k=1}^{n} \epsilon_{i,k} r_k$ і розіб'ємо $s_i = s_i' \sqcup s_i''$ на елементи однакової міри $s_i', s_i'' \in \mathcal{B}$. Отже, згідно з (1), $\mu(s') = \mu(s'') = \frac{\mu(b)}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \mu(b) \cdot 2^{-n-1}$. Покладемо $r_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} s_i'$. Зауважимо, що $s_i \cap s_j = 0$ при $i \neq j$, оскільки при $i \neq j$ існує $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, для якого $\epsilon_{i,k_0} \neq \epsilon_{j,k_0}$, а отже,

$$s_i \cap s_j = \bigcap_{k=1}^{n} \epsilon_{i,k} r_k \cap \bigcap_{k=1}^{n} \epsilon_{j,k} r_k \leq$$
$$\leq \epsilon_{i,k_0} r_{k_0} \cap \epsilon_{j,k_0} r_{k_0} = \mathbf{0}.$$

Тому елементи $(s_i')_{i=1}^{2^n}$ теж диз'юнктні, адже $s_i' \cap s_j' \leq s_i \cap s_j = \mathbf{0}$. Таким чином,

$$r_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} s_i'. \tag{2}$$

Доведемо, що система $(r_k)_{k=1}^{n+1}$ має властивість (1). Нехай $J \subseteq \{1, \ldots, n+1\}$ та $(\theta_j)_{j \in J}$ – довільний набір знаків. Якщо $n+1 \notin J$, то рівність (1) випливає з припущення. Нехай $n+1 \in J$ та, скажімо, $\theta_{n+1} = 1$. Тоді для $J' = J \setminus \{n+1\}$ з урахуванням (2) будемо мати

$$\bigcap_{j \in J} \theta_j r_j = r_{n+1} \cap \bigcap_{j \in J'} \theta_j r_j =$$
$$= \Big(\bigsqcup_{i=1}^{2^n} s_i'\Big) \cap \bigcap_{j \in J'} \theta_j r_j =$$
$$= \bigsqcup_{i=1}^{2^n} \Big(s_i' \cap \bigcap_{j \in J'} \theta_j r_j\Big) = \bigsqcup_{i \in I_{J'}} s_i',$$

де $I_{J'} = \{i \leq 2^n : \ (\forall j \in J')(\epsilon_{i,j} = \theta_j)\}$.

Оскільки множина $I_{J'}$ складається з усіх можливих наборів ± 1 довжини $n - |J'|$, то кількість її елементів дорівнює: $|I_{J'}| = 2^{n-|J'|}$. Тому

$$\mu\Big(\bigcap_{j \in J} \theta_j r_j\Big) = 2^{n-|J'|} \mu(s_i') = 2^{n-|J'|} \cdot \frac{\mu(b)}{2^{n+1}} =$$
$$= \frac{\mu(b)}{2^{|J'|+1}} = \frac{\mu(b)}{2^{|J|}}.$$

Аналогічно міркуємо у випадку $\theta_{n+1} = -1$, замінивши s_i' на s_i'', адже $-s_i' = s_i''$ і, разом з тим, $-r_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} s_i''$. Таким чином, побудовано $r_1, \ldots, r_{n+1} \in \mathcal{B}$ з властивістю (1). Оскільки $n \in \mathbb{N}$ – довільне, то процес побудови послідовності $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів $\mathcal{B}$ з властивістю (1) завершено. З (1) випливає як незалежність побудованої послідовності, так і її нескінченну малість на безмежності, оскільки якщо множина $J \subseteq \mathbb{N}$ нескінченна та $(\theta_j)_{j \in J}$ – набір знаків, то зі зліченної адитивності міри μ та з (1) отримуємо

$$\mu\Big(\bigcap_{j \in J} \theta_j r_j\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu\Big(\bigcap_{j \in J \cap \{1, \ldots, n\}} \theta_j r_j\Big) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\mu(b)}{2^{|J \cap \{1, \ldots, n\}|}} = 0.$$

Векторну ґратку E називатимемо *зліченно-подільною*, якщо для довільного $e \in E^+$ булева алгебра $\mathfrak{F}_e$ всіх фрагментів елементу e є зліченно-подільною.

Наслідок 1. *Кожний банахів простір Кете E з абсолютно неперервною нормою на просторі зі скінченною безатомною мірою є зліченно-подільною векторною ґраткою відносно природного порядку $x \leq y$ тоді і лише тоді, коли $x(\omega) \leq y(\omega)$ для майже всіх $\omega \in \Omega$.*

Доведення. [Доведення] Нехай $0 < e \in E^+$. Згідно з [1, Theorem 3.15], $\mathfrak{F}_e$ є булевою алгеброю відносно ґраткових операцій $\vee$ та $\wedge$, нуля 0 та одиниці e. Доведемо, що $\mathfrak{F}_e$ – σ-алгебра та міра $\mu_e : \mathfrak{F}_e \to [0, +\infty)$, що задана формулою $\mu_e(x) = \mu(\operatorname{supp} x)$, зліченно-адитивна. Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна диз'юнктна послідовність фрагментів e. Покладемо $A_n = \operatorname{supp} x_n$ (зазначимо, що ці множини визначені з точністю до множин міри нуль). З диз'юнктності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ випливає диз'юнктність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$. Покладемо $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Доведемо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в E. З абсолютної неперервності норми на E отримуємо

$$\Big\| \sum_{k=n+1}^{n+\ell} x_k \Big\| = \Big\| e \cdot \mathbf{1}_{\bigcup_{k=n+1}^{n+\ell} A_k} \Big\| \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$, оскільки

$$\mu\Big(\bigcup_{k=n+1}^{n+\ell} A_k \Big) = \sum_{k=n+1}^{n+\ell} \mu(A_k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k)$$

– залишок збіжного ряду мір диз'юнктної послідовності множин у просторі зі скінченною мірою. Отже, ряд $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збіжний в E. Тому $\mathfrak{F}_e$ – σ-алгебра. Крім того,

$$\mu_e(x) = \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(x_n).$$

Залишається застосувати твердження 5.

Лема 4. *Нехай E – безатомна порядково повна зліченно-подільна векторна ґратка. Тоді для довільного $e \in E$ існує диз'юнктне дерево $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ на e таке, що для довільної послідовності номерів $m_1 < m_2 < \ldots$ та довільної послідовності $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$ існує підпослідовність $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, яка латерально прямує до нуля.*

Доведення. [Доведення] Достатньо довести лему для довільного $e \geq 0$. Дійсно, в загальному випадку подамо $e = e^+ - e^-$ і скористаємося доведеним випадком, окремо побудувавши диз'юнктні дерева $(e'_n)_{n=1}^{\infty}$ на e^+ та $(e''_n)_{n=1}^{\infty}$ на e^- з потрібними властивостями. Покладемо $e_n = e'_n - e''_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для довільної послідовності номерів $m_1 < m_2 < \ldots$ та довільної послідовності $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$ матимемо $f_n^+ \sqsubseteq e'_{m_n}$ та $f_n^- \sqsubseteq e''_{m_n}$, згідно з лемою 2. Виберемо спочатку порядково збіжну до нуля підпослідовність $(f_{n_k}^+)_{k=1}^{\infty}$, а потім для послідовності номерів $m_{n_1} < m_{n_2} < \ldots$ та послідовності $f_{n_k}^- \sqsubseteq e''_{m_{n_k}}$ виберемо порядково збіжну до нуля підпослідовність $(f_{n_{k_j}}^-)_{j=1}^{\infty}$. Нарешті, $f_{n_{k_j}} = f_{n_{k_j}}^+ - f_{n_{k_j}}^- \xrightarrow{\mathrm{o}} 0$, а отже, $f_{n_{k_j}} = f_{n_{k_j}}^+ - f_{n_{k_j}}^- \xrightarrow{\mathrm{lat}} 0$, оскільки $f_{n_{k_j}} \in \mathfrak{F}_e$, згідно з лемою 2.

Отже, нехай $e \in E^+$ та $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ – незалежна нескінченно мала на безмежності послідовність в $\mathfrak{F}_e$. Шукане дерево задамо рекурсивно: $e_1 = e$. Нехай задано $e_1, \ldots, e_{2^k-1}$, де $k \in \mathbb{N}$. Наступну партію елементів $e_{2^{k+1}}, e_{2^{k+1}+1}, \ldots, e_{2^{k+2}-1}$ задамо так:

$$\begin{aligned} &e_{2^{k+1}+2j} = e_{2^k+j} \wedge r_k, \\ &e_{2^{k+1}+2j+1} = e_{2^k+j} \wedge (-r_k), j = 0, \ldots, 2^k. \end{aligned} \tag{3}$$

Доведемо, що $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ – диз'юнктне дерево на e. Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$ і подамо n у вигляді $n = 2^k + j$, де $j < 2^k$. Тоді $2n = 2^{k+1} + 2j$ та $2n + 1 = 2^{k+1} + 2j + 1$, а отже, з (3) отримуємо

$$\begin{aligned} e_{2n} + e_{2n+1} = e_{2^{k+1}+2j} + e_{2^{k+1}+2j+1} &= \\ = e_{2^k+j} \wedge r_k + e_{2^k+j} \wedge (-r_k) &= \\ = e_{2^k+j} \wedge \big(r_k + (-r_k) \big) &= e_{2^k+j} = e_n. \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} e_{2n} \wedge e_{2n+1} = e_{2^{k+1}+2j} \wedge e_{2^{k+1}+2j+1} &= \\ = (e_{2^k+j} \wedge r_k) \wedge (e_{2^k+j} \wedge (-r_k)) &= 0, \end{aligned}$$

з (3) дістаємо, що $e_{2n} \sqcup e_{2n+1} = e_n$, а отже, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ – диз'юнктне дерево на e. Нехай дано послідовність номерів $m_1 < m_2 < \ldots$ та послідовність $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$. Покажемо, що існує

послідовність $\ell_k \in \{0,\dots,2^k-1\}$, $k=1,2,\dots$ така, що
$$e_{2^{k+1}+\ell_{k+1}} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}, \tag{4}$$
а також множина $\{n \in \mathbb{N} : \ f_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}\}$ нескінченна для всіх $k \in \mathbb{N}$. При $k=1$ маємо $e = e_2 \sqcup e_3$. Якщо $n \geq 2$, то або $f_n \sqsubseteq e_{m_n} \sqsubseteq e_2$, або $f_n \sqsubseteq e_{m_n} \sqsubseteq e_3$. А отже, принаймні одна з множин $\{n \in \mathbb{N} : \ f_n \sqsubseteq e_{2^1+\ell}\}$, $\ell = 0,1$ нескінченна. Позначимо відповідний індекс через $\ell_1 \in \{0,1\}$. При $k=2$ маємо $e = e_4 \sqcup e_5 \sqcup e_6 \sqcup e_7$. Тоді кожний елемент f_n при $n \geq 8$, так само, як і e_n, є фрагментом одного з елементів e_4, e_5, e_6, e_7. А отже, принаймні одна з множин $\{n \in \mathbb{N} : \ f_n \sqsubseteq e_{2^2+\ell}\}$, $\ell = 0,1,2,3$ нескінченна. Позначимо відповідний індекс через $\ell_2 \in \{0,1,2,3\}$. Продовжуючи процес побудови очевидним чином, отримаємо шукану послідовність.

Використовуючи нескінченність кожної з множин $\{n \in \mathbb{N} : \ f_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}\}$, виберемо підпослідовність $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ так, щоби $f_{n_k} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$, і доведемо, що $f_{n_k} \xrightarrow{\text{o}} 0$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо
$$u_k = \sup_{j \geq k} f_{n_j}.$$
Супремум існує, адже E – порядково повна векторні ґратка, а множина обмежена зверху елементом e (нагадаємо, що ґратковий та латеральний порядок збігаються на $\mathfrak{F}_e$, а отже, супремум в означенні u_k можна брати як звичайний, так і латеральний). Тоді $0 \leq f_{n_k} \leq u_k \downarrow$. Залишається довести, що $\inf_k u_k = 0$. Нехай, навпаки, існує $z \in \mathfrak{F}_e$ такий, що $0 \neq z \sqsubseteq u_k$ для всіх k. Оскільки $(d_n)_{n=1}^\infty$ – латерально щільна в $\mathfrak{F}_e$ послідовність, то існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що $d_m \sqsubseteq z$. Тоді
$$e_{2m} = e_m \wedge d_m \sqsubseteq d_m \sqsubseteq z \sqsubseteq u_k \quad \text{для всіх} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$
З (4) випливає, що при $j \geq k$ має місце $f_{n_j} \sqsubseteq e_{2^j+\ell_j} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$, а отже, $u_k \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$. Враховуючи (5), отримуємо $e_{4m} \sqcup e_{4m+1} = e_{2m} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Виберемо $k \in \mathbb{N}$ так, щоби $2^k \leq 4m < 2^{k+1}$, а потім виберемо $\ell \in \{0,\dots,2^k-1\}$ так, щоби $4m = 2^k+\ell$. Тоді $4m+1 = 2^k+\ell+1$, причому з парності $4m$ випливає, що $\ell \leq 2k-2$, а отже, $\ell+1 \leq 2^k-1$. З умов $e_{2^k+\ell} = e_{4m} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$ випливає, що $\ell = \ell_k$, а з умов $e_{2^k+\ell+1} = e_{4m+1} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$ випливає, що $\ell+1 = \ell_k$, – суперечність, яка доводить, що $f_{n_k} \xrightarrow{\text{o}} 0$. Оскільки при цьому $f_{n_k} \in \mathfrak{F}_e$ при всіх $k \in \mathbb{N}$, то $f_{n_k} \xrightarrow{\text{lat}} 0$.

Лема 5. *Нехай E – безатомна порядково повна зліченно-подільна векторна ґратка, X – нормований простір, $T : E \to X$ – скінченновимірний латерально-нормовано неперервний ортогонально адитивний оператор. Тоді для довільного $e \in E$ існує диз'юнктне дерево $(e_n)_{n=1}^\infty$ на e таке, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що для довільного $\ell \in \{0,\dots,2^k-1\}$ та довільного $f \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$ маємо $\|T(f)\| < \varepsilon$.*

Доведення. [Доведення] Зафіксуємо довільний $e \in E$ та виберемо, згідно з лемою 4, диз'юнктне дерево $(e_n)_{n=1}^\infty$ на e таке, що для довільної послідовності номерів $m_1 < m_2 < \dots$ та довільної послідовності $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$ існує підпослідовність $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$, яка латерально прямує до нуля. Доведемо, що дане дерево є шуканим. Нехай, навпаки, для даного $\delta > 0$ і кожного $n \in \mathbb{N}$ існують $\ell_n \in \{0,\dots,2^n-1\}$ та фрагмент $f_n \sqsubseteq e_{2^n+\ell_n}$ такі, що $\|T(f_n)\| \geq \delta$. Вибравши латерально збіжну до нуля підпослідовність $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$, отримуємо суперечність з латерально-нормованою неперервністю в нулі, адже ортогонально адитивний оператор нуль переводить в нуль.

Наступна лема формально випливає з леми про заокруглення коефіцієнтів [5, с. 14] при $\dim X = 1$. Крім того, дану лему можна легко довести індукцією за n.

Лема 6. *Нехай $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$, причому $|a_k| < \varepsilon$ для всіх $k = 1,\dots,n$. Тоді існує розбиття $\{1,\dots,n\} = I \sqcup J$ таке, що*
$$\Big|\sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} a_j\Big| < \varepsilon.$$

3. Основний результат

Наступна теорема накладає необтяжливі умови на векторну ґратку E для того, щоб сума вузького та скінченновимірного операторів була вузькою.

Теорема 2. *Нехай E – безатомна порядково повна зліченно-подільна векторна ґратка, X – нормований простір, $S, T : E \to X$ – ортогонально адитивні оператори. Якщо S – вузький, а T – скінченновимірний латерально-нормовано неперервний оператор, то сума $S + T$ – вузький оператор.*

Доведення. [Доведення] Спочатку доведемо, що досить розглянути випадок, коли T – одновимірний оператор, подавши T у вигляді скінченної суми одновимірних операторів з аналогічними властивостями. Дійсно, позначимо $X_1 = T(E)$ та $n = \dim X_1$. Виберемо лінійно незалежну систему $x_1, \ldots, x_n \in X_1$, а також функціонали $f_1, \ldots, f_n \in X^*$, використовуючи теорему Гана-Банаха, так, щоби $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ при всіх $i, j \le n$. Таким чином, формулою

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i, \ \text{ де } x \in X,$$

задається лінійний неперервний проектор з X на X_1. Зокрема,

$$T(e) = P\big(T(e)\big) = \sum_{i=1}^{n} f_i\big(T(e)\big)\, x_i$$

для всіх $e \in E$. Оскільки композиція ортогонально адитивного оператора на лінійний є, очевидно, ортогонально адитивним оператором, то $f_i \circ T$ є таким. Аналогічно, композиція латерально-нормовано неперервного оператора на неперервний є латерально-нормовано неперервним оператором, а отже, $f_i \circ T$ є таким для всіх $i = 1, \ldots, n$. Таким чином, T є скінченною сумою латерально-нормовано неперервних ортогонально адитивних одновимірних операторів. Якщо довести теорему в припущенні одновимірності T, то загальне твердження теореми випливатиме з принципу математичної індукції.

Отже, нехай T – одновимірний, і нехай $x \in X$ – такий елемент та $\varphi : E \to \mathbb{R}$ – таке відображення, що $\|x\| = 1$, $T(e) = \varphi(e)\, x$ для всіх $e \in E$. Безпосередньо отримуємо, що φ – латерально-нормовано неперервний ортогонально адитивний оператор.

Доведемо вузькість суми $S + T$. Зафіксуємо довільно $e \in E$ та $\varepsilon > 0$. Виберемо, згідно з лемою 5, диз'юнктне дерево $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ на e та $k \in \mathbb{N}$ такі, що для довільного $\ell \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ та довільного $f \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$ маємо $\|T(f)\| < \varepsilon/2$, тобто, $|\varphi(f)| < \varepsilon/2$. Виберемо, згідно з лемою 6, розбиття $\{0, \ldots, 2^k - 1\} = I \sqcup J$ таке, що

$$\Big| \sum_{i \in I} \varphi(e_{2^k+i}) - \sum_{j \in J} \varphi(e_{2^k+j}) \Big| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Покладемо $e' = \bigsqcup_{i \in I} e_{2^k+i}$ та $e'' = \bigsqcup_{j \in J} e_{2^k+j}$. Тоді $e = e' \sqcup e''$, причому

$$\begin{aligned}
&\|(S+T)(e') - (S+T)(e'')\| \le \\
&\le \|S(e') - S(e'')\| + \|T(e') - T(e'')\| = \\
&= \Big\| \sum_{i \in I} S(e_{2^k+i}) - \sum_{j \in J} S(e_{2^k+j}) \Big\| + \\
&+ \Big| \sum_{i \in I} \varphi(e_{2^k+i}) - \sum_{j \in J} \varphi(e_{2^k+j}) \Big| < \\
&< \sum_{i \in I} \|S(e_{2^k+i})\| + \sum_{j \in J} \|S(e_{2^k+j})\| + \frac{\varepsilon}{2} = \\
&= \sum_{\ell=0}^{2^k-1} \|S(e_{2^k+\ell})\| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

З наслідку 1 та теореми 2 отримуємо наступний результат.

Наслідок 3. *Нехай E – банахів простір Кете з абсолютно неперервною нормою на просторі з безатомною скінченною мірою, X – нормований простір, $S, T : E \to X$ – ортогонально адитивні оператори. Якщо S – вузький, а T – скінченновимірний латерально-нормовано неперервний оператор, то сума $S + T$ – вузький оператор.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators – Dordrecht: Springer, 2006. – 367 p.
2. *Гуменчук Г. І.* Про суму вузького та скінченновимірного ортогонально адитивних операторів // Укр. мат. ж. – 2015. – 67, №12. – С. 1620–1625.
3. *Gumenchuk A. I.* Lateral continuity and orthogonally additive operators // Carpathian Math. Publ. – 2015. – 7, No 1. – P. 49–56.

4. *Gumenchuk A. I., Pliev M. A, Popov M. M.* Extensions of orthogonally additive operators // Math. Stud. – 2014. – 41, No 2. – P. 214-219.
5. *Kadets V. M., Kadets M. I.* Rearrangements of series in Banach spaces. – R.I.: Providence. Transl. Math. Mon. – v.86. – AMS – 1991. – 189 p.
6. *Mykhaylyuk V.* On the sum of a compact and a narrow operators // J. Funct. Anal. – 2014. – 266. – P. 5912-5920.
7. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M.* The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators // Preprint. – 2017.
8. *Plichko A. M., Popov M. M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces // Dissertationes Mathematicae. – 1990. – 306. – P. 1-85.
9. *Pliev M. A., Popov M. M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity. – 2014. – 18. – P. 641-667.
10. *Popov M., Randrianantoanina B.* Narrow operators on function spaces and vector lattices – Berlin–Boston: De Gruyter, 2013. – 319 p.