УДК 517.55

©2017 р. А.О. Куриляк, О.Б. Скасків, Н.Ю. Стасів

Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З ВИПАДКОВИМИ ПОКАЗНИКАМИ ТА КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджується розподіл абсцис збіжності випадкових рядів Діріхле з попарно незалежними і неоднаково розподіленими випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами.
Ключові слова: випадковий ряд Діріхле, абсциса збіжності, незалежні випадкові величини

Distribution of the abscissas of convergence for a random Dirichlet series with pairwise independent and non-identically distributed random exponents and random coefficients is considered.
Key words: random Dirichlet series, abscissa of convergence, independent random variables

1. Вступ. Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір, а $\Lambda = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$, відповідно, послідовності невід'ємних та комплекснозначних випадкових величин на ньому. Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z,\omega) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)}$$

$(z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega)$, що при фіксованому $\omega = \omega_0$ є звичайним (детермінованим) рядом Діріхле; $\mathcal{D} = \bigcup_\Lambda \mathcal{D}(\Lambda)$. Через $\sigma_{зб}(F,\omega)$ і $\sigma(F,\omega)$ позначимо відповідно абсциси збіжності і абсолютної збіжності цього ряду при фіксованому $\omega \in \Omega$.

Нехай $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ позначає числову послідовність таку, що $0 \le \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty)$, а $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ – підклас рядів з класу $\mathcal{D}$ з фіксованою послідовністю показників Λ_+.

У статті [1] (також див. [2]) доведене таке елементарне твердження. У випадку рядів Діріхле з монотонно зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників Λ_+ це твердження див. в $[3, 4]$.

Твердження 1. *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Тоді*

$$\sigma_{зб}(F,\omega) \le \alpha_0(\omega) \stackrel{def}{=} \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}$$

для всіх $\omega \in \Omega$, а для довільних функцій $\gamma, \delta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ і всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) \ge 0$ і

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty \qquad (1)$$

виконуються нерівності

$$\sigma(F,\omega) \ge \gamma(\omega)\alpha_0(\omega) - \delta(\omega) \ge \\ \ge \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega). \qquad (2)$$

Зауважимо, що з умови (1) випливає, що для такого ω виконується

$$(\gamma(\omega) - 1)\ln|f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega) \to +\infty$$

$(k \to +\infty)$, але при цьому, взагалі кажучи, нема жодних окремих умов на послідовності $\mathbf{f}$ та Λ.

Вибираючи $\delta = (\gamma - 1)\alpha_0$, Твердження 1 переписуємо у такому вигляді

Наслідок 3. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і $\omega \in \Omega$ таке, що для деякого $\gamma(\omega) \ge 0$*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(|f_k(\omega)| e^{\alpha_0(\omega)\lambda_k(\omega)}\Big)^{1-\gamma(\omega)} < +\infty. \qquad (3)$$

Тоді

$$\sigma_a(F,\omega) = \sigma_{зб}(F,\omega) = \alpha_0(\omega). \qquad (4)$$

Вибираючи $\delta = 0,\ \gamma = 1 - \gamma_1$, Твердження 1 переписуємо у такому вигляді

Наслідок 4. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і $\omega \in \Omega$ таке, що для деякого $\gamma_1(\omega) \le 1$*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{\gamma_1(\omega)} < +\infty. \qquad (5)$$

Тоді

$$\sigma(F,\omega) \geq (1-\gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) \geq \\ \geq (1-\gamma_1(\omega))\sigma_{зб}(F,\omega). \qquad (6)$$

Вибираючи $\gamma = 1$, Твердження 1 переписуємо у такому вигляді

Наслідок 5. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і $\omega \in \Omega$ таке, що для деякого $\delta(\omega) > 0$*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty. \qquad (7)$$

Тоді

$$\sigma(F,\omega) \geq \alpha_0(\omega) - \delta(\omega) \geq \sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega). \qquad (8)$$

З наслідку 5 елементарно отримуємо таке твердження.

Наслідок 6. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і $\omega \in \Omega$ таке, що $\tau(\Lambda,\omega) < +\infty$. Тоді*

$$\sigma(F,\omega) \geq \alpha_0(\omega) - \tau(\Lambda,\omega) \geq \\ \geq \sigma_{зб}(F,\omega) - \tau(\Lambda,\omega). \qquad (9)$$

Справді, Виберемо $\delta(\omega) = \tau(\Lambda,\omega) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. За означенням верхньої границі $\ln k < (\tau(\Lambda,\omega) + \varepsilon/2)\lambda_k(\omega)$ $(k \geq k_0(\omega)$, тому

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} <$$

$$< \sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\{-\frac{\tau(\Lambda,\omega)+\varepsilon}{\tau(\Lambda,\omega)+\varepsilon/2}\ln k\} < +\infty.$$

Отже, умова (7) виконується і з наслідку 5 маємо $\sigma(F,\omega) \geq \alpha_0(\omega) - \delta(\omega) \geq \sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega)$ з $\delta(\omega) = \tau(\Lambda,\omega) + \varepsilon$. Залишається перейти до границі $\varepsilon \to +0$.

Позначимо тепер

$$h_2(\omega) = \underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{-\ln|f_k(\omega)|},$$
$$h_0(\omega) = \overline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{-\ln|f_k(\omega)|}.$$

З наслідку 4 отримуємо таке твердження.

Наслідок 7. *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо $\omega \in \Omega$ таке, що $h_2(\omega) > -\infty$, то нерівності* (6) *виконуються з $\gamma_1 = h_2$, якщо $h_0(\omega) < 1$, то нерівності* (6) *виконуються з $\gamma_1 = h_0$.*

З наслідків 6 і 7 негайно отримуємо таке твердження (у цьому зв'язку див. також [5]–[7]).

Твердження 2. *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо $\omega \in \Omega$ таке, що $\tau(\Lambda,\omega) \stackrel{def}{=} \overline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0$ або*

$$\ln k = o(\ln|f_k(\omega)|) \quad (k \to +\infty), \qquad (10)$$

то виконуються рівності (4).

У випадку $\tau(\Lambda,\omega) = 0$ – це, власне, так звана теорема Ж.Валірона.

Зауваження 1. Із закону нуля і одиниці А.Н. Колмогорова випливає, що якщо $\left(\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}\right)$ – послідовність незалежних випадкових величин, то випадкова величина $\alpha_0(\omega)$ є майже напевне (м.н) сталою, тобто, $\alpha_0(\omega) = \sigma \in [-\infty,+\infty]$ м.н. Звідси, за Твердженням 2, у випадку, коли $\tau(\Lambda,\omega) = 0$ або $\ln n = o(\ln|f_n(\omega)|)$ $(n \to +\infty)$, маємо, що випадкова величина $\sigma(f,\omega)$ також є майже напевне (м.н) сталою і $\sigma(f,\omega) = \sigma \in [-\infty,+\infty]$ м.н. Власне, звідси те ж саме твердження випливає у випадку детермінованої послідовності Λ, коли $(|f_k(\omega)|)$ є послідовністю незалежних випадкових величин. У книзі [8] останнє написано у випадку монотонно зростаючої до нескінченності послідовності Λ_+, коли $(f_k(\omega))$ є послідовністю незалежних випадкових величин.

У цілому ряді статей [9]– [15] розглядалось питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}$ у випадку, коли послідовність $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ є зростаючою детермінованою послідовністю додатних чисел $\lambda_k(\omega) \equiv \lambda_k$ і $\tau(\Lambda) \stackrel{def}{=} \tau(\omega,\Lambda) \equiv const < +\infty$, а коефіцієнти ряду Діріхле мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Так, у статті [9] наведено таке елементарне твердження.

Твердження 3 ([9]). *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ і має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$.*
1^0. *Якщо виконуються умови $\tau(\Lambda_+) = 0$ і*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k} = 0 \ \text{ м.н.}, \qquad (11)$$

то м.н.

$$\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma(F,\omega) = \alpha_0 \stackrel{def}{=} \underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k}.$$

2^0. *У випадку* $\alpha_0 = +\infty$ *для рівності* $\sigma(F,\omega) = +\infty$ *м.н. достатньо, щоб замість умови* $\tau(\Lambda) = 0$ *виконувалось* $\tau(\Lambda) < +\infty$, *а замість умови* (3), *щоб*

$$\varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k} > -\infty \quad \text{м.н.} \qquad (12)$$

З Твердження 3, зокрема випливають теореми 1 (при $\alpha_0 = +\infty$) і 3 (при $\alpha_0 = 0$) з [11], які доведені за такої умови на математичні сподівання ($\exists\beta > 0$):

$$\sup\{\mathbf{E}|Z_k|^{\beta}, \mathbf{E}|Z_k|^{-\beta}\colon\ k \ge 0\} < +\infty.$$

Умову (3) можна ([2,9]) замінити такою достатньою умовою на послідовність функцій розподілу $F_k^*(x) \stackrel{def}{=} P\{\omega\colon |Z_k(\omega)| < x\}$ випадкових величин ($|Z_k(\omega)|$)

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \big(1 - F_k^*((1+\varepsilon)^{\lambda_k}) + F_k^*((1-\varepsilon)^{\lambda_k})\big) < +\infty$$

($\forall\varepsilon \in (0,1)$). З останньої умови, зокрема випливає, що $\lim_{k\to+\infty} F_k^*(+0) = 0$.

Крім цього, в [9] доведено такі теореми.

Теорема 1 ([9]). *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$. *Припустимо, що* $\big(|f_k(\omega)|\big)$ *— послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $F_k(x) \stackrel{def}{=} P\{\ \omega : |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \ge 0$. *Виконуються наступні твердження:*
a) $\sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \ge \rho \in (-\infty,+\infty)$ *м.н.* $\Longrightarrow$ $(\forall\varepsilon > 0)\colon\ \sum_{k=2}^{+\infty}(1 - F_k((e^{-\rho}+\varepsilon)^{\lambda_k})) < \infty$;
b) *Якщо існує послідовність* (δ_k) *така, що* $\delta_k > -\infty$ $(k \ge 0)$, $\varliminf_{k\to+\infty} \delta_k = e^{-\rho}$, $\rho \in (-\infty,+\infty]$, *і* $\sum_{k=2}^{+\infty}(1 - F_k(\delta_k^{\lambda_k})) = +\infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \le \rho$ *м.н.*

Теорема 2 ([9]). *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$.
a) *Якщо існують* $\rho \in (-\infty,+\infty)$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і* $\sum_{k=2}^{+\infty}(1-F_k((e^{-\rho}+\varepsilon_k)^{\lambda_k})) < \infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \ge \rho$ *м.н.*
b) $\sigma(F,\omega) = -\infty$ *м.н.* $\Longrightarrow$ $(\forall E > 1)\colon$ $\sum_{k=2}^{+\infty}(1 - F_k(E^{\lambda_k})) = +\infty$.

Виявляється, що у випадку рядів з класу $\mathcal{D}$ з випадковими показниками і випадковими коефіцієнтами можна довести подібні твердження. Власне, це і є метою даної статті

Зазначимо, що дана стаття є продовженням виконаних недавно досліджень про радіуси збіжності випадкових лакунарних степеневих рядів ([16]) та абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами ([9]), а з отриманих там тверджень у вигляді простих наслідків випливають, наприклад, основні результати статей [17]– [19].

Варто відзначити також, що у статті [20] ймовірнісні методи застосовані для доведення ряду теорем про поводження рядів Діріхле з незалежними показниками. Отримані результати застосовано у теорії $\zeta-$функції і при дослідженні поведінки розв'язків хвильового рівняння при $t \to \infty$. У статті [21] досліджуються степеневі ряди вигляду $\sum_{k=0}^{+\infty} z^{X_k(\omega)}$, де $(X_k(\omega))$ – строго зростаючий цілочисельний стохастичний процес.

2. Деякі приклади. Розглянемо формальний випадковий ряд Діріхле

$$F_0(z,\omega) = \sum_{k=2}^{+\infty} g_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)},$$
$$\lambda_k(\omega) = \ln(k + r_k(\omega)),\ \ g_k(\omega) = (-1)^k e^{a\lambda_k(\omega)},$$

де $a \in \mathbb{R}, a \notin (-1;0]$, $(r_k(\omega))$ — послідовність Радемахера. Для цього ряду

$$\alpha_0(\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln g_k(\omega)}{\lambda_k(\omega)} =$$
$$= \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|(-1)^k e^{a\lambda_k(\omega)}|}{\lambda_k(\omega)} = -a,$$

$$F_0(z,\omega) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k e^{a\lambda_k(\omega)+z\lambda_k(\omega)} =$$
$$= \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (k + r_k(\omega))^{z+a},$$
$$\sigma_{\text{зб}}(F_0,\omega) = -a,\ \ \sigma_{\text{а}}(F_0,\omega) = -a-1.$$

Виберемо $\gamma_1(\omega) = -\frac{1}{a} - \varepsilon$, де ε — довільне

число таке, що $\gamma_1(\omega) \le 1$ і $a\varepsilon > 0$. Тоді

$$\sum_{k=2}^{+\infty} |g_k(\omega)|^{\gamma_1(\omega)} = \sum_{k=2}^{+\infty} (k + r_k(\omega))^{a(-\frac{1}{a}-\varepsilon)} =$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} (k + r_k(\omega))^{-1-a\varepsilon} < +\infty,$$

$$\sigma_{\text{a}}(F_0,\omega) - (1-\gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) =$$
$$= \sigma_{\text{a}}(F_0,\omega) - (1-\gamma_1(\omega))\sigma_{\text{зб}}(F_0,\omega) =$$
$$= -a - 1 - \Big(1 + \frac{1}{a} + \varepsilon\Big)(-a) = \varepsilon a \ge 0.$$

З довільності ε, а отже й $a\varepsilon$, отримуємо, що нерівність (6) є точною.

Вибравши $\gamma_1(\omega) = -\frac{1}{a} + \varepsilon$, де ε — довільне число таке, що $\gamma_1(\omega) \le 1$ і $a\varepsilon > 0$, отримаємо, що, взагалі кажучи, умову (5) послабити не можна.

Тепер стосовно наслідку 5. Виберемо $\delta(\omega) = 1 + \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 > 0$. Тоді

$$\sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} = \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-(1+\varepsilon_0)\ln(k+r_k(\omega))} =$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k + r_k(\omega))^{1+\varepsilon_0}} < +\infty,$$

$$\sigma_{\text{a}}(F_0,\omega) - \sigma_{\text{зб}}(F_0,\omega) + \delta(\omega) =$$
$$= -a - 1 + a + 1 + \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

З довільності ε_0 випливає точність нерівності (8). Вибираючи $\delta(\omega) = 1 - \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 \in (0;1)$, отримаємо, що, взагалі кажучи, умову (7) послабити не можна.

Нескладно переконатись, що у наслідку 5: $\gamma_1(\omega) = h_0(\omega) = h_2(\omega) = -\frac{1}{a}$ і, отже,

$$\sigma(F_0,\omega) = (1-\gamma_1(\omega))\sigma_{\text{зб}}(F_0,\omega),$$

тобто, нерівність (6) є точною.

3. Ряди з випадковими показниками і коефіцієнтами. У цьому пункті розглянемо ряди Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами. Власне, розглянемо випадок

$$f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)\ (k \ge 0).$$

Твердження 4. Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо виконується умова (3) *і*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\ln|a_k|} = 0,\ \overline{\lim_{k\to\infty}} \Big|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\Big| \le \delta(\omega) < 1$$

м.н., то м.н.

$$\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) = \sigma(F,\omega) =$$
$$= \alpha_0^*(\omega) := \underline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)}. \qquad (13)$$

Доведення Твердження 4. Зауважимо спочатку, що

$$0 \le \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln k}{|\ln|f_k(\omega)||} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{|\ln|a_k||} \times$$
$$\times \Big(\underline{\lim_{k\to+\infty}} \Big|1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\Big|\Big)^{-1} \le$$
$$\le \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{|\ln|a_k||} \times$$
$$\times \Big(1 - \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{|\ln|Z_k(\omega)||}{|\ln|a_k||}\Big)^{-1} \le$$
$$\le \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{|\ln|a_k||} \cdot \big(1 - \delta(\omega)\big)^{-1} = 0,$$

звідки $\ln k = o(\ln|f_k(\omega)|)$ $(k \to +\infty)$ м.н. Далі, за умовою (3) м.н.

$$\alpha_0(\omega) = \underline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{-\ln|a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} =$$
$$= \underline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} + \lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} =$$
$$= \underline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} = \alpha_0^*(\omega).$$

Тому, за Твердженням 2 отримуємо, що $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) = \sigma_a(F,\omega) = \alpha_0(\omega) = \alpha_0^*(\omega)$ м.н.

Нескладно доводимо також таке твердження.

Твердження 5. Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо виконуються умови $\lim\limits_{k\to\infty} \ln k/\ln|a_k| = 0$, $\alpha_0^*(\omega) > 0$ м.н.,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|} = \delta_1(\omega) < +\infty \quad \textit{м.н.},$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \Big|1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\Big| \ne 0 \quad \textit{м.н.},$$

то м.н.

$$\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) = \sigma(F,\omega) \le (1 + \delta_1(\omega))\alpha_0^*(\omega).$$

Доведення Твердження 5. Зауважимо, що

$$\frac{\ln k}{\big|\ln|f_k(\omega)|\big|} = \frac{\ln k}{\big|\ln|a_k|\big|}\left|1+\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right|^{-1},$$

звідси $\ln k = o(\ln|f_k(\omega)|)$ $(k \to +\infty)$ м.н. Далі, з умови $\alpha_0^*(\omega) > 0$ м.н. випливає, що для всіх досить великих $k \geq k_0(\omega)$ м.н $-\ln|a_k|/\lambda_k(\omega) > 0$. Оскільки для всіх досить великих $k \geq k_1(\omega)$ м.н $\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|} < \delta_1 + \varepsilon_k(\omega)$, де $\varepsilon_k(\omega) \to 0$ $(k \to +\infty)$, то м.н. для всіх досить великих $k \geq k_2(\omega) := \max\{k_0(\omega), k_1(\omega)\}$

$$\frac{-\ln|a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)}\left(1+\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) <$$
$$< (1+\delta_1+\varepsilon_k(\omega))\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)},$$

де $\delta_1 = \delta_1(\omega)$. Тому,

$$\alpha_0(\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \leq$$
$$\leq \varliminf_{k\to+\infty} (1+\delta_1+\varepsilon_k(\omega))\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} =$$
$$= (1+\delta_1)\varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} = (1+\delta_1)\alpha_0^*(\omega).$$

Звідси, знову за Твердженням 2, отримуємо, що м.н.
$\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma_a(F,\omega) = \alpha_0(\omega) \leq (1+\delta_1)\alpha_0^*(\omega)$.

Твердження 4 дає змогу довести такі теореми 3 і 4.

Теорема 3. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ і виконуються умови Твердження 4. Припустимо, що $\big(\lambda_k(\omega)\big)$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x) \stackrel{def}{=} P\{\ \omega : \lambda_k(\omega) < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \geq 0$. Виконуються наступні твердження:*

a) *i) $\sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \geq \rho \in (0,+\infty)$ м.н. $\Longrightarrow$ $(\forall \varepsilon \in (0,\rho))$: $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1-F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon})\big) < \infty$;*

ii) $0 \geq \sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \geq \rho \in (-\infty,0]$ м.н. $\Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0)$: $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon}) < \infty$;

b) *i) Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k \in (-\infty,0)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = -\rho$, $\rho \in (0,+\infty]$, і $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1-F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})\big) = +\infty$, то $\sigma(F,\omega) \leq \rho$ м.н.*

ii) Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k \in (0,+\infty)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = \rho$, $\rho \in [0,+\infty]$, і $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k}) = +\infty$, то $==\sigma(F,\omega) \leq -\rho$ м.н.

Теорема 4. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ і виконуються умови Твердження 4.*

a) *i) Якщо існують $\rho \in (0,+\infty)$ і послідовність (ε_k) такі, що $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ і $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1-F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k})\big) < +\infty$, то $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ м.н.*

ii) Якщо існують $\rho \in (-\infty,0]$ і послідовність (ε_k) такі, що $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ і $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}) < +\infty$, то $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ м.н.

b) *$\sigma(F,\omega) = -\infty$ м.н. $\Longrightarrow$ $(\forall E > 1)$: $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|) = +\infty$.*

Доведення Теореми 3. За Твердженням 4 маємо рівність (13).

a) *i)* Оскільки $\sigma(F,\omega) \geq \rho \in (0,+\infty)$ м.н., то з (13) маємо, що $(\exists B \in \mathcal{A}, P(B) = 1)(\forall \omega \in B)$:

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq -\rho,$$

а за означенням верхньої границі $(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon \in (0,\rho))(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k^*(\omega))$:

$$\lambda_k(\omega) < \frac{1}{(-\rho+\varepsilon)}\ln|a_k|, \qquad (14)$$

Позначимо $A_k \stackrel{def}{=} \Big\{\omega\colon\ \lambda_k(\omega) \geq \frac{1}{(-\rho+\varepsilon)}\ln|a_k|\Big\}$. Зрозуміло, що $B \subset \overline{C} \stackrel{def}{=} \bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}\overline{A}_k$, звідки $P(\overline{C}) = 1$, а подія $\overline{C}$ полягає в тому, що "серед подій послідовності (A_k) відбувається скінченна їх кількість". Оскільки з попарної незалежності випадкових величин $(\lambda_k(\omega))$ випливає попарна незалежність подій (A_k), то за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі ([22]– [24], [25, c.84])

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < +\infty.$$

Залишається врахувати, що $P(A_k) = 1 - F_k\Big(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon}\Big)$.

a) *ii*) Якщо $0 \geq \sigma(\omega, F) \geq \rho \in (-\infty, 0]$ м.н., то замість нерівності (14) отримаємо $(\forall \omega \in B, P(B) = 1)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*(\omega))$ нерівність

$$\lambda_k(\omega) > \frac{1}{(-\rho + \varepsilon)} \ln |a_k|,$$

а, отже, ввівши позначення $A_k \stackrel{def}{=} \Big\{\omega \colon \lambda_k(\omega) \leq \dfrac{1}{(-\rho+\varepsilon)} \ln |a_k|\Big\}$ й міркуючи як і вище, за другою частиною леми Бореля-Кантелі отримаємо, що

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F_k\Big(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon}\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < +\infty$$

Цим завершується доведення п.**a)**.

b) *i*) Позначимо

$$A_k \stackrel{def}{=} \Big\{\omega \colon \lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln |a_k|}{\delta_k}\Big\}.$$

Тоді

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{\delta_k})\big) = +\infty$$

і за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі ([22]– [25]) $P(\overline{C}) = 0$, тобто, $P(C) = 1$, де

$$C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k.$$

Звідси,

$$(\forall \omega \in C)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists k_N(\omega) \geq N)\colon$$
$$\lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln |a_k|}{\delta_k} \quad (k = k_N(\omega)),$$

тому,

$$\frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq -\delta_k \quad (k = k_N(\omega),\ N \geq 1),$$

звідки, остаточно $\forall \omega \in C$:

$$\sigma(F, \omega) = \varliminf_{k \to +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq$$
$$\leq \varliminf_{\substack{N \to +\infty,\\ k = k_N(\omega)}} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq \varliminf_{\substack{N \to +\infty,\\ k = k_N(\omega)}} (-\delta_k) \leq$$
$$\leq -\varlimsup_{\substack{N \to +\infty,\\ k = k_N(\omega)}} \delta_k \leq -\varliminf_{k \to +\infty} \delta_k = \rho.$$

b) *ii*) Позначимо тепер

$$A_k \stackrel{def}{=} \Big\{\omega \colon \lambda_k(\omega) < \frac{\ln |a_k|}{\delta_k}\Big\}$$

і повторимо міркування з доведення п.**b)** *i*). Тоді

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln |a_k|}{\delta_k}) = +\infty$$

і за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі $P(\overline{C}) = 0$, тобто, $P(C) = 1$, де

$$C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k.$$

Звідси,

$$(\forall \omega \in C)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists k_N(\omega) \geq N)\colon$$
$$\lambda_k(\omega) < \frac{\ln |a_k|}{\delta_k} \quad (k = k_N(\omega)),$$

тому,

$$\frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} < -\delta_k \quad (k = k_N(\omega),\ N \geq 1),$$

звідки, остаточно $\forall \omega \in C$, тобто, м.н.

$$\sigma(F, \omega) = \varliminf_{k \to +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq$$
$$\leq \varliminf_{\substack{N \to +\infty,\\ k = k_N(\omega)}} \frac{-\ln |a_k(\omega)|}{\lambda_k} \leq \varliminf_{\substack{N \to +\infty,\\ k = k_N(\omega)}} (-\delta_k) \leq$$
$$\leq -\varlimsup_{\substack{N \to +\infty,\\ k = k_N(\omega)}} \delta_k \leq -\varliminf_{k \to +\infty} \delta_k = -\rho.$$

Теорему 3 повністю доведено.

Доведення Теореми 4. Знову, як і вище у доведенні Теореми 3, за Твердженням 4 маємо рівність (13).

i) Позначимо $A_k = \big\{\omega \colon \lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k}\big\}$. Враховуючи, що $1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k}) = P(A_k)$, з умови отримаємо, що $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < \infty$, і за першою частиною леми Бореля-Кантелі (див., наприклад, [26, 27]) $P(\overline{C}) = 1$, $C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. Оскільки, $\overline{C} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$, то для кожного $\omega \in \overline{C}$ існує $k = k^*(\omega)$ таке, що $\omega \in \overline{A}_k$ і $-\rho + \varepsilon_k < 0$ для

всіх $k \geq k^*(\omega)$, тобто, $(\forall k \geq k^*(\omega))\colon \lambda_k(\omega) < \frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}$. Звідки, $\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} > \rho - \varepsilon_k$ і, тому, м.н.

$$\sigma(F,\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \geq \varliminf_{k\to+\infty} (\rho - \varepsilon_k) = \rho. \tag{15}$$

a) $ii)$ Введемо позначення $A_k \overset{def}{=} \left\{\omega\colon \lambda_k(\omega) < \dfrac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}\right\}$. За умовою $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < +\infty$. Тому, за першою частиною леми Бореля-Кантелі $P(\overline{C}) = 1$, $C \overset{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. Звідки, як і вище для кожного $\omega \in \overline{C} = \bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$ існує $k = k^*(\omega)$ таке, що $\omega \in \overline{A}_k$ і $-\rho + \varepsilon_k > 0$ для всіх $k \geq k^*(\omega)$, тобто, $(\forall k \geq k^*(\omega))\colon \lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}$. Звідки, $\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} > \rho - \varepsilon_k$ і, тому, знову маємо ланцюжок співвідношень (15).

Пункт **a)** Теореми 6 доведено повністю.
b) За умовою $\sigma(F,\omega) = -\infty$ м.н. Тому, за означенням верхньої границі

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} = +\infty \text{ м.н.}$$

маємо, що $(\exists B \in \mathcal{A},\ P(B) = 1)(\forall\omega \in B)(\forall E > 1)(\forall N \in \mathbb{Z}_+)(\exists k_N(\omega) \geq N, k_N(\omega) \in \mathbb{N})$:

$$\lambda_k(\omega) < \frac{1}{E}\ln|a_k| \quad (k = k_N(\omega)).$$

Звідси, $B \subset C \overset{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$, де $A_k = \{\omega : \lambda_k(\omega) < \frac{1}{E}\ln|a_k|\}$, а, тому, $P(C) = 1$, звідки $P(\overline{C}) = 0$. Отже, за першою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, що $\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = +\infty$. Залишається пригадати знову, що $P(A_k) = F_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|)$. Теорему 4 доведено повністю.

3. Деякі наслідки. Якщо в теоремах 3 і 4 вибрати $Z_k(\omega) \equiv 1$, то пункт **a)** Теореми 3 дає Теорему 7 з [1] (див. також [2, Theorem 3] та див. нижче п.**a)** Теореми 5), а п. **a)** теореми 4 дає Теорему 9 з [1] (див. також [2, Theorem 4] та див. нижче п.**a)** Теореми 6). Зрозуміло, що те ж саме отримаємо, якщо $|Z_k(\omega)| = 1$ м.н., або $0 < c_1 \leq |Z_k(\omega)| < c_2 < +\infty$ м.н., або ще загальніше, коли $\ln|Z_k(\omega)| = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$ м.н.

Отже, отримуємо у вигляді наслідків такі твердження.

Теорема 5. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ і виконується умова $\ln|Z_k(\omega)| = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$ м.н. Припустимо, що $\big(\lambda_k(\omega)\big)$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x) \overset{def}{=} P\{\ \omega : \lambda_k(\omega) < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \geq 0$. Виконуються наступні твердження:*
a) $i)$ *$\sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \geq \rho \in (0,+\infty)$ м.н. $\Longrightarrow$ $(\forall\varepsilon \in (0,\rho))\colon\ \sum_{k=0}^{+\infty}\big(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon})\big) < \infty$;*
$ii)$ *$0 \geq \sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \geq \rho \in (-\infty,0]$ м.н. $\Longrightarrow$ $(\forall\varepsilon > 0)\colon\ \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon}) < \infty$;*
b) $i)$ *Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k \in (-\infty,0)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = -\rho$, $\rho \in (0,+\infty]$, і $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})\big) = +\infty$, то $\sigma(F,\omega) \leq \rho$ м.н.*
$ii)$ *Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k \in (0,+\infty)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = \rho$, $\rho \in [0,+\infty]$, і $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k}) = +\infty$, то $\sigma(F,\omega) \leq -\rho$ м.н.*

Теорема 6. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ і виконується умова $\ln|Z_k(\omega)| = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$ м.н.*
a) $i)$ *Якщо існують $\rho \in (0,+\infty)$ і послідовність (ε_k) такі, що $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ і $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k})\big) < +\infty$, то $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ м.н.*
$ii)$ *Якщо існують $\rho \in (-\infty,0]$ і послідовність (ε_k) такі, що $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ і $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}) < +\infty$, то $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ м.н.*
b) *$\sigma(F,\omega) = -\infty$ м.н. $\Longrightarrow$ $(\forall E > 1)\colon$ $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|) = +\infty$.*

Пункти **b)** цих Теорем 5 і 6 є новими навіть у випадку $Z_k(\omega) = 1$, тобто, рядів Діріхле з випадковими показниками і детермінованими коефіцієнтами, як у статтях [1,2].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *Convergence of Dirichlet series with random exponents* // Int. J. Appl. Mathematics. – 2017. – V.30, № 3.
2. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv O.Yu. *On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random pairwise independent exponents* // ArXiv:1703.03280v1[math.CV] 12 Mar 2017. — 12 p.
3. Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса* // Буковинський матем. журн. - 2013. - Т.1, №3-4. С.45-50.
4. Скасків О.Б., Бандура А.І. Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції. – Львів–Івано-Франківськ: пп. Голіней, 2015. – 108 с.
5. Мандельбройт С. Ряды Дирихле, принципы и методы. – М.: Мир, 1973.
6. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993.
7. Мулява О. М. *Про абсцису збіжності ряду Діріхле* // Мат. Студ. – 1998. – **9**, №2. – С. 171-176.
8. Kahane J.–P. Some random series of functions. – 2nd. ed. – Cambridge stud. in adv. math. 5. – Cambridge Univ. Press, 1985. – 308 p.
9. Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. *Про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле* // Буковинський матем. журн. – 2015. – Т.3, № 1. – С.110–114.
10. Tian F., Sun Dao-chun, Yu jia-rong, *Sur les séries aléatoires de Dirichlet* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1998. – V.326, Série 1. – P.427–431.
11. Tian F. *Growth of random Dirichlet series* // Acta Math. Sci. – 2000. V.20, №3. – P.390–396.
12. Ryll-Nardzewski C. *D.Blackwell's conjecture on power series with random coefficients* // Studia Math. – 1953. – V.13. – P.30–36.
13. Filevych P.V. *On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series* // Mat. Stud. – 2003. – V.20, №1. – P.33–39.
14. Ding X., Xiao Y. *Natural boundary of random Dirichlet series* // Укр. матем. журн. – 2006. – Т.58, №7. – С.997–1005.
15. Hedenmalm H. *Topics in the theory of Dirichlet series* // Вісн. Харків. ун-ту. Сер. мат., прикл. мат. і мех. – 2000. – №475. – P.195–203.
16. Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. *On the radius of convergence of random gap power series* // Int. J. Math. Anal. – 2015. – V.9, no.38. – P.1889–1893.
17. Arnold L. *Über die Konverge einer zufälligen Potenzreihe* // J. Reine Angew. Math. – 1966. – V.222. – P.79–112.
18. Arnold L. *Konvergenzprobleme bei zufälligen Potenzreihen mit Lücken* // Math. Zeitschr. – 1966. – Bd.92. – S.356–365.
19. Roters K. *Convergence of random power series with pairwise independent Banach-space-valued coefficients* // Statistics and Probability Letters. – 1993. – V.18. – P.121–123.
20. Никишин Е.М. *Ряды Дирихле с независимыми показателями и их некоторые применения* // Матем. сб. – 1975. – V.96(138), №1. – С. 3–40.
21. Holgate Ph. *Some power series with random gaps* // Adv. Appl. Prob. – 1989. – V.21. – P. 708–710.
22. Erdős P., Rényi A. *On Cantor's series with convergent* $\sum 1/q_n$ // Ann. Univ. Sci. Budapest Eőtvős. Sect. Math. – 1959. – V.2. – P.93–109.
23. Petrov V.V. Sums of idependent random variables. – New York: Springer, 1975.
24. Мартикайнен А.И., Петров В.В. *О лемме Бореля-Кантелли* // Записки научн. сем. Ленинград. отдел. мат. инст. Стеклова. – 1990. – Т.184. – С.200–207 (English transl. in: J. Math. Sci., 1994, **63**, 540–544).
25. Billingsley P. Probability and measure. – New York: Wiley, 1986.
26. Гихман И.И., Скороход Я.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988. – 439 с.
27. Скасків О.Б. Теорія ймовірностей. – Львів: Число, 2012. – 143 с.