УДК 517.9

©2017 р. І.М. Грод, В.Л. Кулик

Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка
Сілезький технічний університет, м. Глівіце, Польща

ІНВАРІАНТНІ МНОЖИНИ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА МНОГОВИДАХ

Отримано достатні умови існування обмежених інваріантних многовидів для деяких розширень динамічних систем на многовидах.

We obtain sufficient conditions for the existence of bounded invariant manifolds for certain extensions of dynamical systems on the manifolds.

Дослідженню інваріантних многовидів динамічних систем присвячено багато робіт [1-8]. Введене в роботі [3] поняття функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори дозволило з єдиної точки зору викласти теорію збурення як диференційовних, так і неперервних інваріантних многовидів. Нагадаємо деякі поняття.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \frac{dy}{dy} = A(x)\, y, \tag{1}$$

де $x \in R^m, y \in R^n$, $f(x)$ – вектор-функція, визначена, неперервна на R^m і локально задовольняє умову Ліпшиця. Матриця $A(x)$ є $n \times n$–вимірною, елементами якої є дійсні функції, визначені на R^m, неперервні і обмежені. Додатково припускаємо, що кожний розв'язок $x(t;x_0)$ задачі Коші $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, $x|_{t=0} = x_0$ є визначений при всіх $t \in R$. Для цього досить припускати, що вектор-функція $f(x)$ задовольняє оцінку

$$\|f(x)\| \leq \alpha_1 \|x\| + \alpha_2 \tag{2}$$

з деякими невід'ємними сталими α_1, α_2.

Будемо надалі використовувати наступні позначення: $C^0(R^m)$ – простір дійсних функцій, неперервних і обмежених на R^m, $\langle y, \bar{y}\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{y}_j$ – скалярний добуток в R^n, норма вектора $\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$. $C'(R^m; f)$ – підпростір простору $C^0(R^m)$ таких функцій $F(x)$, що суперпозиція $F(x(t;x_0))$ як функція змінної t є неперервно диференційовною, причому за означенням $\left.\dfrac{d}{dt}F(x(t;x))\right|_{t=0} \overset{df}{=} \dot{F}(x) \in C^0(R^m)$. Норму $n \times n$–вимірної матриці G будемо розуміти як операторну норму: $\|G\| = \max\limits_{\|y\|=1} \|Gy\|$, $\|S\|_0 = \sup\limits_{x \in R_m} \|S(x)\|$. $\Omega_\tau^t(x_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків лінійної системи

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t;x_0))\, y \tag{3}$$

нормована в точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(x_0)|_{t=\tau} = I_n$, I_n – одинична матриця.

Поряд з системою (1) випишемо неоднорідну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \frac{dy}{dt} = A(x)\, y + h(x), \tag{4}$$

де $h(x) \in C^0(R^m)$.

Означення 1. *Кажуть [6], що система* (4) *має обмежений інваріантний многовид, визначений рівністю*

$$y = u(x), \tag{5}$$

якщо функція $u(x) \in C'(R^m; f)$ *і виконується тотожність*

$$\dot{u}(x) \equiv A(x)\, u(x) + h(x), \tag{6}$$

при всіх $x \in R^m$.

У випадку, коли функція (5) є неперервно диференційовною, то тотожність (6) записується у вигляді

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x) \equiv A(x)\, u(x) + h(x)\,.$$

Означення 2. *Нехай існує $n \times n$-вимірна матриця $C(x) \in C^0(R^m)$ така, що для функції вигляду*

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)\, C(x(\tau; x)) \quad, \quad \tau \le 0 \\ \Omega_\tau^0(x)\left[C(x(\tau; x)) - I_n\right], \tau > 0 \end{cases} \tag{7}$$

виконується оцінка

$$\|G_0(\tau, x)\| \le K \exp\{-\gamma\, |\tau|\} \tag{8}$$

з деякими додатними сталими K, γ.

Тоді функцію (7) *називають функцією Гріна-Самойленка задачі про обмежені інваріантні многовиди системи* (1).

Існування функції Гріна (7) дозволяє стверджувати, що система (4) має обмежений інваріантний многовид (5) при кожній функції $h(x) \in C^0(R^m)$ і його можна записати в інтегральному вигляді:

$$y = u(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, x) \cdot h(x(\tau; x))\, d\tau.$$

Виконання оцінки (8) для функції Гріна (7) еквівалентне виконанню такої оцінки

$$\|G_t(0, x)\| \le K \exp\{-\gamma\, |t|\} \tag{9}$$

для допоміжної функції

$$G_t(0, x) = \begin{cases} \Omega_0^t(x)\, C(x) \quad, \quad t \ge 0 \\ \Omega_0^t(x)\left[C(x) - I_n\right], t < 0 \end{cases}. \tag{10}$$

Питання існування функції Гріна тісно пов'язане з питанням існування узагальненої функції Ляпунова, яка розглядається у вигляді квадратичних форм [6]. Такі форми можуть змінювати знак і вироджуватись у деяких точках, а їх похідна в силу системи рівнянь є знаковизначеною. Нагадаємо, [6] що існування невиродженої квадратичної форми $V = \langle S(x)\, y, y\rangle$, ($\det S(x) \ne 0$,$\forall x \in R^m$), похідна якої в силу системи (1) є знаковизначеною

$$\dot{V} = \Big\langle \Big[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S(x)}{\partial x_j} f_j(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x) \Big] y, y \Big\rangle \le -\beta \|y\|^2, \tag{11}$$

забезпечує регулярність цієї системи, а це означає, що дана система має єдину функцію Гріна-Самойленка. Якщо ж $\det S(x_0) = 0$ при деякому значенні $x = x_0$, то система (1) не має функції Гріна-Самойленка про обмежені інваріантні многовиди.

Цікавим постає питання [4], [5] про збереження обмежених інваріантних многовидів при нелінійних збуреннях. Для цього розглянемо систему нелінійних розширень динамічних систем виду

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\,, \frac{dy}{dy} = A(x)\, y + Q(x, y)\,, \tag{12}$$

де $Q(x, y)$ – неперервна і обмежена на $R^m \times R^n$ вектор-функція і така, що

$$\sup_{(x,y) \in R^m \times M} \|Q(x, y)\| < +\infty \tag{13}$$

для довільної обмеженої множини $M \subset R^n$.

Для таких систем нелінійних диференціальних рівнянь вивчаються умови існування обмежених інваріантних многовидів.

Будемо говорити, що система (12) *має обмежений інваріантний многовид, визначений рівністю*

$$y = u(x)\,, \tag{14}$$

якщо функція $u(x) \in C'(R^m; f)$ і виконується тотожність

$$\dot{u}(x) \equiv A(x)\, u(x) + Q(x, u(x)) \tag{15}$$

при всіх $x \in R^m$.

Теорема 1. *Нехай система* (12) *така, що матрична функція $A(x) \in C^0(R^m)$, $f(x)$–вектор-функція, визначена, неперервна на R^m, локально задовольняє умову Ліпшиця для якої виконується нерівність* (2), *а для $Q(x, y)$ має місце нерівність*

$$\|Q(x, y) - Q(x, \overline{y})\|_0 \le N\, \|y - \overline{y}\|\,, \tag{16}$$

при деякій додатній сталій N і довільних $y, \overline{y} \in R^m$.

Припустимо також, що існує невироджена квадратична форма $V = \langle S(x)\, y, y\rangle$, *(*$\det S(x) \neq 0 \ , \forall x \in R^m$ *) така, що виконується нерівність* (11), *причому*

$$\|A\|_0{}^{3/2} \cdot N < \frac{1}{4(2+\sqrt{2})}\left\{\frac{\beta}{\|S\|_0}\right\}^{5/2}, \quad (17)$$

тоді система (12) *має єдиний обмежений інваріантний многовид* $y = u(x)$.

Доведення. Зауважимо, що існування знакозмінної функції Ляпунова $V = \langle S(x)\, y, y\rangle$, для якої виконується (11), забезпечує експоненціальну дихотомію обмеженого інваріантного многовиду $y = 0$ системи (4).

Отже, система

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(x(t;x_0))\, y(t) \quad (18)$$

при довільному фіксованому $x_0 \in R^m$, має єдину функцію Гріна задачі про обмежені розв'язки $G_t(\tau, x_0)$ і виконується нерівність

$$\frac{d}{dt}[\langle S(x(t;x_0))y(t;x_0), y(t;x_0)\rangle \pm$$

$$\pm\epsilon_0\|y(t;x_0)\|^2] \leq -(\beta - 2\|A\|_0\epsilon_0)\|y(t;x_0)\|^2 \quad (19)$$

при $0 \leq \epsilon_0 \leq \beta/(2\|A\|_0)$.

Для всіх нетривіальних розв'язків $y^+(t;x_0)$, які затухають на $+\infty$, маємо

$$\langle S(x(t;x_0))\, y^+(t;x_0), y^+(t;x_0)\rangle -$$

$$-\epsilon_0\|y^+(t;x_0)^2\| > 0. \quad (20)$$

Далі, якщо припустити, що дана нерівність порушується в деякій точці $t = t^*$ тобто $\langle S(x(t^*;x_0))\, y^+(t^*;x_0), y^+(t^*;x_0)\rangle - \epsilon_0\|y^+(t^*;x_0)^2\| < 0$, тоді в силу нерівності (19)

$$\langle S(x(t;x_0))\, y^+(t;x_0), y^+(t;x_0)\rangle -$$

$$-\epsilon_0\|y^+(t;x_0)\|^2 \leq$$

$$\leq \langle S(x(t^*;x_0))\, y^+(t^*;x_0), y^+(t^*;x_0)\rangle -$$

$$-\epsilon_0\|y^+(t^*;x_0)\|^2$$

для всіх $t \geq t^*$, а це протирічить тому, що розв'язки $y^+(t;x_0)$ прямують до нуля на $+\infty$. З іншого боку виконується оцінка

$$\frac{d}{dt}\langle S(x(t;x_0))\, y^+(t;x_0), y^+(t;x_0)\rangle \leq$$

$$s \leq -\beta\|y^+(t;x_0)\|^2. \quad (21)$$

Звідси, при $\tau \leq t$, отримуємо

$$\langle S(x(t;x_0))y^+(t;x_0), y^+(t;x_0)\rangle \leq$$

$$\leq \langle S(x(\tau;x_0))y^+(\tau;x_0), y^+(\tau;x_0)\rangle \times$$

$$\times \exp\left\{-\beta\int_\tau^t \|S(x(\sigma;x_0))\|^{-1}d\sigma\right\}. \quad (22)$$

З нерівностей (20), (22) випливає оцінка

$$\|y^+(t;x_0)\| \leq (2\|A\|_0\|\|S\|_0\beta^{-1})^{1/2}\|y^+(\tau;x_0)\| \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\beta}{2}\int_\tau^t \|S(x(\sigma;x_0))\|^{-1}d\sigma\right\}, \tau \leq t. \quad (23)$$

Аналогічна оцінка виконується для розв'язків $y^-(t;x_0)$ системи (18), які затухають на $-\infty$

$$\|y^-(t;x_0)\| \leq (2\|A\|_0\|\|S\|_0\beta^{-1})^{1/2}\|y^-(\tau;x_0)\| \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\beta}{2}\int_\tau^t \|S(x(\sigma;x_0))\|^{-1}d\sigma\right\}, \tau \leq t \quad (24)$$

при всіх $t \leq \tau$.

Звідси та з (23), враховуючи структуру функції Гріна, отримуємо

$$\|G_t(\tau, x_0)\| \leq (2+\sqrt{2})\left(\frac{\|A\|_0\|\|S\|_0}{\beta}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\beta}{2\|S\|_0}|t-\tau|\right\}. \quad (25)$$

Зауважимо, що в умовах теореми система (1) буде регулярною, тобто при кожному $h(x) \in C^0(R^m)$ існує єдиний обмежений інваріантний многовид (5), який можна задати у вигляді (6). А тому для довільної функції $z(x) \in C^0(R^m)$ система

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \frac{dy}{dy} = A(x)\, y + Q(x, z(x)) \quad (26)$$

має єдиний обмежений інваріантний многовид $y = v_z(x)$ в просторі $C^0\left(R^m\right)$, оскільки функція $Q\left(x, z(x)\right)$ належить простору $C^0\left(R^m\right)$ при довільному, фіксованому $z(x) \in C^0\left(R^m\right)$. Це дає можливість задати відображення $\widetilde{G}$:

$$\widetilde{G}(z(x)) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0\left(\tau, x\right) Q(x(\tau; x), z(x(\tau; x)))d\tau, \quad (27)$$

яке довільній функції $z(x) \in C^0\left(R^m\right)$ ставить у відповідність деяку функцію $y = v_z(x)$ з простору $C^0\left(R^m\right)$, що описує обмежений інваріантний многовид системи (26), тобто $\widetilde{G} : C^0\left(R^m\right) \longrightarrow C^0\left(R^m\right)$.

Покажемо, що дане відображення $\widetilde{G}(z(x))$ за певних умовах (в умовах теореми) буде стискуючим відображенням.

Для цього подамо $\widetilde{G}(z(x)) - \widetilde{G}(\overline{z}(x))$ у вигляді

$$\widetilde{G}(z(x)) - \widetilde{G}(\overline{z}(x)) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, x)Q(x(\tau; x), z(x(\tau; x)))d\tau -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0\left(\tau, x\right) Q(x(\tau; x), \overline{z}(x(\tau; x)))d\tau.$$

Отже,

$$\|\widetilde{G}(z(x)) - \widetilde{G}(\overline{z}(x))\| =$$

$$= \Big\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0\left(\tau, x\right) Q(x(\tau; x), z(x(\tau; x)))d\tau -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0\left(\tau, x\right) Q(x(\tau; x), \overline{z}(x(\tau; x)))d\tau \Big\| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, x)Q(x(\tau; x), z(x(\tau; x))) -$$

$$-G_0(\tau, x)Q(x(\tau; x), \overline{z}(x(\tau; x)))\|d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, x)\|\|Q(x(\tau; x), z(x(\tau; x))) -$$

$$-Q(x(\tau; x), \overline{z}(x(\tau; x)))\|d\tau \leq$$

$$\leq N \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0\left(\tau, x\right)\| \, \|z(x(\tau; x)) - \overline{z}(x(\tau; x)))\, \|d\tau \leq$$

$$\leq N \, \|z(x)) - \overline{z}(x))\, \|_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0\left(\tau, x\right)\|d\tau.$$

Звідси, на підставі оцінки (8),

$$\|\widetilde{G}(z(x)) - \widetilde{G}(\overline{z}(x))\| \leq N\| \, \|z(x)) - \overline{z}(x))\, \|_0 \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} K \exp\{-\gamma_0|t|\}d\tau =$$

$$= KN\|z(x) - \overline{z}(x)\|_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma_0|t|\}d\tau =$$

$$= KN \cdot \frac{2}{\gamma_0}\|\|z(x)) - \overline{z}(x))\|_0.$$

Тобто

$$\|\widetilde{G}(z(x)) - \widetilde{G}(\overline{z}(x))\| \leq$$

$$\leq KN \cdot \frac{2}{\gamma_0}\| \, \|z(x)) - \overline{z}(x))\, \|_0. \quad (28)$$

Або, з урахуванням нерівності (25),

$$\|\widetilde{G}(z(x)) - \widetilde{G}(\overline{z}(x))\| \leq N \cdot (2 + \sqrt{2}) \times$$

$$\times \left(\frac{\|A\|_0\|\|S\|_0}{\beta}\right)^{3/2} \frac{4\|S\|_0}{\beta} \, \|z(x)) - \overline{z}(x))\, \|_0. \quad (29)$$

Отже, при виконанні нерівності (17), $\widetilde{G}$ буде стискуючим відображенням. А тому, згідно з принципом стискуючих відображень [9], оператор $\widetilde{G} : C^0\left(R^m\right) \longrightarrow C^0\left(R^m\right)$ має єдину нерухому точку. Нехай $v\left(x\right) \in C^0\left(R^m\right)$ – це нерухома точка даного відображення, залишилось показати, що $y = v(x)$ є обмеженим інваріантним многовидом системи (12). Для цього розглянемо векторфункцію $y = v(x(t; x))$ і покажемо, що вона задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = A\left(x\left(t; x_0\right)\right) y(t) +$$

$$+Q(x(t; x_0), y(t)), t \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Враховуючи, що система (30) – це система лінійних диференціальних рівнянь з обмеженими на R коефіцієнтами, залежними від параметра x_0, яка експоненціально дихотомічна на осі R, то для неї, при кожному $x \in R^m$, існує функція Гріна задачі про обмежені розв'язки, яку можна задати у вигляді

$$G_t(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(x) P(\tau, x) \ , \quad \tau \le t \\ \Omega_\tau^0(x)[P(\tau, x) - I_n], \tau > t \end{cases},$$

для якої

$$\|G_t(\tau, x)\| \le K \exp\{-\gamma |t - \tau|\}, \tag{31}$$

$$x \in R^m, t, \tau \in R,$$

$$G_t(t-0, x) - G_t(t+0, x) = I_n, x \in R^m, \tag{32}$$

$$t, \tau \in R.$$

$$\frac{dG_t(\tau, x)}{dt} = A(x(t; x))G_t(\tau, x), \tag{33}$$

$$x \in R^m, t, \tau \in R, t \ne \tau,$$

для довільного $x \in R^m, t, \tau \in R$.

Оскільки $v(x)$ – нерухома точка оператора (34), то

$$v(x(t; x))) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, x) Q(x(\tau; x), v(x(\tau; x)))d\tau. \tag{34}$$

Тому, завдяки груповій властивості для функції $x(t; x)$, яка задається співвідношенням $x(t; x(\theta; x)) \equiv x(t+\theta; x)$, випишемо деякі властивості

$$\Omega_\tau^t(x(\theta; x); A) \equiv \Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}(x; A), \tag{35}$$

$$x \in R^m, t, \tau \in R,$$

$$G_t(\tau + t, x) = G_0(\tau, x(t; x)), \tag{36}$$

$$x \in R^m, t, \tau \in R.$$

Тоді

$$v(x(t; x)) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\theta, x(t; x)) \times$$

$$\times Q(x(\theta; x(t; x)), v(x(\theta; x(t; x))))d\theta \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\theta+t, x) Q(x(t+\theta; x), v(x(t+\theta; x)))d\theta.$$

Зробивши заміну змінних, $\theta + t = \tau$

$$v(x(t; x))) \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau, x) Q(x(\tau; x), v(x(\tau; x)))d\tau.$$

Звідси

$$v(x(t; x)) \equiv \int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, x) Q(x(\tau; x), v(x(\tau; x)))d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{\infty} G_t(\tau, x) Q(x(\tau; x), v(x(\tau; x)))d\tau.$$

Зауважимо, що властивості функцій $f(x), A(x)$ і нерівності (31) дають можливість продиференціювати обидві частини цієї тотожності по t і з урахуванням (36),(35) будемо мати

$$\frac{dv(x(t; x))}{dt} \equiv G_t(t-0, x) Q(x(t; x), v(x(t; x))) +$$

$$+ A(x(t; x)) \int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, x) Q(x(\tau; x), v(x(\tau; x)))d\tau -$$

$$- G_t(t+0, x) Q(x(t; x), v(x(t; x))) +$$

$$+ A(x(t; x)) \int_{t}^{\infty} G_t(\tau, x) Q(x(\tau; x), v(x(\tau; x)))d\tau$$

$$\frac{dv(x(t; x))}{dt} \equiv A(x(t; x))v(x(t; x)) +$$

$$+ Q(x(t; x), v(x(t; x))).$$

Отже, якщо зафіксувати довільну точку $x_0 \in R^m$, то $(x(t; x_0), v(x(t; x_0)))$ є розв'язком системи (30) для всіх $t \in R$, а значить виконується тотожність (15) для $\forall x \in R^m$. Цього достатньо, з урахуванням $v(x) \in C^0(R^m)$, щоб стверджувати, що $y = v(x)$ є обмеженим інваріантним многовидом системи (12). Теорему доведено.

Із умови (11) видно, що при "малих збуреннях"матриці $A(x)$ система (1) також буде мати функцію Гріна-Самойленка. Розглянемо випадок, коли вектор-функція $f(x)$

і математична функція $A(x)$ є неперервними за всією сукупністю змінних $x_1, \ldots, x_m$ і 2π – періодичними за кожною змінною x_j, $j=\overline{1,m}$, тобто задані на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$; $x \in R^n$ і опишемо клас збурень матриці $A(x)$, не обов'язково малих за нормою, при яких зберігається регулярність системи (1). Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай для матриціанта $\Omega_0^t(x;A)$ лінійної системи рівнянь* (1) *виконуєтьcя оцінка*

$$\|\Omega_0^t(x;A)\| \le Ke^{-\gamma t}, \ t \le 0 \ \forall x \le \mathcal{T}_m \tag{37}$$

з додатними сталими K та γ, незалежними від $x \ \in \mathcal{T}_m$ і $t \ \in R_+$.

Тоді збурена система

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = (A(x) + B(x))\, y \tag{38}$$

при кожній матричній функції $B(x) \ \in C^0(\mathcal{T}_m)$ з умовою

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|B(x_\sigma(x))\| d\sigma \le \ K_1, \tag{39}$$

де стала $K_1 < \infty$, буде регулярною.

Доведення. Легко переконатись, що матрицант $\Omega_0^t(x;A+B) = X(t)$ збуреної лінійної системи

$$\dot{y} = (A(x_t(x)) + B(x_t(x)))\, y$$

задовольняє інтегральне рівняння

$$X(t) = \Omega_0^t(x;A) \times$$

$$\times \left[I_n + \int\limits_0^t \Omega_0^\sigma(x;A)\, B(x_\sigma(x))\, X(\sigma)\, d\sigma \right].$$

Звідси, з урахуванням оцінки (37), отримуємо

$$\|X(t)\| \le Ke^{-\gamma t} \times$$

$$\times \left(1 + \int\limits_0^t e^{\gamma\sigma} \|B(x_\sigma(x))\| \|X(\sigma)\| dt \right), t \ge 0.$$

А це дає можливість отримати оцінку

$$\|\Omega_0^t(x;A+B)\| \le Ke^{-\gamma t} e^{\int\limits_0^t \|B(x_\sigma(x))\| d\sigma}, t \ge 0. \tag{40}$$

Тепер, з урахуванням умови (39) на основі (40), можна стверджувати, що система має єдину функцію Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x;A+B), & \tau \le 0; \\ 0, & \tau > 0. \end{cases}$$

Отже, система (38) є регулярною.

Зауваження 1. Оцінку (37) можна замінити такою:

$$\left\|\Omega_0^t(x;A)\right\| \ \le \ K_3 e^{\gamma t}, \quad t \le 0 \ \ \forall \ x \in \mathcal{T}_m,$$

де K_3, γ – додатні сталі, при цьому, теорема 2 залишається правильною.

А отже, можна стверджувати, що система вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \dot{y}_1 = A^+(x)\, y_1, \dot{y}_2 = A^-(x)\, y_2 \tag{41}$$

з матрицантами $\Omega_\tau^t(x;A^+), \Omega_\tau^t(x;A^-)$, які задовольняють оцінки

$$\|\Omega_0^t(x;A)\, C(x)\| \le Ke^{-\gamma t}, \qquad t \ge 0$$

$$\|\Omega_0^t(x;A)\,(C(x) - I_n)\| \le Ke^{\gamma t}, \qquad t < 0, \tag{42}$$

зберігає властивість регулярності при збуреннях:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(x), \\ &\tfrac{dy_1}{dt} = (A^+(x) + B_-(x))\, y_1, \\ &\tfrac{dy_2}{dt} = (A^-(x) + B_2(x))\, y_2, \end{aligned} \tag{43}$$

де матриці $B_i(x) \ \in C^0(\mathcal{T}_m)$ задовольняють умову (39).

Зауважимо, що при виконанні оцінок (42) тривіальний тор $y_i = 0$ системи (41) є експоненціально дихотомічним, тобто лінійна система $\dot{y_1} = A^+(x)\, y_1$, $\dot{y_2} = A^-(x)\, y_2$ експоненціально дихотомічна на всій осі R рівномірно за параметрами $x \in \mathcal{T}_m$. Виникає питання: чи буде зберігатись регулярність системи (16), якщо вибирати збурення $B(x)$ не блочно-діагонального вигляду? В системі (38) збурення $B(x) = diag\{B_1(x), B_2(x)\}$. Розглянемо один з прикладів, які показують, що регулярність системи (38) може порушуватись.

Приклад.

$$\frac{dx}{dt} = \sin(x)\ ,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \cos(x)\ y_1, \tag{44}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \sin(x)\ y_1 - \cos(x)\ y_2.$$

Переконаємось, що система (44) є регулярною. З цією метою розглянемо квадратичну форму

$$V(x, y_1, y_2) = \cos(x) y_1^2 + 2\sin(x) y_1 y_2 -$$

$$-(\cos(x)) y_2^2.$$

Матриця, яка відповідає цій квадратичній формі

$$S(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ \sin(x) & -\cos(x) \end{pmatrix},$$

є невиродженою ($\det S(x) = -\cos^2(x) - \sin^2(x) = -1 \neq 0$) і її власні значення : $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$.

Взявши похідну від квадратичної форми в силу системи (44), маємо

$$\dot{V}(x, y_1, y_2) = -(\sin(x))^2 y_1^2 + 2(\cos(x))^2 y_1^2 +$$

$$+2\cos(x)\sin(x) y_1 y_2 +$$

$$+2\sin(x)\cos(x) y_1 y_2 + 2\sin(x) y_1 (\sin(x) y_1 -$$

$$-\cos(x) y_2) + \sin(x)^2 y_2^2 -$$

$$-2\cos(x) y_2 \sin(x) y_1 + 2\cos(x) y_2^2 =$$

$$= (\sin^2(x) + 2\cos^2(x)) y_1^2 -$$

$$-2\cos(x)\sin(x) y_1 y_2 + (\sin^2(x) + 2\cos^2(x)) y_2^2$$

$$\geq y_1^2 - \sin(2x) y_1 y_2 + y_2^2 \geq y_1^2 - |y_1||y_2| +$$

$$+y_2^2 \geq y_1^2 - \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2).$$

Отже, система (44) є регулярною, тривіальний тор $y = 0$ є експоненціально дихотомічним і розмір підпросторів E^+ *і* E^- дорівнює 1.

Для системи (44) матриця $A(x)$ має вигляд

$$A(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 \\ \sin(x) & -\cos(x) \end{pmatrix}.$$

Тепер вибираємо матрицю $B(x)$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідно, збурена система буде мати вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \sin(x)\ ,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \cos(x)\, y_1, \tag{45}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\cos(x)\ y_2.$$

Очевидно, що система (45) не є регулярною. При цьому покажемо, що матриця $B(x)$ задовольняє умову (39). Справді, нехай $x_t(x_0)$ – розв'язок рівняння $x = \sin(x)$ такий, що $x|_{t=0} = x_0$. Тоді, очевидно, можна записати $\frac{d}{dt} x_t(x_0) = \sin x_t(x_0)$. Далі, виділивши окремо три випадки: 1) $x_0 \in (0, \pi)$; 2) $x_0 = 0$ *і* $x_0 = \pi$; 3) $x_0 \in (\pi, 2\pi)$, розглянемо перший з них: 1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|B(x_\sigma(x_0))\| d\sigma =$$

$$= \lim_{\substack{T_1 \to -\infty \\ T_2 \to +\infty}} \int_{T_1}^{T_2} |\sin(x_\sigma(x_0))\ |\ d\sigma =$$

$$= \lim_{\substack{T_1 \to -\infty \\ T_2 \to +\infty}} \int_{T_1}^{T_2} \frac{d}{dt}\ x_t(x_0)\, dt =$$

$$= \lim_{\substack{T_1 \to -\infty \\ T_2 \to +\infty}} [x_{T_1}(x_0) - x_{T_2}(x_0)]\ = \pi - 0 = \pi.$$

Аналогічно для двох наступних випадків отримаємо:

2) при $x_0 = 0$ і при $x_0 = \pi$, враховуючи, що $x_t(0) \equiv 0$, $\quad x_t(\pi) \equiv \pi$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|B(x_\sigma(x_0))\|\, d\sigma = 0;$$

3) при $x_0 \in (\pi, 2\pi)$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|B(x_\sigma(x_0))\|\, d\sigma = -(\pi - 2\pi) = \pi.$

Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|B\left(x_{\sigma}\left(x_{0}\right)\right)\| d\sigma = \begin{cases} \pi, & x \neq \pi k; \\ 0, & x = \pi k. \end{cases}$$

Теорема 3. *Нехай система з відокремленими змінними* (41) *є регулярною і відповідно для матрицантів* $\Omega_0^t\left(x; A^{\pm}\right)$ *виконуються оцінки* (42). *Тоді збурена система*

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right),$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \left(A^{+}\left(x\right) + B_1\left(x\right)\right) y_1, \qquad (46)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = B_3\left(x\right) y_1 + \left(A^{-}\left(x\right) + B_2\left(x\right)\right) y_2$$

при будь-яких матрицях $B_i\left(x\right) \in C^0\left(\mathcal{T}_m\right)$, $i = 1, 2$, *що задовольняють умову* (39), *буде регулярною.*

Доведення. З регулярності обох систем (42) випливає, що існує невироджена квадратична форма

$$V\left(x, y_1, y_2\right) = \left\langle S_1\left(x\right) y_1, y_1\right\rangle + \left\langle S_2\left(x\right) y_2, y_2\right\rangle,$$

яка має знаковизначену похідну $\dot{V}$ в силу системи (43), тобто

$$\dot{V} \geq \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2.$$

Тепер, вибираючи квадратичну форму

$$V_p\left(x, y_1, y_2\right) = p\left\langle S_1\left(x\right) y_1, y_1\right\rangle + \left\langle S_2\left(x\right) y_2, y_2\right\rangle,$$

безпосередньо переконуємось, що при великих значеннях параметра $p > 0$ її похідна в силу системи (46) буде знаковизначеною. Це і дає, очевидно, можливість стверджувати, що система (46) є регулярною. Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай система* (1) *має єдину функцію Гріна-Самойленка* (7), (8) *з матрицею проектування* $C\left(x\right) = C^2\left(x\right) \in C^0\left(\mathcal{T}_m\right)$.

Тоді система

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

$$\frac{dy}{dt} = \Big(A\left(x\right) + B\left(x\right) - C(x)B(x)(I_n - C(x))\Big) y, \qquad (47)$$

при кожній $(n \times n)$ *-вимірній матриці* $B\left(x\right) \in C^0\left(\mathcal{T}_m\right)$, *яка задовольняє умову* (39), *є регулярною.*

Доведення. Нехай матриця $L\left(x\right)$ приводить матрицю $C\left(x\right)$ до жорданової форми:

$$L^{-1}\left(x\right) C\left(x\right) L\left(x\right) = diag\ \left\{I_r, 0\right\}. \qquad (48)$$

Відомо, що матрицю $L\left(x\right)$ не завжди можна вибрати 2π-періодичною по x_j, $j = \overline{1, m}$. При цьому $L\left(x_t\left(x\right)\right)$ неперервно диференційована по t, $\dot{L}\left(x\right) \overset{def}{=} \frac{d}{dt} L\left(x_t\left(x\right)\right)\big|_{t=0}$. Зауважимо, що заміна змінних

$$y = L\left(x\right) y \qquad (49)$$

в системі (1) зводить її до розщепленого вигляду за нормальними змінними, тобто

$$L^{-1}\left(x\right)\Big(A\left(x\right) L\left(x\right) - \dot{L}\left(x\right)\Big) =$$

$$= diag\left\{A^{+}\left(x\right), A^{-}\left(x\right)\right\}.$$

Проведемо заміну змінних (49) в системі (47). З урахуванням (48) отримуємо систему

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right),$$

$$\dot{y} = \left[\begin{pmatrix} A^{+}\left(x\right) & 0 \\ 0 & A^{-}\left(x\right) \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} \overline{B}_{11}\left(x\right) & 0 \\ \overline{B}_{21}\left(x\right) & \overline{B}_{22}\left(x\right) \end{pmatrix}\right] y,$$

де матриця

$$\overline{B}\left(x\right) = \begin{pmatrix} \overline{B}_{11}\left(x\right) & 0 \\ \overline{B}_{21}\left(x\right) & \overline{B}_{22}\left(x\right) \end{pmatrix} =$$

$$= L^{-1}\left(x\right)\left[B\left(x\right) - C\left(x\right) B\left(x\right)\left(I_n - C\left(x\right)\right)\right] L\left(x\right),$$

очевидно, задовольняє умову (39). А це дозволяє стверджувати про правильність теореми 4.

Зауваження 2. Останнє твердження буде мати місце і в тому випадку, коли матриця збурень має вигляд

$$B\left(x\right) - \left(I_n - C\left(x\right)\right) B\left(x\right)\ C\left(x\right).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Mozer J.J.* On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus // Nachr. Acad. Wiss. Gottingen Math.-Phis. Kl. 1962. Vol. 18a, N 1.P. 1 – 20.

2. *Sacker R.J.* A perturbation theorem for invariant manifolds and Holder continuity // J. Math. and Mech. 1969. Vol.18, N 8. P. 705 – 762.

3. *Самойленко А.М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т.34, №6. С. 1219-1240.

4. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, – 1987. – 304 с.

5. *Перестюк М.О., Слюсарчук В.Ю.* Оператор Гріна-Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. 2008. Т. 60, №7. С. 948 – 957.

6. *Митропольський Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова – Киев: Наук. Думка, 1990. – 272 с.

7. *Бронштейн И.У., Копанский А.Я.* Инвариантное многообразие и нормальные формы. – Штиинца: Кишинев, 1992. – 330 с.

8. *Грод И.Н., Кулик В.Л.* О свойствах непрерывности инвариантных торов и функции Грина линейных расширений на торе// Укр. мат. журн. 1998. Т.41, №12. С. 1709 – 1714.

9. *Колмогоров А.Н.,Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.