УДК 517.946

©2017 р. М.І. Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ФУНДАМЕНТАЛЬНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ І РІВНЯНЬ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

На основі зв'язку між функціями Гріна задачі Коші для параболічних рівнянь і відповідних рівнянь з дробовими похідними визначаються і оцінюються компоненти фундаментального розв'язку рівнянь зі змінними коефіцієнтами, модуль неперервності яких задовольняє умову Діні. Встановлюється коректність задач Діріхле і Неймана для фрактального рівняння дифузії.

Based on the connection between Green functions of the Cauchy problem for parabolic equations and corresponding equations with fractional derivatives components of fundamental solution of equations with variable coefficients the module of continuity of which satisfies Dini condition are defined and evaluated. The correctness of the Dirichlet and Neumann problems for the fractal diffusion equation is established.

Вступ

Виповнилось 60 років з часу публікації С.Д. Ейдельманом [1] основних результатів, які стосувались досліджень фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК) та крайових задач для параболічних за І.Г. Петровським рівнянь і систем. За останні десять років появилось ряд праць, у яких розглядаються задачі для рівнянь з дробовими похідними. Зокрема, в однойменній статті [6] подано перелік публікацій, присвячених задачі Коші для фрактальних рівнянь параболічного типу. В ній також визначені та оцінені компоненти функції Гріна задачі Коші (ФГЗК) для рівнянь з параметричними коефіцієнтами і задачу Коші зі змінними коефіцієнтами зведено до нерегулярних інтегральних рівнянь. Як продовження дослідження, тут визначаються компоненти ФРЗК з формули для розв'язку як ядра оберненого оператора задачі Коші, оцінюються потенціали в конструкції ФРЗК. Для модельного рівняння дифузії розглядається задача Діріхле і Неймана.

§ 1. Задача Коші

1. Формулювання основного результату

У півпросторі $\Pi = (0,\infty) \times E_n$ розглядається задача Коші для параболічного рівняння з похідною Капуто

$$\mathfrak{D}_t^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{u(0,t)}{t^\alpha} =$$

$$= \sum_{|k|\le 2b} A_k(x)\mathfrak{D}_x^k u + f(t,x), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \alpha \in (0,1). \tag{2}$$

У праці [6] розв'язок задачі (1), (2) відшукується у вигляді суми потенціалів

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n} G_1(t, x-\xi, \xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} G_2(t-\tau, x-\xi, \xi)\mu(\tau,\xi)d\xi \tag{3}$$

з невідомою густиною $\mu(t,x)$, яка повинна бути розв'язком інтегрального рівняння

$$\mu(t,x) = \mathcal{F}(t,x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \mathcal{K}(t-\tau, x, \xi)\times$$

$$\times\mu(\tau,\xi)d\xi = \mathcal{F} + \mathcal{K}\times\mu \tag{4}$$

з ядром

$$\mathcal{K}(t,x,\xi) \equiv L(\mathfrak{D})G_2 = \tag{5}$$

$$= \sum_{|k|\le 2b} \left[A_k(x) - \delta_{2bk} A_k(\xi)\right] \mathfrak{D}_x^k G_2(t, x-\xi, \xi),$$

де $\delta_{2bk} = 1$, якщо $|k| = 2b$; $\delta_{2bk} = 0$, якщо $|k| < 2b$.

З формули (3) випливає зображення розв'язку за допомогою компонент ФРЗК $Z = (Z_1, Z_2)$

$$u(t,x) = \int_{E_n} Z_1(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z_2(t-\tau, x, \xi)\rho(\tau,\xi)d\xi. \qquad (6)$$

Тут позначено

$$Z_1 = G_1 + G_2 \times \times [LG_1 + R \times \times LG_1] \equiv$$

$$\equiv G_1 + W_1, \qquad (7)$$

$$Z_2 = G_2 + G_2 \times \times R \equiv G_2 + W_2.$$

R – резольвента рівняння (4), яка відповідає ядру $\mathcal{K}(t,x,\xi)$. Функції G_1, G_2 – компоненти функції Гріна задачі Коші для рівняння з параметром $\xi \in E_n$.

$$\mathfrak{D}_t^\alpha u = \sum_{|k|=2b} A_k(\xi)\mathfrak{D}_x^k u \equiv \mathcal{P}(\xi, \mathfrak{D})u.$$

Вони знайдені в [6] з допомогою функції Гріна параболічного рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{P}(\xi,\mathfrak{D})u$ і для них встановлені оцінки

$$\left|\mathfrak{D}_x^k G_1(t, x-\xi, \xi)\right| \le C_k e^{-c|\widehat{x}-\xi|^q}\Psi_k(x) =$$

$$= C_k e^{-c|\widehat{x}|^q} \begin{cases} t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}, n+|k| < 2b, \\ t^{-\alpha}\left(|\ln|\widehat{x}|| + 1\right), n+|k| = 2b, \\ t^{-\alpha}|x|^{-(n+|k|-2b)}, n+|k| > 2b, \end{cases}$$

$$\left|\mathfrak{D}_x^k G_2(t, x-\xi, \xi)\right| \le$$

$$\le C_k \Psi_k(x) t^{-1+\alpha}\exp\{-c|\widehat{x}|^q\}. \qquad (8)$$

Якщо $A_k \in C^{(\omega)}(E_n)$, тобто функції $A_k(\xi)$ неперервні з модулем неперервності ω, то приріст задовольняє нерівність

$$\left|\Delta_\xi \mathfrak{D}_x^k G_i(t, x-\xi, \xi)\right| \le$$

$$\le C_k\omega(|\Delta\xi|)\Psi_k(x)\exp\{-c|\widehat{x}|^q\}, \qquad (9)$$

де $\widehat{x} = xt^{-\frac{\alpha}{2b}}$, $q = \frac{2b}{2b-\alpha}$.

Теорема 1 (про ФРЗК). *Припустимо, що рівняння* (1) *рівномірно параболічне* $(-1)^b\mathrm{Re}\left(\sum_{|k|=2b} A_k\sigma^k\right) \le -\delta_0|\sigma|^{2b}$, $\delta_0 = const > 0$, $\sigma \in E_n$. *Модуль неперервності* $\omega(n)$ *коефіцієнтів задовольняє умови:* $A\omega(n) = \int_0^n \frac{\omega(i)}{\tau}d\tau = F(n)$, $\omega(n) \le \omega_1(n)\omega_2(n)$, $A\omega_i = F_i(n)$, $\Phi_i(n) = AF_i(n) < \infty$. *Тоді для потенціалів* W_i *в компонентах* Z_i *ФРЗК формули* (7) *справджуються нерівності*

$$|\mathfrak{D}_x^{2b} W_2(t-\tau, x-\xi)| \le C\Phi(t-\tau, x-\xi)\times$$

$$\times (t-\tau)^{-1} e^{-c_1|\widehat{x-\xi}|^q}|x-\xi|^{-n}, \qquad (10)$$

де $\Phi(t,x) = \left[\Phi_1\left(t^{\frac{\alpha}{2b}}\right) + \Phi_2\left(t^{\frac{\alpha}{2b}}\right)\right]\left[\omega_1(|x|) + \omega_2(x)|\ln|x-\xi||\right]$,

$$|\mathfrak{D}_x^k W_2(t-\tau, x-\xi)| \le C(t-\tau)^{-1}\times$$

$$\times |x-\xi|^{-(n+|k|-2b)} F(|x-\xi|)|\ln|x-\xi||e^{-c_1|\widehat{x-\xi}|^q},$$

$$(|k| < 2b, n+|k| > 2b) \qquad (11)$$

$$|\mathfrak{D}_x^k W_2(t-\tau, x-\xi)| \le C\left[F_1\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right) +\right.$$

$$\left.+ W_1(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}|\ln|x-\xi||\right](t-\tau)^{-1}|\ln|x-\xi||,$$

$$(n+|k| = 2b) \qquad (12)$$

$$|\mathfrak{D}_x^k W_2(t-\tau, x-\xi)| \le C_k(t-\tau)^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}-1+\alpha}\times$$

$$\times \Phi\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right)\exp\{-c_1|\widehat{x}-\xi|^q\},$$

$$(n+|k| < 2b). \qquad (13)$$

Для $|\mathfrak{D}_x^k W_1|$ *правильні нерівності* (10)–(13), *тільки в них* $(t-\tau)^{-1}$ *замінюється на* $(t-\tau)^{-\alpha}$, $0 < c_1 < c$.

Доведення теореми проведемо по етапах.

2. Оцінка приросту резольвенти

Будемо користуватись лемами, які нами доведені раніше.

Лема 1. [6, с. 109] *Для об'ємного інтеграла*

$$I_t(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta}\int_{E_n} e^{-\varepsilon|x-\widehat{y}|^q}\times$$

$$\times \frac{\omega_1(|x-y|)}{|x-y|^n}\cdot\frac{\omega_2(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}dy$$

з модулем неперервності $\omega_1(n)\omega_2(n)$, які задовольнять умови в теоремі, правильна нерівність

$$I_t(t,\tau,x,\xi) \le c_\varepsilon \left[\Phi_1\left((t-\tau)^\alpha\right)\omega_2(|x-\xi|) + \right.$$

$$\left. + \Phi_2\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right)\omega_1(|x-\xi|)\right]|x-\xi|^{-n},$$

де $\Phi_i(n) = A^2\omega_i(n)$, $\varepsilon > 0$.

Лема 2. [5, с. 201] *Для об'ємного інтеграла*

$$I(x,\xi) = \int\limits_{E_n} e^{-c_0|x-y|}\ln\frac{1}{|x-y|}\frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}dy$$

виконується нерівність

$$I(x,\xi) \le C(c_0,n)\ln\frac{1}{|x-\xi|} + c_1,$$

якщо $F(h) = \int\limits_0^h \omega(\tau)\tau^{-1}d\tau < \infty$.

Також правильна нерівність

$$\int\limits_{E_n} e^{-c|x-y|}\frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}|x-y|^{-\beta}dy \le$$

$$C|x-\xi|^{-\beta}\max\left\{F(|x-\xi|), \omega\left(|x-\xi|^{\frac{\beta}{n}}\right)\right\},$$

$$\beta \in (0,n).$$

Резольвенти $R(t,x,\xi)$ для ядра $K(t,x,\xi)$ із (5) в [6] побудована в припущенні, що $A_k \in c^{(\omega)}(E_n)$ і $A^2\omega(n) = F(n) < \infty$, а ядро K та R на основі нерівностей (8) для $G_2(t,x,\xi)$ допускають оцінку

$$|R(t,\tau,x,\xi)| \le C(t-\tau)^{-1}\omega(|x-\xi|)\times$$

$$\times\exp\{-c|\widehat{x}-\xi|^q\}. \qquad (14)$$

Покажемо, що за умов теореми на модулі $\omega_i(n)$, $(i=1,2)$, для приросту $\Delta_x K(t,\tau,x,\xi)$ і $\Delta_x R(t,\tau,x,\xi)$ правильна нерівність,

$$|\Delta_x K(t,\tau,x,\xi)| \le C\frac{\omega_1(|\Delta x|)}{t-\tau}\times$$

$$\times\left[e^{-c_1|x+\widehat{\Delta x}-\xi|^q}\omega_2(|x+\Delta x-\xi|)|x+\Delta x-\xi|^{-n} + \right.$$

$$\left. + e^{-c|\widehat{x}-\xi|^q}\omega_2(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}\right]. \qquad (15)$$

Розглядаємо ядро K в (5) і припустимо, що $|x-\xi| \ge 2|h|$, $h \equiv \Delta x$, а приріст $\Delta_x K$ запишемо у вигляді суми

$$\Delta_x K(t,\tau,x,\xi) =$$

$$= \sum_{|k|=2b}\Delta_x A_k(x)\mathfrak{D}_x^k G_2(t-\tau,x+h-\xi,\xi) +$$

$$+ \sum_{|k|=2b}[A_k(x)-A_k(\xi)]\Delta_x\mathfrak{D}_x^k G_2(t-\tau,x-\xi,\xi) +$$

$$+ \sum_{|k|<2b}\Delta_x[A_k(x)\mathfrak{D}_x^k G_2]. \qquad (16)$$

Для оцінки першого доданка скористаємось нерівностями (8) і $|\Delta_x A_k(x)| \le \omega(|h|) \le \omega_1(|h|)\omega_2\left(\frac{|x-\xi|}{2}\right) \le 2\omega_1(|h|)\omega_2(|x-\xi|)$.

До другого і третього доданка застосуємо теорему про середнє, беручи до уваги, що $|x+ah-\xi| \ge \frac{|x-\xi|}{2}$ та нерівність $\omega_1(|x-\xi|)|x-\xi|^{-1} \le 2\omega_1(|h|)|h|^{-1}$. Будемо мати нерівність

$$\frac{\omega(|x-\xi|)}{|x+ah-\xi|^n}e^{-c|x+\underline{ah}-\xi|^q}|h| \le$$

$$\le (\omega_1(|h|)\omega_2(|x-\xi|))e^{-c_2|x-\xi|^q}|x-\xi|^{-n},$$

з використанням якої вже випливає оцінка (15), $0 < c_2 < c_0$. Якщо $|x-\xi| < 2|h|$, доданки в (16) оцінюємо по модулю і враховуємо нерівності (8), $\omega_1(|x+h-\xi|) \le 3\omega_1(|h|)$. Приходимо до (15) для приросту $\Delta_x K$.

Резольвента $R(t,\tau,x,\xi)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$R(t,\tau,x,\xi) = K(t,\tau,x,\xi) +$$

$$+ \int\limits_\tau^t d\beta\int\limits_{E_n}K(t,\beta,x,y)R(\beta,\tau,y,\xi)dy. \qquad (17)$$

Щоб довести для ΔR нерівність (15), оцінимо приріст інтеграла в (17) за допомогою (14), (15) та леми 1

$$|\Delta_x K \times \times R| \le$$

$$\le \int\limits_\tau^t d\beta\int\limits_{E_n}|\Delta_x K(t,\beta,x,y)R(\beta,\tau,y,\xi)|dy \le$$

$$\le C\frac{\omega_1(|\Delta x|)}{t-\tau}\int\limits_\tau^t\left(\frac{1}{t-\beta} + \frac{1}{p-\tau}\right)\times$$

$$\times \int\limits_{E_n} \left(\frac{e^{-c_1|\widehat{x+h-y}|^q}\omega_2(|x+h-y|)}{|x+h-y|^n} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-c_1|\widehat{x-y}|^q}\omega_2(|x-y|)}{|x-y|^n} \right) \frac{e^{-c_1|\widehat{y-\xi}|^q}\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy =$$

$$= C\frac{\omega_1(|\Delta x|)}{t-\tau} \left[I_t(t,\tau,x+h,\xi) + I_t(t,\tau,x,\xi) + \right.$$
$$\left. + I_\tau(t,\tau,x+h,\xi) + I_\tau(t,\tau,x,\xi) \right].$$

Застосовуючи до кожного доданку лему 1 і нерівність $|\widehat{x-y}|^q + |\widehat{y-\xi}|^q \geq |\widehat{x-\xi}|^q$, отримуємо необхідну оцінку (15)

$$|\Delta_x K \times \times R| \leq C\frac{\omega_1(|\Delta x|)}{t-\tau} \Phi_2\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right) \times$$
$$\times \left[e^{-c_2|\widehat{x+h-\xi}|^q}\omega_2(|x+h-\xi|)|x+h-\xi|^{-n} + \right.$$
$$\left. + \omega_2(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n} e^{-c_2|\widehat{x+\xi}|^q} \right],$$
$$(0 < c_2 < c_1). \tag{18}$$

3. Оцінки компонент фундаментального розв'язку

Компоненти ФРЗК визначені формулами (7). Розглянемо і оцінимо старші похідні $W_2 = G_2 \times \times R$. Скористаємось зображенням

$$\mathfrak{D}_x^{2b} W_2(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{E_n} \mathfrak{D}_x^{2b} W_2(t,\tau,x-y,y) \times$$
$$\times [R(\beta,\tau,y,\xi) - R(\beta,\tau,x,\xi)] dy +$$
$$+ \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{E_n} \left[\mathfrak{D}_x^{2b} G_2(t,\beta,x-y,y) - \right.$$
$$\left. - \mathfrak{D}_x^{2b} G_2(t,\beta,x-y,z) \right]_{z=x} dy \cdot R(\beta,\tau,x,\xi) +$$
$$+ \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{E_n} \mathfrak{D}_x^{2b} G_2(t,\beta,x-y,z)_{z=x} dy \cdot R \equiv$$
$$\equiv H_1 + H_2 + O. \tag{19}$$

Оцінимо співмножники в H_1 за допомогою нерівностей (8), (15). Отримаємо, що

$$|H_1| \leq C \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{(\beta-\tau)(t-\beta)} \int\limits_{E_n} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \times$$
$$\times \frac{\omega_1(|x-y|)}{|x-y|^n} \left[e^{-c_2|\widehat{y-\xi}|^q} \frac{\omega_2(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} + \right.$$
$$\left. + e^{-c_2\left(\frac{|x-\xi|}{(\beta-\xi)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} \frac{\omega_2(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \right] dy.$$

Якщо скористатись зображенням інтегралів у лемі 1 $I_t(t,\tau,x,\xi)$ і $I_\tau(t,\tau,x,\xi)$, то права частина цієї нерівності набуде вигляду

$$|H_1| \leq \frac{C}{t-\tau} \left[I_t(t,\tau,x,\xi) + I_\tau(t,\tau,x,\xi) \right] +$$
$$+ \frac{C}{t-\tau} \int\limits_\tau^t \left(\frac{1}{t-\beta} + \frac{1}{\beta-\tau} \right) d\beta \times$$
$$\times \int\limits_{E_n} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega_1(|x-y|)}{|x-y|^n} e^{-c\left(\frac{|x-\xi|}{(\beta-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} dy \times$$
$$\times \omega_2(|x-\xi|)|x-\xi|^n \equiv C(t-\tau)^{-1}[I_t + I_\tau] +$$
$$+ \frac{C}{(t-\tau)} Q(t,\tau,x,\xi)\omega_2(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}.$$

Інтеграли I_t, I_τ оцінені в лемі 1, тому досить розглянути інтеграл $Q(t,\tau,x,\xi)$, який є сумою

$$Q(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \int\limits_{E_n} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \times$$
$$\times \frac{\omega_1(|x-y|)}{|x-y|^n} dy \cdot e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q} +$$
$$+ \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{\beta-\tau} \int\limits_{E_n} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega_1(|x-y|)}{|x-y|^n} dy \times$$
$$\times e^{-c\left(\frac{|x-\xi|}{(\beta-\tau)^{1/2}}\right)^q}.$$

Якщо в першому доданку область інтегрування E_n розбити на частини $|x-y| \leq (t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}$ і $|x-y| > (t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}$ і скористатись властивістю незростання функції $\omega(t)t^{-1}$, а в другому поміняти порядок інтегрування, то отримаємо нерівність

$$|Q(t,\tau,x,\xi)| \leq e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q} C \left[\int\limits_0^{t^{\alpha/2b}} \frac{d\beta}{\beta} \int\limits_0^\beta \frac{\omega_1(\tau)}{\tau} d\tau + \right.$$

$$+F_1\left[(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right]\left|ln\frac{1}{|\widehat{x-\xi}|}\right|\Bigg]=e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}\times$$

$$\times\left[\Phi_1\left[(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right]+F_1\left[(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right]\left|ln|\widehat{x-\xi}|\right|\right].$$

Внаслідок леми 1 і цієї нерівності приходимо оцінки

$$|H_1|\le\frac{C}{(t-\tau)|x-\xi|^n}\left[\Phi_1\left[(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right]+\right.$$

$$\left.+\Phi_2\left[(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right]\right]\omega_1(|x-\xi|)+F_1\left[(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right]\times$$

$$\times\omega_2(|x-\xi|)\left[|ln|x-\xi|+1|\right]e^{-c_1|\widehat{x-\xi}|^q}. \qquad (20)$$

Значно простіше оцінюється інтеграл H_2 на основі нерівностей (9) і (14) для ядра і резольвенти

$$|H_2|\le C\int_\tau^t\frac{d\beta}{(t-\beta)(\beta-\tau)}\int_{E_n}e^{-c|\widehat{x-y}|^q}\times$$

$$\times\frac{\omega|x-y|}{|x-y|^n}\frac{\omega|x-\xi|}{|x-\xi|^n}e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}dy.$$

Записуючи праву частину цього співвідношення як суму інтегралів $I_t(t,\tau,x,\xi)$, $I_\tau(t,\tau,x,\xi)$ за лемою 1 знаходимо

$$|H_2|\le C(t-\tau)^{-1}\Phi\left[(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right]\omega(|x-\xi|)\times$$

$$\times|x-\xi|^{-n}e^{-c_2|x-\xi|^q}. \qquad (21)$$

За властивістю функції $G_2(t-\tau,x-\xi,x)$ третій доданок в (19) дорівнює нулеві. Із нерівностей (20), (21) для H_1 і H_2, беручи до уваги співвідношення для функцій F_i, Φ_i, в умові теореми дістаємо оцінку $\mathfrak{D}_x^{2b}W_2(t,\tau,x,\xi)$ у вигляді нерівності (10).

Розглянемо тепер $\mathfrak{D}_x^kW_2(t,\tau,x,\xi)$ у випадку $|k|<2b$ і застосуємо для оцінки нерівності (8) і (14):

$$|\mathfrak{D}_x^kW_2|\le\int_\tau^t d\beta\int_{E_n}|\mathfrak{D}_x^kG_2||R|dy\le$$

$$\le\frac{C}{t-\tau}\int_\tau^t\left(\frac{1}{t-\beta}+\frac{1}{\beta-\tau}\right)d\beta\times$$

$$\times\int_{E_n}\frac{e^{-c|\widehat{x-y}|^q}}{|x-y|^{n+|k|-2b}}\frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}e^{-c|\widehat{y-\xi}|^q}dy=$$

$$=C(t-\tau)^{-1}\int_\tau^t\frac{d\beta}{\beta-\tau}\int_{E_n}\frac{e^{-c|\widehat{x-y}|^q}}{|x-y|^{n+|k|-2b}}\times$$

$$\times\frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}e^{-c|\widehat{y-\xi}|^q}dy. \qquad (22)$$

В обох доданках поміняємо порядок інтегрування і скористаємось нерівністю

$$\int_\tau^t\frac{e^{-\varepsilon\left(\frac{|x-y|}{(t-\beta)^{\alpha/2b}}\right)^q}}{t-\beta}\le\int_{|x-y|/(t-\tau)^{\alpha/2b}}^\infty e^{-\varepsilon|z|^q}z^{-1}dz\le$$

$$\le C\left(ln\left(\frac{|x-y|}{(t-\tau)^{\alpha/2b}}\right)+1\right)$$

будемо мати

$$|\mathfrak{D}_x^kW_2|\le C(t-\tau)^{-1}\int_{E_n}e^{-\varepsilon\left(\frac{|x-y|}{(t-\tau)^{\alpha/2b}}\right)^q}\times$$

$$\times\frac{\left[\left|ln\frac{|x-y|}{(t-\tau)^{\alpha/2b}}+ln\frac{|y-\xi|}{(t-\tau)^{\alpha/2b}}\right|\right]}{|x-y|^{n+|k|-2b}}\times$$

$$\times\frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}dye^{-c_1|\widehat{x-\xi}|^q}.$$

Правильна така нерівність

$$E_x=\int_{E_n}e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q}\frac{\left|ln|\widehat{x-y}|\right|}{|x-y|^{n+k-2b}}\frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}dy\le$$

$$\le\frac{C\left|\ln|\widehat{x-\xi}|\right|}{|x-\xi|^{n+k-2b}}F(|x-\xi|). \qquad (23)$$

Дійсно, запишемо інтеграл $E_x(t,\tau,x,\xi)$ у вигляді суми

$$E_x=\int_{|x-y|\le r}e^{-\varepsilon|x-\widehat{y}|^q}\ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\times$$

$$\times|x-y|^{-(n+k-2b)}\frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}dy+$$

$$+\int_{|x-y|>r}e^{-\varepsilon|x-\widehat{y}|^q}\ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\times$$

$$\times|x-y|^{-(n+k-2b)}\frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}dy\equiv E_1+E_2,$$

де $r = \dfrac{|x-\xi|}{2} < 1$. У інтегралі E_1, очевидно, $|y-\xi| \geq r$, тому

$$E_1 \leq 2^n \frac{\omega(r)}{r^n} \rho_n \int\limits_0^r e^{-\varepsilon\rho^q} \ln\frac{1}{\rho} \cdot \rho^{-(n+k-2b)} \rho^{n-1} d\rho \leq$$

$$\leq C_n \frac{\omega(r)}{2^n} \int\limits_0^r \ln\frac{1}{\rho} \cdot \rho^{2b-k-1} d\rho = c_n \frac{\omega(r)}{2^n} \times$$

$$\times \left[\ln\rho \cdot \rho^{2b-k}|_0^r - \int\limits_0^r \rho^{2b-|k|+1} d\rho \right].$$

Звідси отримаємо

$$E_1 \leq C_n \omega(|x-\xi|) |x-\xi|^{-(n+|k|-2b)} \ln\frac{1}{|x-\xi|}.$$

В інтегралі E_2 маємо, що $\ln\frac{1}{|x-y|} < \ln\frac{1}{|x-\xi|}$, бо $|x-y| > r$. За цієї нерівності отримуємо

$$E_2 \leq \ln\frac{1}{|x-\xi|} \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} |x-y|^{-(n+k-2b)} \times$$

$$\times \omega(|y-\xi|) |y-\xi|^{-n} dy.$$

Останній інтеграл оцінено в лемі 2, а саме

$$E_2 \leq C \ln\frac{1}{|x-\xi|} \cdot |x-\xi|^{-(n+|k|-2b)} \times$$

$$\times \max\{F(|x-\xi|), \omega(|x-\xi|^{\gamma_k})\},$$

де $\gamma_k = \dfrac{1}{n}(n+|k|-2b)$, $(|k| < 2b)$.

Отже, нерівність (22) встановлена. Також зазначимо, що для інтеграла

$$E_\xi = \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon|y-\xi|^q} |\ln|y-\xi|| \, \omega(|y-\xi|) \times$$

$$\times |y-\xi|^{-n} |x-y|^{-(n+|k|-2b)} dy$$

справджується нерівність, що для E_2.

З оцінок інтегралів E_x, E_ξ випливає, що

$$|\mathfrak{D}_x^k W_2(t,\tau,x,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-1} |x-\xi|^{-(n+|k|-2b)} \times$$

$$\times F(|x-\xi|) \, |\ln|x-\xi|| \, e^{-c_2|\widehat{x-\xi}|^q},$$

$$(|k| < 2b, \; n+|k| > 2b).$$

Тобто порядок особливості молодших похідних $\mathfrak{D}_x^k W_2(t,\tau,x,\xi)$ в конструкції $Z_2 = G_2 - W_2$ менший, ніж похідних функції Гріна при $\mathfrak{D}_x^k G_2$ і ці похідні сумовні.

Нехай в $\mathfrak{D}_x^k W_2$ маємо, що $n + |k| = 2b$.

Тоді з нерівностей (8) і (14) випливає, що необхідно оцінити інтеграл

$$I_t \equiv \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \int\limits_{E_n} \ln\frac{1}{|x-y|} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \omega(|y-\xi|) \times$$

$$\times |y-\xi|^{-n} e^{-c|\widehat{y-\xi}|^q} dy = \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \int\limits_{|x-y|\leq r} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \times$$

$$\times \ln\frac{1}{|x-y|} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} e^{-c|\widehat{y-\xi}|^q} dy +$$

$$+ \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \int\limits_{|x-y|>r} e^{-c_1|\widehat{x-y}|^q} \ln\frac{1}{|x-y|} \times$$

$$\times \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} e^{-c|\widehat{y-\xi}|^q} dy \equiv I_1 + I_2.$$

В інтегралі I_2 внутрішній інтеграл вище оцінено, ніж E_1. Замінимо в I_2 порядок інтегрування, тоді підінтегральна функція доможиться на $\ln\dfrac{(t-\tau)^{\alpha/2b}}{|x-y|}$ після інтегрування по аргументу β. В результаті отримаємо нерівність

$$I_1(t,\tau,x,\xi) \leq C\omega(|x-\xi|) \times$$

$$\times \ln^2|x-\xi| e^{-c_1|x-\xi|^q}. \tag{24}$$

Оскільки в I_2 маємо, що $|x-y| \geq r$, то $\ln\dfrac{1}{|x-y|} \leq \ln\dfrac{1}{|x-\xi|}$

$$I_2 \leq \int\limits_\tau^t \frac{e^{-c_1\left(\frac{r}{(\tau-\beta)^{\alpha/2b}}\right)^q}}{t-\beta} d\beta \times$$

$$\times \omega_1\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right) \int\limits_{|x-y|>r} e^{-c_1|\widehat{y-\xi}|^q} \times$$

$$\times \ln\frac{1}{|x-y|} \frac{\omega_2(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy.$$

За лемою 2 внутрішній інтеграл не перевищує $\left(\ln\frac{1}{|x-\xi|}+1\right)$, тому приходимо до нерівності

$$I_2(t,\tau,x,\xi)\le C\omega_1\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right)\times$$
$$\times\ln^2|x-\xi|e^{-c_1|\widehat{x-\xi}|^q}. \qquad (25)$$

Другий доданок з нерівності (22) є інтеграл

$$I_\tau=\int\limits_\tau^t\frac{d\beta}{\beta-\tau}\int e^{-c|\widehat{x-y}|^q}\times$$
$$\times\ln\frac{1}{|x-y|}\frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}e^{-c|\widehat{y-\xi}|^q}dy,$$

якщо не перевищує

$$I_\tau\le\int\limits_\tau^t\frac{\omega_1(\beta-\tau)^\alpha/2b}{\beta-\tau}d\beta\int e^{-c_1|\widehat{x-y}|^q}\times$$
$$\times\ln\frac{1}{|x-y|}\frac{\omega_2(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n}dy\le$$
$$\le CF_1(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\left(\ln\frac{1}{|x-\xi|}+1\right). \qquad (26)$$

З нерівностей (24)–(26) отримуємо оцінку (12). Значно простіше оцінюються похідні $\mathfrak{D}_x^kW_2$ для $|k|+n<2b$. Також відзначимо, що оцінка похідних $\mathfrak{D}_x^kW_1(t,\tau,x,\xi)$ проводиться аналогічно, але $\mathfrak{D}_x^kG_1(t,x-\xi,\xi)$ (згідно з нерівностями (8)) має меншу сумовну особливість при $t=\tau$, ніж $\mathfrak{D}_x^kG_2$, що спрощує виведення нерівностей (10)–(13).

Важливість для застосування оцінок похідних потенціалів $W_1(t,x,\xi)$ в конструкції компонент Z_1, Z_2 ФРЗК полягає в тому, що вони при умові на модуль неперервності коефіцієнтів мають меншу сумовну особливість, ніж функція Гріна рівнянь з сталими коефіцієнтами.

§2. Задача Діріхле і Неймана для півпростору

У області $\Pi=(0,\infty)\times E_{n-1}\times(0,\infty)$ розглянемо крайові задачі для рівняння з похідною Кануто

$$\mathfrak{D}_t^\alpha u\equiv\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}-\frac{u(0,x)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}=$$
$$=\Delta_xu+f(t,x), \qquad (27)$$
$$u|_{t=0}=u(x), \qquad (28)$$
$$u|_{x_n=0}=\mu(t,x'), \qquad (29)$$
$$\mathfrak{D}_{x_n}u|_{x_n=0}=g(t,x'), \qquad (30)$$

де Δ_x – оператор Лапласа $\Delta=\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha}$, $\alpha(0,1)$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ – дробова похідна Ліувілля Рімана: $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^tu(\tau,x)(t-\tau)^{-\alpha}d\tau.$

Згідно з теоремою 1 [6] компоненти функції Гріна $G_1(t,x)$, $G_2(t,x)$ задачі Коші (27), (28) визначаються формулами

$$G_1(t,x)=$$
$$=L_p^{-1}\left\{p^{\alpha-1}\int\limits_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}G_0(\tau,x)d\tau dp\right\}, \qquad (31)$$
$$G_2(t,x)=\mathfrak{D}_t^{1-\alpha}G_1(t,x)=$$
$$=L_p^{-1}\left\{\int\limits_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}G_0(\tau,x)d\tau\right\}dp,$$

де $G_0(t,x)=\frac{1}{(2\sqrt{\Pi}t)^n}e^{-\frac{|x|^2}{ut}}$ – функція Гріна задачі Коші для рівняння теплопровідності $u_t=\Delta u$, L_p^{-1} – оператор оберненого перетворення Лапласа.

Із формул (31) випливає, що $G_1(t,x)$, $G_2(t,x)$ похідні, наприклад, по аргументу x_n, а похідні неперервні.

Припустимо, що функції $f(t,x)$, $\mu(t,x')$, ...(t,x') – неперервні по t і по x належать класу $DimC_x^{(\omega)}$.

Продовживши $f(t,x)$, $\varphi(x)$ по x_n ..... чином при $x_n<0$, розв'язок задачі Коші (27), (28) отримаємо у вигляді

$$u_{\text{ЗК}}=\int\limits_{E_n^+}[G_1(t,x-\xi)-G_1(t,x'-\xi',x_n+\xi_n)]\times$$
$$\times\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^td\tau\int\limits_{E_n^+}[G_2(t-\tau,x-\xi)-$$

$$-G_2(t-\tau,x'-\xi',x_n+\xi_n)]\,f(\tau,\xi)d\xi\equiv$$
$$\equiv [G_1^-]\times\varphi+[G_2^-]\times\times f. \qquad (32)$$

Ця функція $u_{3К}$, як і для випадку класичного рівняння теплопровідності [2], задовольняє нульову умову Діріхле

$$u|_{x_n=0}=0. \qquad (33)$$

Покажемо, що розв'язок задачі Діріхле (27)–(29) з крайовою функцією $\mu(t,x')$ визначається формулою

$$u(t,x)=[G_1]\times\varphi+[G_2]\times\times f+V(t,x), \quad (34)$$

де $V(t,x)=-2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_{n-1}}G'_{2x_n}(t-\tau,x-\xi)\times$

$$\times\mu(\tau,\xi')d\xi. \qquad (35)$$

На основі зв'язку $G_2(t,x)=\mathfrak{D}_t^{1-\alpha}G_1(t,x)$ [6, с. 108] маємо, що $\mathfrak{D}_t^\alpha(G_2\times\times\mu)=\mathfrak{D}_t(G_1\times\times\mu)$, тому при $x_n>0$

$$(\mathfrak{D}_t^\alpha-\Delta_x)V=(\mathfrak{D}_t^\alpha-\Delta_x)G'_{2x_n}\times\times\mu=$$
$$\frac{\partial}{\partial x_n}(\mathfrak{D}_t^\alpha-\Delta_x)G_2\times\times\mu=0,$$

тобто $v(t,x)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння (27), а сума в (34) задовольняє неоднорідне рівняння.

Щоб встановити граничне співвідношення (29) для $u(t,x)$ необхідно довести, що $\lim\limits_{x_n\to0}v(t,x)=\mu(t,x')$. На основі теореми 1 [6, с. 102] для функції $G_2(t,x)$, яка визначена формулою (31), дістаємо таке зображення і оцінки похідної $G'_{x_n}(t,x)$:

$$G'_{2x_n}(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_a}e^{pt}dp\int\limits_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}\frac{(-x_n)}{2\tau}\times$$
$$\times\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}}}{(2\sqrt{\pi}\tau)^n}d\tau,$$
$$|\mathfrak{D}_{x_n}G_2(t,x)|\le$$
$$\le C\begin{cases} t^{-1}|x|^{-n}x_ne^{-c|\hat{x}|^q}, & |\hat{x}|<1,\\ t^{-1-\frac{\alpha n}{2}}x_ne^{-c|\hat{x}|^q}, & |\hat{x}|\ge1,\end{cases} \qquad (36)$$

де $\hat{x}=xt^{-\frac{\alpha}{2}}$, $q=\dfrac{2}{2-\alpha}$

Інтеграл $v(t,x)$ запишемо у вигляді суми

$$v(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_{n-1}}\frac{\partial}{\partial x_n}G_2(t-\tau,x-\xi')\times$$
$$\times[\mu(\tau,\xi')-\mu(\tau,x')]d\xi'+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_{n-1}}G'_{2x_n}\times$$
$$\times\mu(\tau,x')d\xi'\equiv H+R(t,x). \qquad (37)$$

У інтегралі $R(t,x)$, який є згорткою, виконаємо інтегрування по ξ' і скористаємось рівностями

$$\int\limits_{E_{n-1}}G_0(t,\xi')d\xi'=\int\limits_{E_{n-1}}\frac{e^{-\frac{|\xi'|^2}{t}}}{(2\sqrt{\pi}t)^{n-1}}d\xi=1,$$
$$\int\limits_0^\infty\frac{e^{-p^\alpha\tau-\frac{x_n^2}{4\tau}}}{2\sqrt{\pi\tau}}d\tau=\frac{e^{p^{\frac{\alpha}{2}}x_n}}{2\sqrt{p^\alpha}}.$$

Тоді будемо мати

$$R(t,x)=\int\limits_0^t L_p^{-1}\left\{\left(\frac{e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}x_n}}{2\sqrt{p^{\frac{\alpha}{2}}}}\right)'_{x_n}\right\}\mu(\tau,x')d\tau=$$
$$=\int\limits_0^t L_p^{-1}\left(e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}x_n}\right)f(\tau,x')d\tau.$$

Згортку $\int\limits_0^t f(t-\tau)y(\tau)d\tau$ можна представити у вигляді інтеграла Лапласа

$$\int\limits_0^t f(t-\tau)y(\tau)d\tau=L_p^{-1}\left\{\tilde{f}(p)\cdot\tilde{g}(p)\right\},\ \tilde{f}=Lf.$$

Тому дістаємо, що

$$R(t,x)=L_p^{-1}\left\{e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}x_n}\tilde{f}_1(p,x')\right\}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_a}e^{pt-p^{\frac{\alpha}{2}}x_n}\tilde{\mu}(p,x')dp.$$

Якщо $\mu(t,x')$ по змінній t оригінал, то

$$\lim_{x_n\to0}R(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_a}e^{pt}\tilde{\mu}(p,x')dp=$$

$$= \mu(t,x'). \tag{38}$$

Залишилось довести, що інтеграл $H(t,x)$ в формулі (37) при $x_n \to 0$ прямує до нуля. Справді, маємо

$$H(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{|x'-\xi'|<(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} G'_{x_n}[\mu(\tau,\xi')-$$

$$-\mu(\tau,x')]d\xi' + \int_0^t d\tau \int_{|x'-\xi'|\geq(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} G'_{x_n}[\mu(\tau,\xi')-$$

$$-\mu(\tau,x')]d\xi' = H_1 + H_2.$$

За припущенням $|\mu(\tau,x') - \mu(\tau,\xi')| \leq \omega(|x'-\xi'|)$, при чому $\omega(h) \leq \omega_1(h)\omega_2(h)$, де модулі $\omega_i(h)$ неспадні і $F_i(h) = \int_0^h \omega_i(\tau)\tau^{-1}d\tau < \infty$, $i = 1, 2$. Користуючись першою нерівністю в (36) для $G'_{x_n}(t,x)$ знаходимо

$$|H_1| \leq C \int_0^t \frac{\omega_1\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\right)}{t-\tau} d\tau \times$$

$$\times \int_{|x'-\xi'|\leq(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\omega_2(|x'-\xi'|)x_n}{|x-\xi'|^n} \times$$

$$\times e^{-c\left(\frac{|x'-\xi'|}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^q} d\xi' \cdot |\mu|_\omega. \tag{39}$$

В інтегралі по ξ' перейдемо до сферичної системи координат і $t-\tau = \beta^{\frac{2}{\alpha}}$, будемо мати

$$|H_1| \leq C_\alpha \int_0^{t^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\omega_1(\beta)}{\beta} d\beta \left[\int_0^\delta \frac{\omega_2(\rho)\rho^{n-2}x_n}{(x_n^2+\rho^2)^n} d\rho + \right.$$

$$\left. + \int_\delta^\infty \frac{\omega_2(\rho)\rho^{n-2}x_n}{(x_n^2+\rho^2)^n} e^{-\left(\frac{\rho}{\beta}\right)^q} d\rho \right].$$

Далі, беручи до уваги нерівності

$$\int_0^\delta \frac{\omega_2(\rho)\rho^{n-2}x_n}{(x_n^2+\rho^2)^n} d\rho \leq \int_0^\delta \frac{\omega_2(\rho)}{\rho} d\rho = F_2(\delta);$$

$$\int_\delta^\infty \frac{\omega_2(\rho)\rho^{n-2}x_n}{(x_n^2+\rho^2)^n} e^{-\left(\frac{\rho}{\beta}\right)^q} d\rho \leq 2\frac{\omega(\delta)x_n}{\delta} \times$$

$$\times \int_\delta^\infty \frac{d\rho}{x_n^2+\rho^2} = 2\frac{\omega(\delta)x_n}{\delta} .....tg\frac{\delta}{x_n},$$

приходимо до оцінки

$$|H_1| \leq C_1 F_1\left(T^{\frac{\alpha}{2}}\right) F_2(\delta) + C_2 \frac{\omega_2(\delta)}{\delta} x_n. \tag{40}$$

У інтегралі H_2, підінтегральну функцію якого позначимо через $\Phi(t,\tau,x,\xi)$, $|x'-\xi'| \geq (t-\tau)\frac{\alpha}{2}$, тому за другою нерівністю із (36) знаходимо

$$|\Phi(t,\tau,x,\xi')| \leq C(t-\tau)^{-\frac{\alpha n}{2}-1} e^{-c\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^q} \times$$

$$\times \omega(|x'-\xi'|)x_n.$$

Використовуючи нерівності $|z|^m e^{-\varepsilon|z|^q} \leq const$, $\omega(\lambda|x|) \leq (1+\lambda)\omega(|x|)$, $\lambda > 0$, для Φ отримуємо оцінку

$$|\Phi(t,\tau,x,\xi')| \leq C_\varepsilon \omega_1\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\right)(t-\tau)^{-1} \times$$

$$\times \omega_2(|x'-\xi'|)|x-\xi'|^{-n} x_n e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi'}|^q}. \tag{41}$$

Отже, для Φ правильна така ж нерівність як в інтегралі H_1. Тому і для H_2 справджується нерівність (40). Нехай тепер $\varepsilon > 0$ – довільне число, $F_2(\delta) = \int_0^\delta \omega_2(\tau)\tau^{-1}d\tau$ збіжний, тому існує $\delta_0(\varepsilon) > 0$ таке, що $C_1 F_2\left(T^{\frac{\alpha}{2}}\right) F_2(\delta) < \varepsilon/2$ при $0 < \delta < \delta_0$, оскільки $x_n \to 0$, то знайдеться $\delta_1(\varepsilon) > 0$ таке, що $C_2\omega_2(\delta)\delta^{-1}x_n < \varepsilon/2$ при $0 < x_n < \delta_1$. Отже, $|H(t,x)| < \varepsilon$ для $0 < x_n < \min\{\delta_0, \delta_1\}$, а це означає, що $\lim_{x_n\to 0} H(t,z) = 0$.

Зауважимо, що для інтеграла H правильна нерівність

$$|H| \leq C \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \times$$

$$\times \left[\int_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\omega(\rho)}{\rho} e^{-\left(\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^q + \omega\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\right)} \right] |M|_\omega \leq$$

$$\leq CF\left(T^{\frac{\alpha}{2}}\right)(\mu)_{\omega}, \qquad (42)$$

де $\Phi(h) = \int\limits_0^h F(\tau)\tau^{-1}d\tau$, $\Phi(h) \leq F_1(h)F_2(h)$.

Виконуючи інтегрування по ξ' в інтегралі $R(t,x)$ отримуємо

$$|R(t,x)| \leq C\int\limits_0^t x_n \frac{e^{-\left(\frac{x_n}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^q}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{E_{n-1}} G_0(\tau, x'-\xi')d\xi' \sup_{\Pi}|\mu| \leq$$

$$\leq C|\mu|_c x_n \int\limits_0^t \frac{e^{-\left(\frac{x_n}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^q}}{(\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}d\tau \leq C|\mu|_c. \qquad (43)$$

Теорема 2 (про коректність). *Припустимо, що в задачах* (27)–(30) *функції належать класам* $\varphi \in C^{(\omega)}(E_n^+)$, $f \in C^{(\omega_+)}(\Pi^+)$, $\mu \in C^{(\omega)}(\Pi)$, $g \in C^{(\omega)}(\Pi)$, *тоді розв'язок задачі Діріхле* (27)–(29) *визначається формулою* (34) *і задовольняє нерівність*

$$|\mathfrak{D}_x^k u(t,x)| \leq C_k\left(t^{-\alpha\frac{|k|}{2}}|\varphi|_{\omega_\varphi} + |f|_{\omega_f} + \right.$$

$$\left. + x_n^{-k_+}|\mu|_{\omega_\mu}\right), \ (k \leq 2). \qquad (44)$$

Розв'язок задачі Неймана (27), (28), (30) є сума потенціалів

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n^+}[G_1(t,x-\xi)+$$

$$+G_1(t,x'-\xi',x_n+\xi_n)]\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_n^+}[G_2(t-\tau,x-\xi)+$$

$$+G_2(t-\tau,x'-\xi',x_n+\xi_n)]f(\tau,\xi)d\xi-$$

$$-2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_{n-1}} G_2(t-\tau,x-\xi')g(\tau,\xi')d\xi', \ (45)$$

для похідних якої справджуються відповідні нерівності, де модулі неперервності задовольняють умови

$$\int\limits_0^h \frac{\omega_\varphi(\delta)+\omega_f(\delta)}{\tau}d\tau < \infty, \ \omega(h) \leq \omega_1(h), \omega_2(h),$$

$$F_i(h) = \int\limits_0^h \frac{\omega_i(\tau)}{\tau}d\tau < \infty, \ (i = 1, 2).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. С.Д. Эйдельман. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.

2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1953. – 680 с.

3. S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Koshubei. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appe. – 2004. – **152**. – 390 p.

4. А.Н. Кочубей. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 1990. – **24**, №4. – С. 485–492.

5. М.І. Матійчук. Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: ЧНУ, 2010. – 248 с.

6. М.І. Матійчук. Про зв'язок між фундаментальними розв'язками параболічних рівнянь і рівнянь з дробовими похідними // Буковинський математичний журнал. – 2016. **4**, № 3-4. – С. 101-114.