УДК 517.929

©2017 р. А.Б. Дорош, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ЗАПІЗНЕННЯМИ

Досліджуються лінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. Побудовано та обґрунтовано ітераційну схему для наближеного знаходження розв'язку методом сплайн-колокацій.

Linear boundary value problems for integro-differential equations with many delays are studied. The iterative scheme for a solution approximation using the spline-collocation method is constructed and substantiated.

1. Вступ

Крайові задачі для диференціальних рівнянь із запізненням виникають у багатьох областях математичного моделювання. Умови розв'язності крайових задач для таких рівнянь і різні методи їхнього розв'язання вивчалися в роботах [1–3]. Аналітичне розв'язання таких задач можливе тільки у виключних випадках. Тому наближені методи їхнього розв'язання представляють значний інтерес.

При перенесенні скінченно-різницевих алгоритмів на рівняння з аргументом, що відхиляється, виникають складності, зумовлені специфікою цих рівнянь. Ефективним алгоритмом розв'язання крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь виявився метод сплайн-колокацій [4–6].

Використання кубічних сплайнів для різних класів інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу розглядалися в працях [7, 8].

Застосування B-сплайнів для лінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь досліджено в [9], в припущенні, що існує єдиний двічі неперервно-диференційовний розв'язок.

У даній роботі досліджуються лінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. Застосування кубічних сплайнів дефекту два дозволило значно розширити клас крайових задач, для яких можна ефективно знайти наближений розв'язок.

2. Позначення та постановка задачі

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\, y'(x - \tau_i(x)) + \tag{1}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} q_i(x)\, y(x - \tau_i(x)) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{1} \int_a^b K_{ij}(x,s)\, y^{(j)}(s - \tau_i(s))\, ds + f(x),$$

$$y^{(j)}(x) = \varphi^{(j)}(x), \quad j = 0, 1, \qquad x \in [a^*; a], \quad y(b) = \beta, \tag{2}$$

де запізнення $\tau_0(x) = 0$, а $\tau_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – задана неперервно-диференційовна функція на $[a^*; a]$, $\beta \in R$,

$$a^* = \max_{0 \le i < n} \left\{ \min_{x \in [a;b]} (x - \tau_i(x)) \right\}.$$

Нехай функції $p_i(x)$, $q_i(x)$, $i = \overline{0,n}$ – неперервні на $[a,b]$, а функції $K_{ij}(x,s)$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,1}$ – неперервні за обома аргументами у квадраті $[a,b] \times [a,b]$.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)$:

$$E_i = \left\{ x_j \in [a,b] : \, x_j - \tau_i(x_j) = 0, \, j = 1, 2, \ldots \right\},$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Нехай запізнення $\tau_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ є такими, що множини E_i, $i=\overline{1,n}$ є скінченними. Точки множини E занумеруємо в порядку їхнього зростання:

$$a < x_1 < \ldots < x_k < b.$$

Введемо позначення: $\delta_1 = [a;x_1], \delta_2 = [x_1;x_2], \ldots, \delta_{k+1} = [x_k;b]$ та визначимо множину функцій

$$V = \Bigg\{ y(x) : y(x) \in \Bigg(C[a^*;b] \cap \left(C^1[a^*;a] \cup C^1[a;b] \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(\delta_j) \right) \Bigg) \Bigg\}.$$

Розв'язком задачі (1)-(2) будемо вважати функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівняння (1) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E) та крайові умови (2).

Існування та єдиність розв'язку крайових задач для диференціальних та інтегродиференціальних рівнянь із запізненням вивчались у роботах [1–3,8]. Будемо припускати, що існує розв'язок задачі (1)-(2), який належить V.

3. Кубічні сплайни дефекту два

Розглянемо нерівномірну сітку $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ на відрізку $[a;b]$, таку що $E \subset \Delta$. Позначимо через $S(y,x)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y(x)$, який належить простору V.

Для зображення сплайна $S(y,x)$ має місце співвідношення [6, 8]:

$$S(y,x) = M_{j-1}^{+} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j^{-} \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}^{+} h_j^2}{6} \right) \times \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j^{-} h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad (3)$$

$$x \in [x_{j-1}; x_j], \; h_j = x_j - x_{j-1}, \; j = \overline{1,n},$$

де $M_j^{+} = S''(y, x_j + 0)$, $j = \overline{0,n-1}$, $M_j^{-} = S''(y, x_j - 0)$, $j = \overline{1,n}$ задовольняють наступну систему рівнянь:

$$h_{j+1} y_{j-1} - (h_j + h_{j+1}) y_j + h_j y_{j+1} = \frac{h_j h_{j+1}}{6} \Big(h_j M_{j-1}^{+} + 2h_j M_j^{-} + 2h_{j+1} M_j^{+} + h_{j+1} M_{j+1}^{-} \Big), \; j = \overline{1,n-1},$$
$$y_0 = \varphi(a), y_n = \beta. \quad (4)$$

Запишемо систему (4) у матричній формі:

$$Ay = BM + d, \quad (5)$$

де $A =$

$$\begin{pmatrix} -(h_1+h_2) & h_1 & \cdots & 0 \\ h_3 & -(h_2+h_3) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(h_{n-1}+h_n) \end{pmatrix}$$

– матриця $(n-1) \times (n-1)$, $d = (-h_2 y_0, \; 0, \; \ldots, \; 0, \; -h_{n-1} y_n)^T$, B – матриця коефіцієнтів правої частини співвідношень (4) розміру $(n-1) \times 2n$,

$$M = \left(M_0^{+}, M_1^{-}, M_1^{+}, M_2^{-}, M_2^{+}, \ldots, M_{n-1}^{-}, M_{n-1}^{+}, M_n^{-} \right)^T.$$

Лема. *Справджуються наступні співвідношення:*

$$1)\det(A) = (-1)^{n-1} h_2 h_3 \ldots h_{n-1} (b-a), \quad (6)$$

$$2)\|A^{-1}\| \le \frac{K^2}{8h^3}(b-a), \quad (7)$$

$$3)\max_{1 \le i < n-2} \sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{i+1,j}^{-1} - a_{i,j}^{-1} \right) \le \frac{K^2(b-a)}{2h^2}, \quad (8)$$

$$4)\|B\| \le H^3, \quad (9)$$

де $h = \min_i h_i$, $H = \max_i h_i$, $K = \frac{H}{h}$ *і* a_{ij}^{-1} *– елементи матриці* A^{-1}*.*

Доведення тверджень леми легко одержати, застосовуючи принцип математичної індукції, враховуючи вигляд матриць A, B.

4. Обчислювальна схема

1. Виберемо кубічний сплайн $S\left(y^{(0)}, x\right) = \frac{\beta - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$, який задовольняє крайові умови (2).

2. Використовуючи вихідне рівняння (1) та сплайн $S\left(y^{(k)},x\right)$, знаходимо для $k=0,1,\ldots$:

$$M_j^{+(k+1)}=$$
$$=\sum_{i=0}^{m}p_i\left(x_j\right)S'\left(y^{(k)},x_j-\tau_i\left(x_j\right)+0\right)+$$
$$+\sum_{i=0}^{m}q_i\left(x_j\right)S\left(y^{(k)},x_j-\tau_i\left(x_j\right)+0\right)+$$
$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{l=0}^{1}\int_a^b K_{il}\left(x_j,s\right)S^{(l)}\Big(y^{(k)},s-$$
$$-\tau_i\left(s\right)\Big)ds+f\left(x_j\right),\ j=\overline{0,n-1},\quad(10)$$

$$M_j^{-(k+1)}=$$
$$=\sum_{i=0}^{m}p_i\left(x_j\right)S'\left(y^{(k)},x_j-\tau_i\left(x_j\right)-0\right)+$$
$$+\sum_{i=0}^{m}q_i\left(x_j\right)S\left(y^{(k)},x_j-\tau_i\left(x_j\right)-0\right)+$$
$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{l=0}^{1}\int_a^b K_{il}\left(x_j,s\right)S^{(l)}\Big(y^{(k)},s-$$
$$-\tau_i\left(s\right)\Big)ds+f\left(x_j\right),\ j=\overline{1,n}.\quad(11)$$

У співвідношеннях (10), (11) підставляємо $S^{(l)}\left(y^{(k)},t\right)=\varphi^{(l)}\left(t\right),\ l=0,1$ при $t<a$.

3. Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,n}$, розв'язуючи систему рівнянь (4).

4. Одержуємо кубічний сплайн $S\left(y^{(k+1)},x\right)$ у формі (3), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,n}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j=\overline{0,n-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j=\overline{1,n}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

5. Збіжність ітераційного процесу

Введемо позначення:

$$\lambda_1=\sum_{i=0}^{n}\max_{x\in[a;b]}|q_i\left(x\right)|+$$
$$+\left(b-a\right)\sum_{i=0}^{n}\max_{x\in[a;b]}\int_a^b|K_{i0}\left(x,s\right)|ds,$$
$$\lambda_2=\sum_{i=0}^{n}\max_{x\in[a;b]}|p_i\left(x\right)|+$$
$$+\left(b-a\right)\sum_{i=0}^{n}\max_{x\in[a;b]}\int_a^b|K_{il}\left(x,s\right)|ds,$$
$$u=\frac{K^5}{8}(b-a)^2+\frac{H^2}{8},$$
$$v=\frac{K^5}{2}\left(b-a\right)+\frac{2H}{3},$$
$$\mu=5\left(l+\left(\frac{1}{2}\lambda_1+\lambda_2\right)H\right).$$

Теорема. *Нехай розв'язок крайової задачі (1)-(2) існує та належить простору V. Тоді при виконанні нерівності*

$$\Lambda=u\lambda_1+v\lambda_2<1\qquad(12)$$

існує H^*, що при всіх $0<H<H^*$ послідовність сплайнів $\left\{S\left(y^{(k)},x\right)\right\}$, $k=0,1,\ldots$ рівномірно збігається на $[a;b]$ і справджуються співвідношення

$$\left\|\lim_{k\to\infty}S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\|\leq$$
$$\leq R_p\omega\left(y''\left(x\right),H\right),\ p=0,1,\qquad(13)$$

де $y\left(x\right)$ – розв'язок задачі (1)-(2),

$$R_0=\frac{\mu u}{l-\Lambda}+\frac{5H^2}{2},$$
$$R_1=\frac{\mu v}{l-\Lambda}+5H,$$
$$\omega\left(y''\left(x\right),H\right)=\max_{1\leq r\leq l}\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right),$$

$\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right)$ *– модуль неперервності $y''\left(x\right)$ на δ_r.* **Доведення.** Згідно леми, побудова ітераційної послідовності кубічних сплайнів $S\left(y^{(k)},x\right)$, k=$0,1,\ldots$ можлива. Покажемо, що ряди $S^{(p)}\left(y^{(0)},x\right)+\left(S^{(p)}\left(y^{(1)},x\right)-S^{(p)}\left(y^{(0)},x\right)\right)+\ldots+\left(S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)-S^{(p)}\left(y^{(k-1)},x\right)\right)+\ldots,\ p=0,1$

рівномірно збігаються на $[a;b]$ і тим самим одержимо рівномірну збіжність послідовностей $S\left(y^{(k)},x\right)$, $S'\left(y^{(k)},x\right)$, $k=0,1,\ldots$.

Ітераційний алгоритм A)-D) представимо у матричній формі:

$$y^{(k+1)} = A^{-1}BM^{k+1} + A^{-1}d. \tag{14}$$

Враховуючи лему та співвідношення (10)-(11), дістаємо

$$\left\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\right\| \le$$
$$\le \frac{K^5}{8}(b-a)\left[\lambda_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right) - S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\| + \right.$$
$$\left.+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right].$$

Використовуючи зображення сплайна (3), аналогічно як у [8], одержуємо при $x \in [x_{j-1};x_j]$:

$$\left\|S\left(y^{(k+1)},x\right) - S\left(y^{(k)},x\right)\right\| \le$$
$$\le \frac{H^2}{8}\left\|\overline{M}^{k+1} - \overline{M}^{k}\right\| + \left\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\right\| \le$$
$$\le \left(\frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8}\right)\times$$
$$\times\left(\lambda_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right) - S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\| + \right.$$
$$\left.+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right), \tag{15}$$
$$\left\|S'\left(y^{(k+1)},x\right) - S'\left(y^{(k)},x\right)\right\| \le$$
$$\le \left(\frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2}{3}H\right)\times$$
$$\times\left(\lambda_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right) - S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\| + \right.$$
$$\left.+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right). \tag{16}$$

Ітеруючи нерівності (15)-(16), маємо

$$\left\|S\left(y^{(k+1)},x\right) - S\left(y^{(k)},x\right)\right\| \le u\Lambda^{k-1}\alpha_0, \tag{17}$$
$$\left\|S'\left(y^{(k+1)},x\right) - S'\left(y^{(k)},x\right)\right\| \le v\Lambda^{k-1}\alpha_0,$$

де $\alpha_0 = \lambda_1\left\|S\left(y^{(1)},x\right) - S\left(y^{(0)},x\right)\right\| + \lambda_2\left\|S'\left(y^{(1)},x\right) - S'\left(y^{(0)},x\right)\right\|$.

Співвідношення (17) при виконанні умови (12) забезпечують збіжність послідовності сплайнів $S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)$, $k=0,1,\ldots$, $p=0,1$. Позначимо

$$\lim_{k\to\infty} S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right) = S^{(p)}\left(\overline{y},x\right),\ p=0,1.$$

У праці [8, теорема 3] показано, що в цьому випадку мають місце співвідношення (13). Отже, теорему доведено.

6. Числові екперименти

Розглянемо застосування ітераційної схеми A)-D) для знаходження наближеного розв'язку крайової задачі

$$y''(x) = \frac{1}{8}y'(x-\pi) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} y(t-\pi)\,dt + cosx,$$
$$0 \le x \le \pi,$$
$$y(x) = sinx - 1,\ -\pi \le x \le 0,$$
$$y(0) = -1,\ y(\pi) = \frac{5}{4}.$$

Для цього прикладу маємо: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{8}$, $h = H = \frac{\pi}{40}$, $K = 1$, $u = \frac{\pi^2+H^2}{8}$, $v = \frac{\pi}{2} + \frac{2H}{3}$, $\Lambda = \frac{\pi^2+H^2}{16} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2H}{3}\right)\frac{1}{8} \approx 0,8194 < 1$. Отже, умова (12) теореми справджується. Точний розв'язок крайової задачі, знайденим методом кроків, має вигляд

$$y_m(x) = -\frac{9}{8}cosx + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left(\pi x - x^2\right) + \frac{1}{8}.$$

Результати обчислень наведено в таблиці 1, де y_m – точний розв'язок, z – наближений розв'язок, знайдений при $h = \frac{\pi}{40}$ на 2-й ітерації, Δ – абсолютна похибка.

Табл. 1:

x	$y_m(x)$	$z(x)$	Δ
0	-1	-1	0
$\frac{\pi}{4}$	1.7082	1.7480	0.0398
$\frac{\pi}{2}$	3.2966	3.2806	0.0160
$\frac{3\pi}{4}$	3.2992	3.2354	0.0638
π	1.25	1.25	0

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Grim L.J., Schmitt K.* Boundary Value Problems for Delay Differential Equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, N5. – P. 997-1000.

2. *Каменский Т.А., Мышкис А.Д.* Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1972. – **8**, N12. – С. 2171-2179.

3. *Athanassiadou E.S.* On the Existence and Uniqueness of Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Functional Differential Equations // Mathematica Moravica. – 2013. – **17**, N1. – P. 51-57.

4. *Мирошниченко В.Л.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом методом сплайн-функций // Изв. АН. КазССР. Сер. физ.-мат. – 1972. – **5**. – С. 46-50.

5. *Burkowski F.J., Cowan D.D.* The Numerical Derivation of a Periodic Solution of a Second Order Differential-Difference Equation // SIAM J. Numer. Anal. – 1973. – **10**, N3. – P. 489-495.

6. *Nikolova T.S., Bainov D.D.* Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations // Yokohama Math. J. – 1981. – **29**, N1. – P. 108–122.

7. *Настасьєва Н.П., Черевко І.М.* Кубічні сплайни дефекту 2 та їх застосування до крайових задач // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 1999. – **1**. – С. 69-73.

8. *Cherevko I., Dorosh A.* Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations // J. Numer. Anal. Approx. Theory. – 2016. – **44**, N2. – P. 154-165.

9. *Черевко И.М., Якимов И.В.* Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, N6. – С. 854-860.