

## ПРО ТОЧКИ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ ЗА ФРЕШЕ

Для довільної зліченної підмножини  $E$  дійсного нормованого простору  $X$  побудована така неперервна функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , у якій множина точок диференційовності за Фреше збігається з доповненням  $X \setminus E$ .

For any countable subset  $E$  of real normed space  $X$  we construct a continuous function  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  such that the set of all points of differentiability by Frechet coincides with  $X \setminus E$ .

**1. Вступ.** Задача про опис множини  $H(f)$  всіх точок диференційовності неперервної функції  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , заданої на відрізку  $I = [a, b]$  числової прямої  $\mathbb{R}$ , розв'язана повністю (див. [1] і [2, с. 154]). Зокрема, в [2, с. 154] А. Брукнер подає теорему (th. 3.1), з якої випливає, що для того щоб існувала така неперервна функція  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , у якій  $H(f) = D \subseteq I$ , необхідно і досить, щоб існували  $F_\sigma$ -множина  $A$  і  $F_{\sigma\delta}$ -множина  $B$ , такі, що  $D = A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq I$  та  $\lambda(B) = \lambda(I)$ , де  $\lambda$  – лінійна міра Лебега. Множина  $J(f)$  всіх точок з  $I$ , в яких неперервна функція  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  не диференційовна, має вигляд  $J(f) = (I \setminus A) \cup (I \setminus B)$ , де  $I \setminus A$  –  $G_\delta$ -множина, а  $I \setminus B$  –  $G_{\delta\sigma}$ -множина нульової міри. Оскільки кожна зліченна підмножина  $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  відрізка  $I \in G_{\delta\sigma}$ -множиною нульової міри, то з наведеної теореми негайно випливає, що існує така неперервна функція  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , у якій  $J(f) = E$ . Таку функцію можна побудувати і безпосередньо, визначивши її, наприклад, формулою

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{arctg}|x - x_n|$$

на всій числовій прямій.

Природно поставити питання про опис множини  $H(f)$  точок диференційовності неперервних чи довільних функцій багатьох дійсних змінних чи, загалініше, функцій, диференційовних за Фреше. Тут ми встановлюємо, що для довільної зліченної підмножини  $E$  дійсного нормованого простору  $X$  існує така неперервна функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

що  $J(f) = E$ , де  $J(X) = X \setminus H(f)$ , а  $H(f)$  – множина всіх точок в  $X$ , в яких функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  диференційовна за Фреше.

**2. Одна теорема про почленне диференціювання функціонального ряду.** Нехай  $(X, \|\cdot\|)$  – дійсний нормований простір і  $y = f(x)$  – дійсна функція, у якій область визначення  $D_f$  міститься в  $X$ . Розглянемо точку  $x_0$ , яка є внутрішньою для  $D_f$ . Кажуть, що функція  $f$  диференційовна за Фреше у точці  $x_0$ , якщо існує такий лінійний неперервний функціонал  $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ , що

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{\|h\|} = 0$$

Позначивши

$$\gamma = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{\|h\|},$$

ми одержимо зображення приросту  $\Delta y = \Delta f(x_0; h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$  функції  $f$  у точці  $x_0$ , що відповідає приросту  $h$  її аргумента, у вигляді  $\Delta y = l(h) + \gamma\|h\|$ , де  $\gamma \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Навпаки, з наявності такого зображення приросту  $\Delta y$  легко випливає диференційовність за Фреше функції  $f$  у точці  $x_0$ . Функціонал  $l$  з означення диференційовності за Фреше визначається однозначно і називається *похідною Фреше* функції  $f$  у точці  $x_0$ . Він позначається символом  $f'(x_0)$ , а його дія на елемент  $h$  – через  $f'(x_0)h$ .

Нам буде потрібна наступна теорема про почленне диференціювання функціонального ряду. Символом  $U_\delta(x_0) = \{x \in X : \|x -$

$\|x - x_0\| < \delta\}$  позначатимемо  $\delta$ -околом точки  $x_0$  у нормованому просторі  $(X, \|\cdot\|)$ .

**Теорема 1.** Нехай  $(X, \|\cdot\|)$  – дійсний нормований простір,  $x_0 \in X$ ,  $U = U_\delta(x_0)$  –  $\delta$ -окол точки  $x_0$ ,  $u_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  – диференційовні за Фреше у точці  $x_0$  функції при  $n = 1, 2, \dots$ ,  $c_n$  – додатні числа, для яких ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  збігається і  $|u_n(x) - u_n(x_0)| \leq c_n \|x - x_0\|$  при  $x \in U$  для кожного  $n$ , причому ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)|$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} \|u'_n(x_0)\|$  збігаються. Тоді ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  збігається рівномірно на  $U$ , функція  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  визначена на  $U$  і диференційовна за Фреше в точці  $x_0$  і  $f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0)$ .

**Доведення.** Для довільного  $x \in U$  і кожного номера  $n$  з рівності  $u_n(x) = u_n(x_0) + u_n(x) - u_n(x_0)$  випливає, що

$$|u_n(x)| \leq |u_n(x_0)| + |u_n(x) - u_n(x_0)| \leq |u_n(x_0)| + c_n \|x - x_0\| \leq |u_n(x_0)| + \delta c_n = \alpha_n.$$

Оскільки числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  збігається, то за ознакою Вейерштрасса ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  збігається рівномірно на множині  $U$  і його сума  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  визначена на  $U$ .

Оскільки функції  $u_n$  диференційовні за Фреше в точці  $x_0$ , то

$u_n(x) - u_n(x_0) = u'_n(x_0)(x - x_0) + \gamma_n(x)\|x - x_0\|$  в околі  $U$ , де  $\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma_n(x) = \gamma_n(x_0) = 0$ . З цього співвідношення випливає, що

$$\gamma_n(x)\|x - x_0\| = u_n(x) - u_n(x_0) - u'_n(x_0)(x - x_0).$$

Звідси, покладаючи  $\beta_n = c_n + \|u'_n(x_0)\|$ , отримуємо, що для кожного  $x \in U$

$$\begin{aligned} \gamma_n(x)\|x - x_0\| &\leq \|u_n(x) - u_n(x_0)\| + \\ &+ \|u'_n(x_0)\|\|x - x_0\| \leq \beta_n \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Отже,  $\|\gamma_n(x)\| \leq \beta_n$  на  $U$ . Оскільки числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(x)$  збігається, то за ознакою

Вейерштрасса функціональний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x)$  збігається рівномірно на околі  $U$  і його сума  $\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x)$  є неперервною в точці  $x_0$  функцією, адже всі  $\gamma_n$  є такими, при цьому

$$\gamma(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x_0) = 0$$

В такому разі  $f(x) - f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} (u'_n(x_0)(x - x_0) + \gamma_n(x)\|x - x_0\|) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0)(x - x_0) + \gamma(x)\|x - x_0\|$ .

Оскільки ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \|u'_n(x_0)\|$  збігається і спряжений простір  $X^*$  повний, то збігається і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0)$  у банаховому просторі  $X^*$  і його сума  $l$  – це лінійний неперервний функціонал на  $X$ , причому

$$l(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0)(x - x_0)$$

Тому  $f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + \gamma(x)\|x - x_0\|$ , де  $l \in X^*$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = \gamma(x_0) = 0$ , а це і означає, що функція  $f$  диференційовна за Фреше в точці  $x_0$  і  $f'(x_0) = l = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0)$ .

**3. Похідна норми.** Нехай  $(X, \|\cdot\|)$  – дійсний нормований простір. Його норма  $p(x) = \|x\|$  – це функція  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ , яка може виявитися диференційовною за Фреше або ні. Наприклад, коли  $X$  – евклідовий простір і норма  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  породжена скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  на цьому просторі, то вона диференційовна при  $x \neq 0$ . Справді, розглянемо функцію  $q(x) = \langle x, x \rangle$ . Для довільних  $x \in X$  і  $h \in X$  маємо

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \langle x+h, x+h \rangle - \langle x, x \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle - \langle x, x \rangle = 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2. \end{aligned}$$

Функція  $l(h) = 2\langle x, h \rangle$  – це лінійний неперервний функціонал на  $X$ , а для функції  $\gamma(h) = \|h\|$  маємо, що  $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = 0$ . Оскільки

$$g(x+h) - g(x) = 2\langle x, h \rangle + \gamma(h)\|h\|,$$

де  $\gamma(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то функція  $g$  диференційовна за Фреше в точці  $x$  і  $g'(x)h = 2\langle x, h \rangle$ . Функція  $\varphi(t) = \sqrt{t}$  дійсної змінної  $t$  диференційовна при  $t > 0$ . Оскільки  $p(x) = \varphi(g(x))$  і  $g(x) > 0$  при  $x \neq 0$ , то за теоремою про диференційовність композиції і функція  $p$  диференційовна за Фреше при  $x \neq 0$ .

Нам потрібне буде одне твердження з [3]. Для повноти викладу ми дамо тут його повне доведення, оскільки в [3] дані лише вказівки.

**Теорема 2.** Нехай  $(X, \|\cdot\|)$  – дійсний нормований простір з диференційовною за Фреше при  $x \neq 0$  нормою  $p(x) = \|x\|$ . Тоді  $\|p'(x)\| = 1$  при  $x \neq 0$ .

#### Доведення.

За умовою при  $x \neq 0$  для довільного  $h \in X$  маємо, що

$$p(x+h) - p(x) = p'(x)h + \gamma(h)\|h\|,$$

де  $p'(x) \in X^*$  і  $\gamma(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Взявши  $t > 0$  і  $h = tx$ , отримаємо, що

$$\begin{aligned} p(x+tx) - p(x) &= \|(1+t)x\| - \|x\| = \\ &= (1+t)\|x\| - \|x\| = t\|x\|, \end{aligned}$$

отже,  $\frac{p(x+tx)-p(x)}{t} = \|x\|$  при  $t > 0$ .

Крім того, для довільного  $h \in X$

$$\frac{p(x+th) - p(x)}{t} = p'(x)h + \gamma(th)\|h\| \rightarrow p'(x)h$$

при  $t \rightarrow +0$ , адже тоді  $\gamma(th) \rightarrow 0$ . В такому разі  $p'(x)x = \|x\|$ , звідки

$$\|x\| = \|p'(x)x\| \leq \|p'(x)\|\|x\|.$$

Отже,  $\|p'(x)\| \geq 1$ .

З другого боку,

$$p'(x)(th) = \|x+th\| - \|x\| - \gamma(th)\|th\|,$$

звідки

$$t|p'(x)h| \leq t\|h\| + |\gamma(th)|t\|h\|,$$

а значить,

$$|p'(x)h| \leq (1 + |\gamma(th)|)\|h\|$$

для кожного  $h \in X$  і довільного  $t > 0$ , а тоді і

$$|p'(x)h| \leq 1 + |\gamma(th)|$$

при  $\|h\| = 1$  і  $t > 0$ . Оскільки  $\lim_{u \rightarrow 0} \gamma(u) = 0$ , то для кожного  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $\delta > 0$ , що  $|\gamma(u)| \leq \varepsilon$ , як тільки  $\|u\| \leq \delta$ . При  $0 < t \leq \delta$  і  $\|h\| = 1$  будемо мати, що  $\|th\| = t\|h\| = t \leq \delta$ , отже,  $|\gamma(th)| \leq \varepsilon$ . Таким чином

$$|p'(x)h| \leq 1 + \varepsilon$$

для кожного  $h$  з  $\|h\| = 1$ . Тоді і

$$\|p'(x)\| = \sup_{\|h\|=1} |p'(x)h| \leq 1 + \varepsilon.$$

Спрямувавши  $\varepsilon$  до нуля, отримаємо, що  $\|p'(x)\| \leq 1$ .

Таким чином,  $\|p'(x)\| = 1$ .

Зауважимо, що норма  $p(x) = \|x\|$  на ненульовому дійсному нормованому просторі  $(X, \|\cdot\|)$  ніколи не може бути диференційовною за Фреше у точці 0. Справді, якби  $p$  було диференційовною в точці 0, то за теоремою про похідну композиції і функція  $q(t) = p(tx)$  була б диференційовною в точці 0 при кожному фіксованому  $x$ . Візьмемо  $x \neq 0$ . Тоді

$$q(t) = \|tx\| = |t|\|x\|.$$

Але ця функція, як добре відомо, не диференційовна в точці 0.

**4. Основний результат.** Для функції  $y = f(x)$  дійсної змінної з дійсними значеннями її звичайну похідну в точці  $x$  (число!) ми позначатимемо через  $\dot{f}(x)$ . Похідна Фреше  $f'(x)$  цієї функції – це її диференціал  $f'(x)h = df(x; h) = \dot{f}(x)h$ . Для композиції  $f \circ g$ , де  $g$  – функціонал на нормованому просторі  $X$ , а  $f$  – дійсна функція дійсної змінної з теореми про похідну композиції випливає, що функція  $f \circ g$  буде диференційовною за Фреше в точці  $x$ , якщо  $g$  диференційовна за Фреше в точці  $x$ , а  $f$  диференційовна в точці  $g(x)$ , і при цьому

$$(f \circ g)'(x) = \dot{f}(g(x))g'(x).$$

Наступна теорема є основним результатом даної статті.

**Теорема 3.** Нехай  $(X, \|\cdot\|)$  - ненульовий дійсний нормований простір з диференційовною при  $x \neq 0$  нормою  $p(x) = \|x\|$  і  $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  - зліченна підмножина простору  $X$ , що складається з різних точок  $x_n$ . Тоді формулою

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{arctg} \|x - x_n\|$$

визначається неперервна на просторі  $X$  функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , у якій множина точок недиференційовності за Фреше  $J(f) = E$ .

#### Доведення.

Покладемо  $u_n(x) = \frac{1}{2^n} \operatorname{arctg} \|x - x_n\|$ . Для кожного  $n$  функція  $u_n$  неперервна, диференційовна за Фреше на  $X$  при  $x \neq x_n$  і не диференційовна в точці  $x_n$ . Це впливає теорем про неперервність і диференційовність композиції і того, що відображення  $t \mapsto \frac{1}{2^n} \operatorname{arctg} t : \mathbb{R} \mapsto (-\frac{\pi}{2^{n+1}}, \frac{\pi}{2^{n+1}})$  є дифеоморфізмом. При цьому, якщо  $x \neq x_n$ , то

$$u'_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 + \|x - x_n\|^2} \cdot p'(x - x_n)$$

Зокрема,

$$\begin{aligned} \|u'_n(x)\| &= \frac{1}{2^n(1 + \|x - x_n\|^2)} \|p'(x - x_n)\| = \\ &= \frac{1}{2^n(1 + \|x - x_n\|^2)} \leq \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

отже, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \|u'_n(x)\|$  збігається для кожного  $x \in X \setminus E$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  рівномірно і абсолютно збігається на  $X$ , адже

$$|u_n(x)| \leq \frac{\pi}{2^{n+1}} \text{ на } X.$$

Тому його сума  $f(x)$  є неперервною функцією.

Нехай  $x_0 \in X \setminus E$ . Доведемо, що в точці  $x_0$  функція  $f$  диференційовна за Фреше. За формулою Лагранжа

$$|u_n(x) - u_n(x_0)| = \frac{1}{2^n} (\operatorname{arctg} \|x - x_n\| -$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{arctg} \|x_0 - x_n\|) &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 + \xi^2} (\|x - x_n\| - \\ &- \|x_0 - x_n\|) \leq \frac{1}{2^n} \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Оскільки ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  збігається, то у будь-якому  $\delta$ -околі  $U$  точки  $x_0$  виконуються умови теореми 1, яка і дає нам диференційовність за Фреше функції  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  у точці  $x_0$ .

Тепер з'ясуємо, що  $f$  не диференційовна за Фреше у будь-якій точці  $x_n$ . Запишемо  $f(x)$  у вигляді

$$f(x) = u_n(x) + v_n(x),$$

де  $v_n(x) = \sum_{m \neq n} u_m(x)$ . З теореми 1 легко вивести подібно до попереднього, що функція  $v_n$  диференційовна за Фреше у точці  $x_n$ , функція ж  $u_n$  не диференційовна в точці  $x_n$ . Тому їх сума  $f = u_n + v_n$  не буде диференційовною в точці  $x_n$ . Таким чином  $J(f) = E$ , що і треба було довести.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bruckner A., Differentiation of Real Functions. – Amer. Math. Soc., Providens, Rhode Island. USA. – 196 р.
2. Bruckner A. and Leonard I., Derivatives. – Amer. Math. Monthly. – 1966. – 73, Part II. – P. 24-56.
3. Robert Deville, Gilles Godefroy, Vaclav Zizler, Smoothness and Renormings in Banach Spaces. – Besancon and Bordeaux, Paris and Columbia, Edmonton. – Sammer 1992.