

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ КЛАСУ H_ω ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ З ПАРНОЮ КІЛЬКІСТЮ ВУЗЛІВ НА ПЕРІОДІ

Отримано асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень тригонометричних поліномів $\tilde{S}_n^*(f, x)$, які інтерполюють функцію в $2n$ точках на періоді, на класах H_ω .

We obtained asymptotic equalities for the upper bounds of deviations of trigonometric polynomials $\tilde{S}_n^*(f, x)$, that interpolate the function in $2n$ points on a period, on the classes H_ω .

В даній роботі розглядатимемо тригонометричні інтерполяційні поліноми n -го порядку

$$\tilde{S}_n^*(f, x) = n^{-1} \cdot \sum_{k=-n}^{n-1} f(x_k^{(n)}) \cdot D_n^*(x - x_k^{(n)}),$$

які співпадають з функцією $f(x) \in C_{2\pi}$ у вузлах $x_k^{(n)} = kh, h = \frac{\pi}{n}, k = 0, \pm 1, \dots$, де

$$D_n^*(t) = D_n(t) - \frac{\cos nt}{2} = \left(\sin nt \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right) / 2$$

– модифіковане ядро Діріхле порядку n .

Цікавим є вивчення асимптотичної поведінки величини

$$\varepsilon_n^*(H_\omega, x) = \sup_{f \in H_\omega} |f(x) - \tilde{S}_n^*(f, x)|$$

при $n \rightarrow \infty$, де H_ω – клас функцій $f(\cdot) \in C_{2\pi}$, що задовольняють умову $|f(x') - f(x'')| \leq \omega(|x' - x''|)$ (див. [1, с.119]). Для класів W_β^2 ця задача була розв’язана в [2]. Аналогічні оцінки для поліномів $\tilde{S}_n^*(f)$ з ядром $D_n(t)$ були отримані С. М. Нікольським в [3] і уточнені М. П. Корнійчуком в [4].

Теорема. *Має місце рівність*

$$\varepsilon_n^*(H_\omega, x) = \frac{|\sin nx| \cdot \ln n}{\pi} \cdot \omega(n^{-1}) + C(\omega, u) \frac{\omega(\pi/u)}{\pi} + O(n^{-1} \cdot \omega(n^{-1})) \quad (1)$$

при $n \rightarrow \infty$, де

$$C(\omega; u) = |\sin \pi u| \left(\frac{\omega(1-u)}{u} + \frac{\omega(u)}{u} \right) +$$

$$+ \int_0^1 \frac{t^u}{1+t} dt \quad (2)$$

і $u = x/h$.

Доведення. Оскільки величина ε_n^* лінійна і π/n -періодична, маємо $\varepsilon_n^*(H_\omega, x) = \varepsilon_n^*(H_\omega^x, x)$, де H_ω^x – клас функцій $f \in H_\omega$, таких що $f(x) = 0$. І тому наша задача зветься до оцінки величини

$$\varepsilon_n^*(H_\omega^x, x) = \sup_{f \in H_\omega^x} n^{-1} \left| \sum_{k=-n}^{n-1} f(x_k^{(n)}) \cdot D_n^*(x - x_k^{(n)}) \right|$$

при $x \in [0, h]$.

Покладемо

$$\sigma_k = \sum_{i=k}^{n-1} D_n^*(x - x_i^{(n)}), k = \overline{1, n-1},$$

$$\sigma_k = \sum_{i=-n}^{-k} D_n^*(x - x_i^{(n)}), k = \overline{0, n}.$$

При цьому

$$\operatorname{sign} \sigma_k = \begin{cases} (-1)^{k+1}, & k = \overline{1, n-1}, \\ (-1)^k, & k = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (3)$$

Використавши перетворення Абеля і враховуючи (3), для будь-якої $f \in H_\omega^x$ маємо

$$\sum_{k=-n}^{n-1} f(x_k^{(n)}) \cdot D_n^*(x - x_k^{(n)}) = f(x_0^{(n)}) \cdot D_n^*(x) + f(x_1^{(n)}) \cdot (\sigma_1 + \sigma_{-1}) + (f(x_{-1}^{(n)}) - f(x_1^{(n)})) \sigma_{-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=2}^{n-1} (f(x_k^{(n)}) - f(x_{k-1}^{(n)})) \cdot \sigma_k + \\
& + \sum_{k=-n}^{-2} (f(x_k^{(n)}) - f(x_{k+1}^{(n)})) \cdot \sigma_k.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^*(H_\omega^x, x) & \leq n^{-1} \left(\omega(x) \cdot D_n^*(x) + \right. \\
& + \omega(h-x)\sigma_1 + (\omega(h-x) - \omega(2h))\sigma_{-1} + \\
& \left. + \omega(h) \cdot \left\{ \sum_{k=-n}^{-2} |\sigma_k| + \sum_{k=2}^{n-1} |\sigma_k| \right\} \right).
\end{aligned}$$

Позначивши $\rho = \omega(2h) - \omega(h-x)$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^*(H_\omega^x, x) & \leq n^{-1} \left(\omega(x) \cdot D_n^*(x) - \rho\sigma_{-1} + \right. \\
& \left. + \omega(h-x)\sigma_1 + \omega(h) \left\{ \sum_{k=-n}^{-2} |\sigma_k| + \sum_{k=2}^{n-1} |\sigma_k| \right\} \right). \quad (4)
\end{aligned}$$

Для оцінки знизу побудуємо функцію, яка перетворює знак нерівності в (4) в знак рівності. А саме нехай $F(t)$ – неперервна, 2π -періодична функція, задана на періоді наступним чином: $F(x) = 0$,

$$F(x_k^{(n)}) = \begin{cases} \omega(x), k = 0, \\ -\rho, k = -(2i-1), (i = 1, 2, \dots, [\frac{n+1}{2}]); \\ -\rho + \omega(h), k = -2i, (i = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]); \\ \omega(h-x), k = 2i-1, (i = 1, 2, \dots, [\frac{n-1}{2}]); \\ \omega(h-x) - \omega(h), k = 2i, (i = 1, 2, \dots, [\frac{n-1}{2}]). \end{cases}$$

На кожному відрізку $(x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})$,

$$k = \overline{-n, n-2}, (x_0^{(n)}, x), (x, x_1^{(n)}), (x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)})$$

будемо вважати $F(t)$ лінійною. Легко переконатися, що $F(t) \in H_\omega^x$. Відмітимо також, що

$$F(x_k^{(n)}) - F(x_{k+1}^{(n)}) = (-1)^k \cdot \omega(h), k = \overline{-n, -2}$$

$$F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)}) = (-1)^{k+1} \cdot \omega(h), k = \overline{2, n-1}.$$

Враховуючи (2) знайдемо

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-n}^{n-1} f(x_k^{(n)}) \cdot D_n^*(x - x_k^{(n)}) = \\
& = \omega(x) \cdot D_n^*(x) - \rho\sigma_{-1} + \omega(h-x)\sigma_1 + \\
& + \omega(h) \left\{ \sum_{k=2}^{n-1} |\sigma_k| + \sum_{k=-n}^{-2} |\sigma_k| \right\} + O(\omega(n^{-1})).
\end{aligned}$$

Тому отримаємо

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^*(H_\omega^x, x) & = n^{-1} \cdot \sum_{k=-n}^{n-1} F(x_k^{(n)}) \cdot D_n^*(x - x_k^{(n)}) + \\
& + O(n^{-1} \cdot \omega(n^{-1})).
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^{n-1} |\sigma_k| + \sum_{k=-n}^{-2} |\sigma_k| = \sum_{k=-n}^{n-1} D_n^*(x - x_k^{(n)}) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n-1} |D_n^*(x - x_k^{(n)})| - \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n-1} D_n^*(x - x_k^{(n)}),
\end{aligned}$$

то за допомогою нескладних перетворень перейдемо до рівності

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^*(H_\omega^x, x) & = n^{-1} (\omega(h-x) + \omega(x)) D_n^*(x) + \\
& + \frac{\omega(h)}{2n} \sum_{k=-n}^{n-1} |D_n^*(x - x_k)| - \\
& - n^{-1} (2\omega(h-x) - \omega(h)) \sum_{k=-n}^{n-1} D_n^*(x - x_k) + \\
& + \frac{\omega(2h)}{n} \sum_{k=-n}^{-1} D_n^*(x - x_k). \quad (5)
\end{aligned}$$

Оскільки при $t \in [-\pi, \pi]$

$$\sin nt \cdot \operatorname{ctg}(t/2) - (\sin nt)/t = O(1)$$

і $x_k^{(n)} = x_{-k}^{(n)}$, то

$$\begin{aligned}
& n^{-1} \sum_{k=-n}^{-1} D_n^*(x - x_k^{(n)}) = \\
& = n^{-1} \sum_{k=-n}^{-1} \frac{(-1)^k \cdot \sin nx}{x - x_k^{(n)}} + O(n^{-1}) =
\end{aligned}$$

$$= -(2\pi)^{-1} \cdot \sin nx \cdot \int_0^1 t^{x/h} (1+t)^{-1} dt + O(n^{-1})$$

(6)

(при отриманні (6) ми враховували, що $(k+z)^{-1} = \int_0^1 t^{k+z-1} dt$).

Такими ж міркуваннями отримуємо

$$n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} |D_n^*(x - x_k^{(n)})| = 2\pi^{-1} \cdot \ln n \cdot |\sin nx| + O(n^{-1}), \quad (7)$$

$$n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} D_n^*(x - x_k^{(n)}) = O(n^{-1}) - \pi^{-1} \cdot \sin nx \int_0^1 \frac{t^{x/h}}{1+t} dt, \quad (8)$$

$$n^{-1} D_n^* = (nx)^{-1} \cdot \sin nx + O(n^{-1}). \quad (9)$$

Враховуючи оцінки (6)–(9) при $0 \leq x \leq h$, матимемо, що

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^*(H_\omega, x) &= \pi^{-1} \cdot \omega(h) \cdot \ln n \cdot |\sin nx| + \\ &+ \sin nx \frac{\omega(h-x) + \omega(h)}{nx} + \sin nx \cdot \frac{\omega(2h)}{\pi} \times \\ &\times \int_0^1 t^{x/h} \cdot (1+t)^{-1} dt + O(n^{-1} \cdot \omega(n^{-1})). \end{aligned}$$

Враховуючі, далі, що $h = \frac{\pi}{n}$ і позначивши $u = \frac{x}{h}$, отримуємо

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^*(H_\omega, x) &= \ln n |\sin nx| \omega(n^{-1}) + \\ &+ \frac{\omega(\pi/n)}{\pi} \cdot C(\omega, u) + O\left(\frac{\omega(n^{-1})}{n}\right), \end{aligned}$$

де $C(\omega; u)$ задано співвідношенням (2). Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Степанец А.И. Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
2. Кушпель А. К. Об одном методе приближения периодических функций // Укр. матем. журн. – 1984. – 36, №6. С.774–776.
3. Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами

// Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР – 1945. – 15. – С.1–75.

4. Корнейчук Н. П. Об асимптотической оценке при приближении периодических функций, удовлетворяющих условий Липшица, интерполяционными многочленами с равноотстоящими узлами // Укр. матем. журн. – 1961. – 13, №1. С.100–106.