УДК 517.524

©2017 р. Р.І. Дмитришин

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

ПРО ЗБІЖНІСТЬ БАГАТОВИМІРНОГО J-ДРОБУ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

У роботі досліджується збіжність багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними, який є розвиненням кратного степеневого ряду. Встановлено ознаки збіжності такого дробу у випадку комплексних коефіцієнтів і досліджено їх збіжність у випадку дійсних частинних чисельників.

In this paper, we investigate a convergence of multidimensional J-fraction with independent variables, which is the expansion of multiple power series. We have established the convergence criteria of this fraction if its coefficients are complex constants. And, we have investigated the convergence of multidimensional J-fraction with independent variables if its partial numerators are real constants.

1. Вступ. Одним із ефективних інструментів дробово-раціональних наближень функцій багатьох змінних є багатовимірне узагальнення функціональних неперервних дробів — функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними. Елементами цих дробів є функції багатьох змінних. За структурою функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними є аналогами кратних степеневих рядів. Характерною особливістю цих дробів є те, що кожна змінна задається по-різному в структурі їх підхідних дробів.

Одним із напрямків дослідження функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними є встановлення умов їх збіжності. Так, у роботах [2, 3] встановлено ознаки збіжності багатовимірного C-дробу з нерівнозначними змінними

$$1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_{i(1)}z_{i_1}}{1}+\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{c_{i(2)}z_{i_2}}{1}+\sum_{i_3=1}^{i_2}\frac{c_{i(3)}z_{i_3}}{1}+\cdots,$$

де $c_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, — комплексні сталі такі, що $c_{i(k)}\neq 0$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$,

$$\mathcal{I}_k=\{i(k):\ i(k)=(i_1,i_2,\ldots,i_k),\ 1\leq i_p\leq i_{p-1},\ 1\leq p\leq k,\ i_0=N\}$$

— множина мультиіндексів, $k\geq 1$, $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_N)\in\mathbb{C}^N$. Збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{g_{i(1)}z_{i_1}}{1}+\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{g_{i(2)}(1-g_{i(1)})z_{i_2}}{1}+\sum_{i_3=1}^{i_2}\frac{g_{i(3)}(1-g_{i(2)})z_{i_3}}{1}+\cdots,$$

де $s_0>0$, $g_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, — дійсні сталі такі, що $0<g_{i(k)}<1$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N$, досліджувалася в [5, 7]. У роботі [6] встановлено ознаки збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними

$$-\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}^2}{b_{i(1)}+z_{i_1}}-\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{a_{i(2)}^2}{b_{i(2)}+z_{i_2}}-\sum_{i_3=1}^{i_2}\frac{a_{i(3)}^2}{b_{i(3)}+z_{i_3}}-\cdots, \tag{1}$$

де $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, — комплексні сталі такі, що $a_{i(k)}\neq 0$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N$.

У цій роботі продовжується дослідження збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1). Для цього дробу встановлено ознаку збіжності, яка є розширенням результату, доведеного в [6] (теорема 3). Використовуючи параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів [1],

у теоремі 3 отримано нову ознаку збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1). Крім того, досліджено збіжність цього дробу в більш ширшій області, ніж в теоремі 4 [6].

Для зручності викладу отриманих результатів наведемо теорему, правильність якої випливає із теореми 2 [1].

Теорема 1. *Нехай існують додатні сталі ε, $\varepsilon < 1$, і φ, $\varphi < \pi/(2(1+\varepsilon))$, такі, що елементи $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i(2)}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{i(3)}}{1} + \cdots, \qquad (2)$$

задовольняють умови

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|c_{i(k)}| - \operatorname{Re}(c_{i(k)} e^{-i(\varphi_{i(k-1)}+\varphi_{i(k)})})}{\cos\varphi_{i(k)} - p_{i(k)}} \leq$$
$$\leq 2(1-\varepsilon) p_{i(k-1)}, \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 1,$$

де $\varphi_{i(k-1)}$, $p_{i(k-1)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, — деякі дійсні числа такі, що $|\varphi_{i(0)}| \leq \varphi$, $p_{i(0)} \geq 0$, $|\varphi_{i(k)}| \leq \varphi$, $0 \leq p_{i(k)} \leq (1-\varepsilon)\cos\varphi_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Нехай

$$f_n = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i(2)}}{1} + \cdots + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{c_{i(n)}}{1}$$

— n-ий підхідний дріб гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду (2), $n \geq 1$. Тоді:

(А) Значення всіх підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду (2) скінченні й розміщені у півплощині

$$\mathcal{V} = \left\{ \varpi : \ \operatorname{Re}(\varpi e^{-i\varphi_{i(0)}}) \geq -p_{i(0)} \right\}.$$

(Б) Існують скінченні границі послідовностей парних $\{f_{2n}\}$ і непарних $\{f_{2n-1}\}$ підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду (2).

(В) Гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду (2) збігається, якщо розбігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\max_{i(k)\in\mathcal{I}_k} |c_{i(k)}| \right)^{-1}.$$

2. Збіжність.

Нехай

$$f_n(\mathbf{z}) = -\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}^2}{b_{i(1)} + z_{i_1}} -$$
$$-\sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}^2}{b_{i(2)} + z_{i_2}} - \cdots - \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{a_{i(n)}^2}{b_{i(n)} + z_{i_n}}$$

— n-й підхідний дріб багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1), $n \geq 1$.

Терема 2. *Нехай коефіцієнти $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) задовольняють такі умови:*

$$b_{i(k)} = i d_{i(k)}, \ d_{i(k)} \geq 0, \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 1, \qquad (3)$$

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{(\operatorname{Im}(a_{i(1)}))^2}{l_{i_1}(1-g_{i(1)})} \leq (1-\varepsilon) g_{i(0)}, \qquad (4)$$

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{(\operatorname{Im}(a_{i(k+1)}))^2}{l_{i_{k+1}}(1-g_{i(k+1)})} \leq$$
$$\leq (1-\varepsilon) l_{i_k} g_{i(k)}, \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 1, \qquad (5)$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, — деякі додатні числа, ε — стала така, що $0 < \varepsilon < 1$, а $\{g_{i(k)}\}$ — послідовність дійсних чисел таких, що

$$g_{i(0)} \geq 0, \ 0 \leq g_{i(k)} \leq 1-\varepsilon, \qquad (6)$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Тоді:

(А) Для всіх $\mathbf{z}$ із множини

$$\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon} = \Big\{ \mathbf{z} : \ \operatorname{Re}(d - iz_k) \geq l_k,$$
$$|\arg(d - iz_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)}, \ 1 \leq k \leq N \Big\}, \qquad (7)$$

де

$$d = \inf_{i(k)\in\mathcal{I}_k, \, k\geq 1} d_{i(k)}, \qquad (8)$$

послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) збігаються до скінченних значень $p(\mathbf{z})$ і $q(\mathbf{z})$ відповідно. Обидві послідовності парних і непарних підхідних дробів будуть збігатися рівномірно на кожній компактній підмножині області $\operatorname{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$, а $p(\mathbf{z})$ і $q(\mathbf{z})$ — голоморфними функціями в області $\operatorname{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$.

(Б) Для кожного $\mathbf{z}\in\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$ *багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними (1) збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\max_{i(k)\in\mathcal{I}_k}|a_{i(k)}|^2\Big)^{-1}. \qquad (9)$$

Збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфною функцією в області* $\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$.

Доведення. Еквівалентними перетвореннями (див. [4, с. 29–33])

$$\rho_{i(k)}=1/(b_{i(k)}+z_{i_k}),\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\geq1, \quad (10)$$

багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними (1) зведемо до вигляду

$$i\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_{i(1)}(\mathbf{z})}{1}+\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{c_{i(2)}(\mathbf{z})}{1}+ +\sum_{i_3=1}^{i_2}\frac{c_{i(3)}(\mathbf{z})}{1}+\cdots, \qquad (11)$$

де $c_{i(1)}(\mathbf{z})=a^2_{i(1)}/(d_{i(1)}-iz_{i_1})$, $1\leq i_1\leq N$, $c_{i(k)}(\mathbf{z})=a^2_{i(k)}/((d_{i(k-1)}-iz_{i_{k-1}})(d_{i(k)}-iz_{i_k}))$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq2$. Покладемо $1/(d_{i(k)}-iz_{i_k})=r_{i(k)}e^{i\varphi_{i(k)}}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq1$, і виберемо $p_{i(0)}=g_{i(0)}$, $p_{i(k)}=g_{i(k)}\cos(\varphi_{i(k)})$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq1$. Тоді із умови (4) маємо

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{|c_{i(1)}(\mathbf{z})|-\mathrm{Re}(c_{i(1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i(1)}})}{r_{i(1)}l_{i_1}(1-g_{i(1)})}\leq \leq 2(1-\varepsilon)g_{i(0)},$$

а із умов (5) для будь-якого мультиіндексу $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq1$, отримаємо

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}\frac{1}{r_{i(k+1)}l_{i_{k+1}}(1-g_{i(k+1)})}\big(|c_{i(k+1)}(\mathbf{z})|- -\mathrm{Re}(c_{i(k+1)}(\mathbf{z})e^{-i(\varphi_{i(k)}+\varphi_{i(k+1)})})\big)\leq \leq 2(1-\varepsilon)r_{i(k)}l_{i_k}g_{i(k)},$$

або

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{\cos(\varphi_{i(1)})}{r_{i(1)}l_{i_1}(\cos(\varphi_{i(1)})-p_{i(1)})}\big(|c_{i(1)}(\mathbf{z})|- -\mathrm{Re}(c_{i(1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i(1)}})\big)\leq 2(1-\varepsilon)p_{i(0)}, \qquad (12)$$

а для будь-якого мультиіндексу $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq1$,

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}\frac{\cos(\varphi_{i(k+1)})}{r_{i(k+1)}l_{i_{k+1}}(\cos(\varphi_{i(k+1)})-p_{i(k+1)})}\times \times\big(-\mathrm{Re}(c_{i(k+1)}(\mathbf{z})e^{-i(\varphi_{i(k)}+\varphi_{i(k+1)})}+ +|c_{i(k+1)}(\mathbf{z})|\big)\leq 2(1-\varepsilon)\frac{r_{i(k)}l_{i_k}}{\cos(\varphi_{i(k)})}p_{i(k)}. \quad (13)$$

На підставі умов (6) маємо

$$0\leq p_{i(k)}\leq(1-\varepsilon)\cos\varphi_{i(k)}, \qquad (14)$$

де $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq1$. Тому для кожного $\mathbf{z}\in\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$ і для будь-якого мультиіндексу $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq1$, отримуємо

$$r_{i(k)}l_{i_k}=\frac{l_{i_k}}{|d_{i(k)}-iz_{i_k}|}\leq\frac{l_{i_k}}{|d-iz_{i_k}|}< <\cos(\arg(d-iz_{i_k}))\leq\cos(\varphi_{i(k)}). \qquad (15)$$

Використовуючи співвідношення (14) і (15), нерівності (12) і (13) запишемо відповідно у вигляді

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{|c_{i(1)}(\mathbf{z})|-\mathrm{Re}(c_{i(1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i(1)}})}{\cos(\varphi_{i(1)})-p_{i(1)}}\leq \leq 2(1-\varepsilon)p_{i(0)}, \qquad (16)$$

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}\frac{1}{\cos(\varphi_{i(k+1)})-p_{i(k+1)}}\big(|c_{i(k+1)}(\mathbf{z})|- -\mathrm{Re}(c_{i(k+1)}(\mathbf{z})e^{-i(\varphi_{i(k)}+\varphi_{i(k+1)})})\big)\leq \leq 2(1-\varepsilon)p_{i(k)},\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\geq1. \qquad (17)$$

Отже, елементи багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (11) задовольняють умови теореми 1 з $\varphi_{i(0)}=0$ тоді і лише тоді, коли $\mathbf{z}\in\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$.

Із твердження (Б) теореми 1 випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу (11), а отже, і багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) (на підставі принципу еквівалентності гіллястих ланцюгових дробів [4, с. 29–33]), збігаються до скінченних значень для всіх $\mathbf{z}\in\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$ і, крім того, із твердження (А) цієї теореми

заключаємо, що при $n \geq 2$ значення залишків

$$Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i(2)}(\mathbf{z})}{1} + $$
$$+ \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{i(3)}(\mathbf{z})}{1} + \cdots + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{c_{i(n)}(\mathbf{z})}{1},$$

де $1 \leq i_1 \leq N$, розміщені у відповідних півплощинах

$$\mathcal{V}_{i(1)}(\varphi_{i(1)}, p_{i(1)}) = \{w: \ \mathrm{Re}(we^{-i\varphi_{i(1)}}) \geq$$
$$\geq \cos(\varphi_{i(1)}) - p_{i(1)}\}, \qquad (18)$$

де $1 \leq i_1 \leq N$. Із нерівностей (14) випливає, що в області $\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$ всі $Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}) \not\equiv 0$. Очевидно, що

$$f_n(\mathbf{z}) = i \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(\mathbf{z})}{Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}, \quad n \geq 1,$$

— голоморфні функції в $\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$.

Нехай

$$\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\sigma,\varepsilon} = \Big\{\mathbf{z}: \ \mathrm{Re}(d - iz_k) > (1+\sigma)l_k,$$
$$|\arg(d - iz_k)| < \frac{\sigma\pi}{2(1+\varepsilon)}, \ 1 \leq k \leq N\Big\}, \quad (19)$$

де $0 < \sigma < 1$, — область, що міститься в $\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$, і нехай

$$C = \max_{1 \leq i_1 \leq N} |a_{i(1)}^2|.$$

Оскільки $|\varphi_{i(1)}| < \pi/(2(1+\varepsilon))$, $1 \leq i_1 \leq N$, то із умов (14) і (18) для довільного $\mathbf{z} \in \mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\sigma,\varepsilon} \subseteq \mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$ при $n \geq 1$ маємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i(k)}(\mathbf{z})|}{\mathrm{Re}(Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i(1)}})} \leq$$
$$\leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}^2|}{(\cos(\varphi_{i(1)}) - p_{i(k)})|d_{i(1)} - iz_{i_1}|} \leq$$
$$\leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{C}{\varepsilon(1+\sigma)l_{i_1}} = M(\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\sigma,\varepsilon}),$$

де стала $M(\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\sigma,\varepsilon})$ залежить лише від області (19), тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена в області $\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\sigma,\varepsilon}$.

Нехай $\mathcal{K}$ — довільна компактна підмножина області $\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$. Покриємо $\mathcal{K}$ областями вигляду (19). Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $\mathcal{P}_{l_1^{(r)},l_2^{(r)},\ldots,l_N^{(r)},d,\sigma^{(r)},\varepsilon^{(r)}}$, $1 \leq r \leq k$. Нехай

$$M(\mathcal{K}) = \max_{1 \leq r \leq k} M(\mathcal{P}_{l_1^{(k)},l_2^{(k)},\ldots,l_N^{(k)},d,\sigma^{(k)},\varepsilon^{(k)}}).$$

Тоді для довільного $\mathbf{z} \in \mathcal{K}$ при $n \geq 1$ маємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq M(\mathcal{K})$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$. Із теореми 2.17 [4, с. 66] випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу (11), а отже, і багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) (на підставі принципу еквівалентності гіллястих ланцюгових дробів [4, с. 29–33], рівномірно збігаються до голоморфних функцій на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$. Тим самим твердження (А) доведено. Твердження (Б) отримуємо із твердження (В) теореми 1.

Терема 3. *Нехай коефіцієнти $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) задовольняють умови (3) і такі умови*

$$\frac{(\mathrm{Im}(a_{i(1)}))^2}{l_{i_1}(1 - g_{i(1)})} \leq (1-\varepsilon)g_{i(0)}, \ 1 \leq i_1 \leq N, \quad (20)$$
$$(\mathrm{Im}(a_{i(k)}))^2 \leq (1-\varepsilon)l_{i_{k-1}}l_{i_k} \times$$
$$\times g_{i(k-1)}(1 - g_{i(k)}), \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 2, \quad (21)$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, — деякі додатні числа, ε — стала така, що $0 < \varepsilon < 1$, а $\{g_{i(k)}\}$ — послідовність дійсних чисел таких, що задовольняють умови (6). Тоді:

(А) Для всіх $\mathbf{z}$ із множини

$$\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon} = \Big\{\mathbf{z}: \ \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{\mathrm{Re}(d - iz_k)} \leq 1,$$
$$|\arg(d - iz_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)}, \ 1 \leq k \leq N\Big\}, \quad (22)$$

де стала d визначена в (8), послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) збігаються до скінченних значень $p(\mathbf{z})$ і $q(\mathbf{z})$ відповідно. Обидві послідовності

парних і непарних підхідних дробів будуть збігатися рівномірно на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$, *а* $p(\mathbf{z})$ *і* $q(\mathbf{z})$ *— голоморфними функціями в області* $\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$.

(Б) Для кожного $\mathbf{z}\in\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$ *багатовимірний* J*-дріб з нерівнозначними змінними (1) збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо розбігається ряд (9). Збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфною функцією в області* $\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$.

Доведення. Так само, як і в доведенні теореми 2, багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними (1) еквівалентними перетвореннями (10) зведемо до вигляду (11). Покладемо $1/(d_{i(k)}-iz_{i_k})=r_{i(k)}e^{i\varphi_{i(k)}}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, і виберемо $p_{i(0)}=g_{i(0)}$, $p_{i(k)}=g_{i(k)}\cos(\varphi_{i(k)})$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$. Тоді із умов (20) і (22) маємо

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{|c_{i(1)}(\mathbf{z})|-\mathrm{Re}(c_{i(1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i(1)}})}{(1-g_{i(1)})\cos(\varphi_{i(1)})}\leq$$
$$\leq 2(1-\varepsilon)g_{i(0)},$$

звідки безпосередньо отримуємо нерівність (16). Із умов (21) і (22) для будь-якого мультиіндексу $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, маємо

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}\frac{1}{(1-g_{i(k+1)})\cos(\varphi_{i(k+1)})}\big(|c_{i(k+1)}(\mathbf{z})|-$$
$$-\mathrm{Re}(c_{i(k+1)}(\mathbf{z})e^{-i(\varphi_{i(k)}+\varphi_{i(k+1)})})\big)\leq$$
$$\leq 2(1-\varepsilon)r_{i(k)}l_{i_k}g_{i(k)}. \tag{23}$$

Очевидно, що за умов (6) правильною є нерівність (14),а для кожного $\mathbf{z}\in\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\delta}$ і для будь-якого мультиіндексу $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, — нерівність (15). Застосовуючи (15) до (23), отримуємо нерівність (17).

Отже, елементи багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (11) задовольняють умови теореми 1 з $\varphi_{i(0)}=0$ тоді і лише тоді, коли $\mathbf{z}\in\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$.

Із твердження (Б) теореми 1 випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу (11), а отже, і багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) (на підставі принципу еквівалентності гіллястих ланцюгових дробів [4, с. 29–33]), збігаються до скінченних значень для всіх $\mathbf{z}\in\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\delta}$ і, крім того, із твердження (А) цієї теореми заключаємо, що при $n\geq 2$ значення залишків $Q^{(n)}_{i(1)}(\mathbf{z})$, $1\leq i_1\leq N$, розміщені у відповідних півплощинах (18). Із нерівностей (14) випливає, що в області $\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$ всі $Q^{(n)}_{i(1)}(\mathbf{z})\not\equiv 0$. Очевидно, що $f_n(\mathbf{z})$, $n\geq 1$, — голоморфні функції в $\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$.

Нехай

$$\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\sigma,\varepsilon}=\Big\{\mathbf{z}:\ \sum_{k=1}^{N}\frac{l_k}{\mathrm{Re}(d-iz_k)}<\sigma,$$
$$|\arg(d-iz_k)|<\frac{\sigma\pi}{2(1+\delta)},\ 1\leq k\leq N\Big\}, \tag{24}$$

де $0<\sigma<1$, — область, що міститься в $\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$, і нехай

$$C=\max_{1\leq i_1\leq N}|a^2_{i(1)}|,\ l=\min_{1\leq k\leq N}l_k.$$

Оскільки $|\varphi_{i(1)}|<\pi/(2(1+\varepsilon)$, $1\leq i_1\leq N$, то із умов (14) і (18) для довільного $\mathbf{z}\in\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\sigma,\varepsilon}\subseteq\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$ при $n\geq 1$ маємо

$$|f_n(\mathbf{z})|\leq\sum_{i_1=1}^{N}\frac{|c_{i(k)}(\mathbf{z})|}{\mathrm{Re}(Q^{(n)}_{i(1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i(1)}})}\leq$$
$$\leq\sum_{i_1=1}^{N}\frac{|a^2_{i(1)}|}{(\cos(\varphi_{i(1)})-p_{i(k)})|d_{i(1)}-iz_{i_1}|}\leq\frac{\sigma C}{\varepsilon l}=$$
$$=M(\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\sigma,\varepsilon}),$$

де стала $M(\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\sigma,\varepsilon})$ залежить лише від області (24), тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена в області $\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\sigma,\varepsilon}$.

Нехай $\mathcal{K}$ — довільна компактна підмножина області $\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\dots,l_N,d,\varepsilon}$. Покриємо $\mathcal{K}$ областями вигляду (24). Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $\mathcal{Q}_{l_1^{(r)},l_2^{(r)},\dots,l_N^{(r)},d,\sigma^{(r)},\varepsilon^{(r)}}$, $1\leq r\leq k$. Нехай

$$M(\mathcal{K})=\max_{1\leq r\leq k}M(\mathcal{Q}_{l_1^{(k)},l_2^{(k)},\dots,l_N^{(k)},d,\sigma^{(k)},\varepsilon^{(k)}}).$$

Тоді для довільного $\mathbf{z}\in\mathcal{K}$ при $n\geq 1$ маємо $|f_n(\mathbf{z})|\leq M(\mathcal{K})$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена на кожній компактній

підмножині області $\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$. Із теореми 2.17 [4, с. 66] випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу (11), а отже, і багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) (на підставі принципу еквівалентності гіллястих ланцюгових дробів [4, с. 29–33], рівномірно збігаються до голоморфних функцій на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\mathcal{Q}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$. Тим самим твердження (А) доведено. Твердження (Б) отримуємо із твердження (В) теореми 1.

Наступна теорема про область збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) з дійсними частинними чисельниками.

Терема 4. *Нехай коефіцієнти* $b_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) задовольняють умови (3), а всі* $a_{i(k)}$ *— додатні дійсні сталі. Тоді:*

(А) Послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (1) збігаються до голоморфних функцій в області

$$\mathcal{R}_{d,\delta} = \big\{\mathbf{z} : \ |\arg(d - iz_n)| < \\ < \pi/(2(1+\varepsilon)), \ 1 \leq n \leq N\big\},$$

де стала d *визначена в (8),* ε *— стала така, що* $0 < \varepsilon < 1$, *причому їх збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $\mathcal{R}_{d,\varepsilon}$.

(Б) Багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними (1) збігається до голоморфної функції в області $\mathcal{R}_{d,\varepsilon}$, *якщо розбігається ряд (9), причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $\mathcal{R}_{d,\varepsilon}$.

Доведення. Якщо всі $a_{i(k)} > 0$, то умови (4) і (5) виконуються при кожному $l_k > 0$, $1 \leq k \leq N$. Нехай $\mathcal{K}$ — довільна компактна підмножина області $\mathcal{R}_{d,\varepsilon}$. Тоді правильні такі включення: $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon} \subseteq \mathcal{R}_{d,\varepsilon}$ для деяких досить малих l_k, $1 \leq k \leq N$, для яких $\mathrm{Int}\mathcal{P}_{l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\varepsilon}$ є внутрішність множини (7). Тому теорема 4 є наслідком теореми 2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Антонова Т.М.* Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 4. — С. 7–12.

2. *Антонова Т.М., Боднар Д.І.* Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту матем. НАН України. — 2000. — Т. 31. — С. 19–32.

3. *Баран О.Є.* Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук за спец. 01.01.01 — матем. аналіз. — Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. — 166 с.

4. *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. — К.: Наукова думка, 1986. — 176 с.

5. *Дмитришин Р.І.* Ефективна ознака збіжності деякого гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Наук. вісн. Чернівецького у-ту: Збірник наук. праць. Вип. 374. Матем. — 2008. — С. 44–49.

6. *Дмитришин Р.І.* Про деякі області збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. вісник НТШ. — 2011. — Т. 8. — С. 69–77.

7. *Дмитришин Р.І.* Про збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 4. — С. 87–92.