

Національний лісотехнічний університет України, м. Львів

## ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПАРИ МІШАНИХ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Одержано інтегральне зображення пари мішаних функцій двох змінних, для яких ядро  $\frac{1}{2}[k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 - y_2)]$ ,  $x_i, y_i \in R^1$  ( $i = 1, 2$ ), додатно визначено.

The integral representation is obtained for mix even positively definite functions of two variables. Nuclear  $\frac{1}{2}[k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 - y_2)]$ ,  $x_i, y_i \in R^1$  ( $i = 1, 2$ ), is positively definite.

У роботі [3] М.Г. Крейн застосував метод спрямованих функціоналів для одержання інтегральних зображень додатно визначених ядер  $K(x, y)$  ( $x, y \in R^1$ ). Ю.М. Березанський в [1] запропонував метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер  $K(x, y)$  ( $x, y \in R^1$ ) за допомогою власних функцій диференціальних операторів. Цей метод полягає у введенні за ядром  $K(x, y)$  ( $x, y \in R^1$ ) гільбертового простору і побудові розвинення за узагальненими власними векторами самоспряжених операторів, які розглядаються у цьому просторі; відповідна рівність Парсеваля дає потрібне зображення. У монографії [2], застосовуючи цю методику, доведено теорему про інтегральне зображення парних додатно визначених (п.д.в.) функцій скінченної кількості змінних. У роботах [4, 5] побудовані інтегральні зображення для пари парних додатно визначених (п.п.д.в.) функцій однієї та двох змінних. У даній роботі доведена теорема для пари парних мішаних додатно визначених у сукупності (п.п.м.д.в.с.) функцій двох змінних, пов'язаних з оператором  $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  ( $j = 1, 2$ ).

**Означення 1.** Пару парних, дійсних, неперервних функцій  $k_1(x)$ ,  $k_2(x)$ , ( $x \in R^2$ ) будемо називати додатно визначеними у сукупності (п.п.м.д.в.с.), якщо для довільної фінітної функції виконується

нерівність

$$\int_{R^2} \int_{R^2} \frac{1}{2}[k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 - y_1; x_2 - y_2)] u(y) \overline{u(x)} dx dy \geq 0. \quad (1)$$

Тобто, неперервне ядро  $K(x, y) = \frac{1}{2}[k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 - y_1; x_2 - y_2)]$  має бути додатно визначеним.

**Теорема.** Кожні п.п.м.д.в.с. функції  $k_1(x)$ ,  $k_2(x)$ , ( $x \in R^2$ ), які задовольняють оцінку  $|k_1(x)| \leq Ce^{N|x_1|^2}$ ;  $|k_2(x)| \leq Ce^{N|x_1|^2}$  ( $N > 0$ ,  $x \in R^2$ ) і умові  $k_1(0; x_2) = k_2(0; x_2)$  допускають зображення

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[k_1(x_1; x_2)] &= \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \times \\ &\times \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2) - \\ &- \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \times \\ &\times \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2) + \\ &+ \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \times \\ &\times \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2) - \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \times \\
& \times \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2) - \\
& - \frac{1}{2} \int_{R^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda); \\
\frac{1}{2} [k_2(x_1; x_2)] = & \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \times \\
& \times \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2) - \\
& - \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \times \\
& \times \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2) - \\
& - \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \times \\
& \times \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2) + \\
& + \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \times \\
& \times \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2) - \\
& - \frac{1}{2} \int_{R^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda),
\end{aligned}$$

де  $d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2)$ ,  $d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2)$ ,  $d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2)$ ,  $d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2)$ ,  $d\rho(\lambda)$  — борелівські невід'ємні міри, які визначаються однозначно.

Навпаки, функції виду (2), (3) є п.м.п.д.в.с. функціями.

**Доведення.** Розглянемо додатно визначене ядро  $K(x, y)$ . Для нього сконструюємо ланцюжок

$$H_- = H_-^{(1)} \otimes H_-^{(2)} \supseteq H_0^{(1)} \otimes H_0^{(2)} \supseteq H_+^{(1)} \otimes H_+^{(2)},$$

де

$$H_-^{(j)} = L_2 \left( R^{(j)}; \frac{1}{p(x_j)} dx_j \right) \supseteq H_0^{(j)} =$$

$$= L_2(R^{(j)}; dx_j) \supseteq H_+^{(j)} = L_2(R^{(j)}; p(x_j) dx_j),$$

$j = 1, 2$ , і  $p(x) = p(x_1)p(x_2)$  вибрано так, щоб  $\int_{R^2} \frac{K(x, x)}{p(x)} dx < \infty$ , тоді  $K(x, y) \subseteq H_- \otimes H_-$  (див. (3.3) стор. 650 [2]).

Тепер позначимо  $A_j$  ( $j = 1, 2$ ) — мінімальний оператор у просторі  $H_0 = L_2(R^2; dx)$ , який відповідає виразу  $L_1^{(j)} = -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  ( $j = 1, 2$ ),  $A_j^*$  ( $j = 1, 2$ ) — максимальний оператор в просторі  $H_0 = L_2(R^2; dx)$ .

Кожний із операторів  $A_j$  ( $j = 1, 2$ ) допускає продовження оснащення з  $D = C_0^\infty(R^2)$ . Звуження  $A_j^*$  ( $j = 1, 2$ ) на  $D$  буде збігатися з відображенням  $u \rightarrow L^{(j)+}u$  ( $u \in C_0^\infty(R^2)$ ).

У просторі  $H_+^{(j)} = L_2(R^{(j)}p(x_j)dx_j)$  введемо оператори  $B_j$  ( $j = 1, 2$ ), які відповідають виразу  $u \rightarrow L^{(j)}u$  з областю визначення  $D(B_j) = C_0^\infty(R^j)$ .

У просторі  $H_+$  введемо оператори  $C_1 = B_1 \otimes E$ ;  $C_2 = E \otimes B_2$ , які відповідають виразу  $u = L^{(j)+}u$  з областю визначеності  $D(C_1) = C_0^\infty(R^1) \otimes H_+^{(2)}$   $D(C_2) = H_+^{(1)} \otimes C_0^\infty(R^1)$ .

За ядром  $K(x, y)$  введемо квазіскалярний добуток

$$\langle u, v \rangle_{H_k} = \int_{R^2} \int_{R^2} K(x, y) u(y) v(x) dx dy, \quad (4)$$

$$(u, v \in C_0^\infty(R^2)).$$

Після проведення факторизації й поповнення відносно (4), одержимо гільбертовий простір  $H_k$ .

Щоб одержати інтегральне зображення для д.в. ядра  $K(x, y)$  потрібно, щоб  $K(x, y)$  комутувала з оператором  $A_j$  ( $j = 1, 2$ ), тобто рівності

$$(K, (A_j^* v) \otimes u)_0 = (K, v \otimes (A_j^* v))_0,$$

$$u, v \in C_0^\infty(R^2).$$

А це еквівалентно ермітовості операторів  $C_j$  в просторі  $H_k$ , тобто рівності

$$\langle L^{(j)+}u, v \rangle = \langle u, L^{(j)+}v \rangle \quad (5)$$

$$(u, v \in C_0^\infty(R^2)), (j = 1, 2).$$

(див. [2, стр. 621]).

Для гладкого додатно визначеного ядра  $K(x, y)$  рівність (5) виконується.

Перевіримо (5) для довільного додатно визначеного ядра  $K(x, y)$ . Цю перевірку достатньо здійснити на функціях виду  $u(x_1)$ ,  $u(x_2)$ , оскільки вони щільні у  $H_k$ .

Нехай  $j = 1$ . Введемо допоміжні парні функції:

$$f_1(t) = \int_{R^1} \int_{R^1} k_1(t, x_2 - y_2) u(y_2) u(x_2) dx_2 dy_2$$

і

$$f_2(t) = \int_{R^1} \int_{R^1} k_2(t, x_2 - y_2) u(y_2) u(x_2) dx_2 dy_2,$$

тоді

$$\begin{aligned} \langle L^{(1)+} u, v \rangle &= \int_{R^1} \int_{R^1} f_1(x_1 + y_1) \times \\ &\quad \times \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u(y_1) v(x_1) dx_1 dy_1 + \\ &+ \int_{R^1} \int_{R^1} f_2(x_1 + y_1) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u(y_1) v(x_1) dx_1 dy_1 = \\ &= \int_{R^1} f_1(y_1) \left( \int_{R^1} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u(y_1 + x_1) v(x_1) dx_1 \right) dy_1 + \\ &+ \int_{R^1} f_2(y_1) \left( \int_{R^1} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u(y_1 + x_1) v(x_1) dx_1 \right) dy_1 = \\ &= \int_{R^1} \int_{R^1} f_1(x_1 + y_1) u(y_1) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v(x_1) dx_1 dy_1 + \\ &+ \int_{R^1} \int_{R^1} f_2(x_1 - y_1) u(y_1) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v(x_1) dx_1 dy_1 = \\ &= \langle u, L^{(1)+} v \rangle. \end{aligned}$$

Отже, оператори  $C_1, C_2$  ермітові, причому  $C_2 \geq 0$ .

Дійсно, якщо ввести допоміжну функцію

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{R^1} \int_{R^1} [k_1(x_1 + y_1, t) + k_2(x_1 - y_1, t)] \times \\ &\quad \times u(y_1) u(x_1) dx_1 dy_1, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \langle L^{(2)+} u, u \rangle &= - \int_{R^1} \int_{R^1} f(x_2 - y_2) \times \\ &\quad \times \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_2) u(y_2) dx_2 dy_2 = \\ &= (x_2 - y_2 = t_2 \Rightarrow y_2 = x_2 - t_2) \\ &= - \int_{R^1} \left( \int_{R^1} f(t_2) u''_{t_2}(x_2 - t_2) dt_2 \right) \overline{u(x_2)} dx_2 = \\ &= - \int_{R^1} \left( \int_{R^1} f(t_2) u''_{x_2}(x_2 - t_2) dt_2 \right) \overline{u(x_2)} dx_2 = \\ &= - \int_{R^1} f(t_2) \left( \int_{R^1} u''_{t_2}(x_2 - t_2) \overline{u(x_2)} dx_2 \right) dt_2 = \\ &= \left[ \begin{aligned} &\int_{R^1} u''_{x_2}(x_2 - t_2) \overline{u(x_2)} dx_2 = \\ &= \left[ \overline{u(x_2)} u'_{x_2}(x_2 - t_2) \right]_{-\infty}^{\infty} - \\ &- \int_{R^1} u'_{x_2}(x_2 - t_2) \overline{u'(x_2)} dx_2 \\ &= \int_{R^1} u''_{x_2}(x_2 - t_2) dx_2 = dv \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = -u'_{x_2}(x_2 - t_2) \\ &\overline{u(x_2)} = u \Rightarrow du = u'(x_2) \end{aligned} \right] = \\ &= \int_{R^1} f(t_2) \left( \int_{R^1} u'_{x_2}(x_2 - t_2) \overline{u'(x_2)} dx_2 \right) dt_2 = \\ &= \int_{R^1} \int_{R^1} f(x_2 - z_2) u'(z_2) \overline{u'(x_2)} dx_2 dz_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Оскільки  $|K(x, y)| \leq C e^{2N(x_1^2 + y_1^2)}$ , то можна довести самостраженість і комутативність ермітових операторів  $C_1, C_2$  аналогічно теоремі 4.3 [2, стор. 708-709].

Тоді для ядра  $K(x, y)$  можна застосувати теорему 4.1 [2; стор. 704-705] і одержати таке зображення:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + \\ &+ k_2(x_1 - y_1; x_2 - y_2)] = \\ &= \int_{R^2} \Omega_\lambda(x, y) d\rho(\lambda) = \end{aligned}$$

$$= \int_{R^1 \times R_+^1} \sum_{\alpha, \beta \in A} X_\alpha(x, \lambda) \overline{X_\beta(y, \lambda)} d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \quad (6)$$

$$x, y \in R^2,$$

$$\text{де } -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \Omega_\lambda = \lambda_j \Omega_\lambda; \quad -\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \Omega_\lambda = \lambda_j \Omega_\lambda;$$

$$X_0^{(j)}(x_j, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda_j} x_j;$$

$$X_1^{(j)}(x_j, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda_j} x_j}{\lambda_j}, \quad (j = 1, 2),$$

$A$  — паралелепіпед з цілочисельними вершинами  $\alpha_1 = 0, 1$ ;  $\alpha_2 = 0, 1$ .

Якщо тепер зробимо у (6) заміну  $x_1 = -x_1$ ,  $y_1 = -y_1$  і додамо отриману рівність до (6), а потім в одержаній рівності зробимо заміну  $x_2 = -x_2$ ,  $y_2 = -y_2$  і додамо одержану рівність до попередньої рівності, то отримаємо таке зображення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 - y_1; x_2 - y_2)] = & \\ = \int_{R^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_1} x_1 \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \cos \sqrt{\lambda_1} y_1 \times & \\ \times \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 d\sigma_{0000}(\lambda_1; \lambda_2) + & \\ + \int_{R^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_1} x_1 \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} x_2}{\lambda_2} \cdot & \\ \cdot \cos \sqrt{\lambda_1} y_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} y_2}{\lambda_2} d\sigma_{0101}(\lambda_1; \lambda_2) + & \quad (7) \\ + \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{\sin \sqrt{\lambda_1} x_1}{\lambda_1} \cdot \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \cdot & \\ \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_1} y_1}{\lambda_1} \cdot \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 d\sigma_{1010}(\lambda_1; \lambda_2) + & \\ + \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{\sin \sqrt{\lambda_1} x_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} x_2}{\lambda_2} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_1} y_1}{\lambda_1} \cdot & \\ \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} y_2}{\lambda_2} d\sigma_{1111}(\lambda_1; \lambda_2). & \end{aligned}$$

Інтегрування у зображеннях (7), буде здійснюватися по  $R^1 \times R_+^1$ , оскільки оператор  $C_2 \geq 0$ .

Якщо тепер у (7) покладемо  $y_1 = x_1$ ;  $y_2 = -x_2$ , то одержимо представлення

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [k_1(x_1; x_2) + k_2(0; x_2)] = & \\ = \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \times & \\ \times \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2) - & \\ - \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \times & \\ \times \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2) + & \quad (8) \\ + \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \times & \\ \times \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} \cdot d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2) - & \\ - \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \times & \\ \times \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2). & \end{aligned}$$

Якщо у (7) покладемо  $x_1 = -y_1$ ;  $y_2 = -x_2$ , то одержимо представлення

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [k_1(0; x_2) + k_2(x_1; x_2)] = & \\ = \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \cdot & \\ \cdot \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2) - & \\ - \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2} \cdot & \\ \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2) - & \quad (9) \\ - \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \cdot & \\ \cdot \frac{1 + \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2} d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2) + & \end{aligned}$$

$$+ \int_{R^1 \times R_+^1} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_1} x_1}{2\lambda_1} \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_2} x_2}{2\lambda_2} d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2).$$

Із (8) і (9) випливає, що

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[k_1(0; x_2) + k_2(0; x_2)] = \\ & = \int_{R^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda_1; \lambda_2). \end{aligned}$$

Тому, враховуючи умову теореми  $k_1(0, x_2) = k_2(0, x_2)$ , одержимо що

$$\begin{aligned} & k_1(0, x_2) = k_2(0, x_2) = \\ & = \int_{R^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda_1; \lambda_2). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що інтегральні представлення (8) і (9) запишуться у вигляді (2), (3).

Останнє твердження теореми будемо доводити наступним чином. Спочатку доведемо нерівність (1), якщо в (2) і (3)  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ . У цьому випадку елементарне ядро буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda(x, y) &= \cos \sqrt{\lambda_1} x_1 \cos \sqrt{\lambda_1} y_1 \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \times \\ & \quad \times \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 + \\ & + \cos \sqrt{\lambda_1} x_1 \cos \sqrt{\lambda_1} y_1 \sin \sqrt{\lambda_2} x_2 \sin \sqrt{\lambda_2} y_2 + \\ & + \sin \sqrt{\lambda_1} x_1 \sin \sqrt{\lambda_1} y_1 \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 + \\ & + \sin \sqrt{\lambda_1} x_1 \sin \sqrt{\lambda_1} y_1 \sin \sqrt{\lambda_2} x_2 \sin \sqrt{\lambda_2} y_2 \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda(0, 0) &= 1; \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \Omega_\lambda(0, 0) = \lambda_1; \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) &= \lambda_2; \\ \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) &= \lambda_1 \lambda_2, \end{aligned}$$

а міри в (2) і (3) запишуться наступним чином

$$d\rho_1(\lambda_1, \lambda_2) = \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = d\rho(\lambda);$$

$$\begin{aligned} d\rho_2(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = \lambda_2 d\rho(\lambda); \\ d\rho_3(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = \lambda_1 d\rho(\lambda); \\ d\rho_4(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2 \partial y_1 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = \\ & = \lambda_1 \lambda_2 d\rho(\lambda). \end{aligned}$$

Тому інтегральні зображення (2) і (3) запишуться у такому вигляді

$$\frac{1}{2} k_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda); \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k_2(x_1, x_2) &= \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_1} x_1 \times \\ & \times \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda) - \frac{1}{2} \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (11)$$

Із (10) і (11) знаходимо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} k_1(x_1 + y_1, x_2 - y_2) = \\ & = \frac{1}{2} \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} (x_2 - y_2) d\rho(\lambda); \quad (12) \\ & \frac{1}{2} k_2(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = \\ & = \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_1} (x_1 - y_1) \times \\ & \quad \times \cos \sqrt{\lambda_2} (x_2 - y_2) d\rho(\lambda) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} (x_2 - y_2) d\rho(\lambda). \quad (13) \end{aligned}$$

Тому, якщо додати (12) до (13), одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1, x_2 - y_2) + \\ & + k_2(x_1 - y_1, x_2 - y_2)] = \\ & = \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_1} (x_1 - y_1) \times \\ & \quad \times \cos \sqrt{\lambda_2} (x_2 - y_2) d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (14)$$

Або, якщо перейти до мір

$d\rho_1(\lambda)$ ,  $d\rho_2(\lambda)$ ,  $d\rho_3(\lambda)$ ,  $d\rho_4(\lambda)$  у (14) одержимо, що

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1, x_2 - y_2) + \\ & + k_2(x_1 - y_1, x_2 - y_2)] = \\ = & \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_1} x_1 \cos \sqrt{\lambda_1} y_1 \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \times \\ & \times \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 d\rho_1(\lambda_1 \lambda_2) + \\ & + \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_1} x_1 \cos \sqrt{\lambda_1} y_1 \times \\ & \times \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} x_2 \sin \sqrt{\lambda_2} y_2}{\lambda_2} d\rho_2(\lambda_1 \lambda_2) + \\ & + \int_{R_+^1 \times R_+^1} \frac{\sin \sqrt{\lambda_1} x_1 \sin \sqrt{\lambda_1} y_1}{\lambda_1} \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \times \\ & \times \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 d\rho_3(\lambda_1 \lambda_2) + \\ & + \int_{R_+^1 \times R_+^1} \frac{\sin \sqrt{\lambda_1} x_1 \sin \sqrt{\lambda_1} y_1}{\lambda_1} \times \\ & \times \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} x_2 \sin \sqrt{\lambda_2} y_2}{\lambda_2} d\rho_4(\lambda_1 \lambda_2). \end{aligned} \quad (15)$$

За допомогою (15) перевіряємо (1).

Тепер доведемо нерівність (1), якщо в (2) і (3)  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ . У цьому випадку елементарне ядро буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda(x, y) = & \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} x_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} y_1 \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \times \\ & \times \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 + \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} x_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} y_1 \times \\ & \times \sin \sqrt{\lambda_2} x_2 \sin \sqrt{\lambda_2} y_2 + \\ & + \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda_1} x_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda_1} y_1 \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 + \\ & + \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda_1} x_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda_1} y_1 \sin \sqrt{\lambda_2} x_2 \sin \sqrt{\lambda_2} y_2 \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda(0, 0) = 1; \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \Omega_\lambda(0, 0) = |\lambda_1|; \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) = \lambda_2; \\ \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) = |\lambda_1| \lambda_2, \end{aligned}$$

а міри в (2) і (3) запишуться наступним чи-

$$d\rho_1(\lambda_1, \lambda_2) = \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = d\rho(\lambda);$$

$$\begin{aligned} d\rho_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = \\ = \lambda_2 d\rho(\lambda); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\rho_3(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = \\ = |\lambda_1| d\rho(\lambda); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\rho_4(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2 \partial y_1 \partial y_2} \Omega_\lambda(0, 0) d\rho(\lambda) = \\ = |\lambda_1| \lambda_2 d\rho(\lambda). \end{aligned}$$

Тому інтегральні зображення (2) і (3) запишуться у такому вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \int_{R_+^1 \times R_+^1} \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} x_1 \times \\ \times \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda) - \\ - \frac{1}{2} \int_{R_-^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} k_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \int_{R_-^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho(\lambda). \quad (17)$$

Із (16) і (17) знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k_1(x_1 + y_1, x_2 - y_2) = \\ \int_{R_+^1 \times R_+^1} \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} (x_1 + y_1) \times \\ \times \cos \sqrt{\lambda_2} (x_2 - y_2) d\rho(\lambda) - \\ - \frac{1}{2} \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} (x_2 - y_2) d\rho(\lambda); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k_2(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = \\ = \frac{1}{2} \int_{R_-^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_2} (x_2 - y_2) d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (19)$$

Тому, якщо додати (18) до (19), одержимо (11) буде слідувати, що

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1, x_2 - y_2) + \\ & + k_2(x_1 - y_1, x_2 - y_2)] = \\ & = \int_{R_+^1 \times R_+^1} \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} (x_1 + y_1) \times \\ & \times \cos \sqrt{\lambda_2} (x_2 - y_2) d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} k_2(x_1, x_2) = \int_{R_+^1 \times R_+^1} \cos \sqrt{\lambda_1} x_1 \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho_2(\lambda),$$

тобто зображення [2, стор. 852].

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Або, якщо перейти до мір  $d\rho_1(\lambda)$ ,  $d\rho_2(\lambda)$ ,  $d\rho_3(\lambda)$ ,  $d\rho_4(\lambda)$  у (20) одержимо, що

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [k_1(x_1 + y_1, x_2 - y_2) + \\ & + k_2(x_1 - y_1, x_2 - y_2)] = \\ & = \int_{R_-^1 \times R_+^1} \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} x_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} y_1 \times \\ & \times \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 d\rho_1(\lambda) + \\ & + \int_{R_-^1 \times R_+^1} \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} x_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} y_1 \times \\ & \times \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} x_2 \sin \sqrt{\lambda_2} y_2}{\lambda_2} d\rho_2(\lambda) + \\ & + \int_{R_-^1 \times R_+^1} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{-\lambda_1} x_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda_1} y_1}{-\lambda_1} \times \\ & \times \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 \cos \sqrt{\lambda_2} y_2 d\rho_3(\lambda) + \\ & + \int_{R_-^1 \times R_+^1} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{-\lambda_1} x_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda_1} y_1}{-\lambda_1} \times \\ & \times \frac{\sin \sqrt{\lambda_2} x_2 \sin \sqrt{\lambda_2} y_2}{\lambda_2} d\rho_4(\lambda). \end{aligned} \quad (21)$$

За допомогою (21) перевіряємо (1).

Таким чином із (2) і (3) слідує (1). Теорему доведено.

**Зауваження 1.** Якщо  $k_2(x) = 0$ , то оператори  $C_1 < 0$ ,  $C_2 \geq 0$  із зображень (16) і (17) буде слідувати, що

$$\frac{1}{2} k_1(x_1, x_2) = \int_{R_-^1 \times R_+^1} \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda_1} x_1 \cos \sqrt{\lambda_2} x_2 d\rho_2(\lambda).$$

**Зауваження 2.** Якщо  $k_1(x) = 0$ , то оператори  $C_1 \geq 0$ ,  $C_2 \geq 0$  із зображень (10) і

1. Березанский Ю.М. Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям дифференциальных операторов // Докл. АН СССР – 1956. – 108, №3. – С.893-896.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.
3. Крейн М.Г. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // Докл. АН СССР – 1946. – 53, №1. – С.3-6.
4. Лопотко О.В. Интегральные зображення парних додатно визначених функцій однієї змінної - УМЖ т. 62, № 2, 2010 р. С.281-284.
5. Лопотко О.В. Интегральные зображення парних додатно визначених функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, №6. – С. 844-853.