УДК 517.537.72

©2017 р. О. М. Мулява, М.М. Шеремета

Київський національний університет харчових технологій,
Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ МАКСИМАЛЬНИМИ ЧЛЕНАМИ ДВОХ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ ТА ВЛАСТИВОСТІ ТЕЙЛОРОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Встановлено зв'язок між зростанням максимальних членів двох цілих рядів Діріхле. Отриманий результат застосовано до узагальнення теорем Реньї про лакунарність степеневого розвинення цілої функції.

A relation between the growth of the maximal terms of two entire Dirichlet series is established. The obtained result is applied to the generalisation of Renyi theorems on the lacunarity of power development of entire function.

1. Вступ. Ще в 1899 р. Е. Фабрі [1] довів, що якщо степеневий ряд $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\|} \varphi_k z^{n_k}$ має радіус збіжності $R \in (0, +\|)$ і $\lim\limits_{k\to\|} k/n_k = 0$, то функція φ не продовжується аналітично через коло $\{z : |z| = R\}$. Цей результат можна сформулювати в дещо іншому вигляді. Для аналітичної в крузі $\{z : |z| < R\}$ функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\|} a_n z^n, \quad z = re^{i\theta}, \tag{1}$$

через $Z_0(n)$ позначимо кількість рівних нулеві коефіцієнтів a_j, для яких $j \le n$. Тоді якщо

$$\lim_{n\to\|} Z_0(n)/n = 1, \tag{2}$$

то функція f не продовжується аналітично через коло $\{z : |z| = R\}$. Якщо умова (2) виконується, то кажуть, що ряд (1) має лакуни Фабрі.

Як зазначила К. Реньї [2], Д. Пойа в усному повідомленні П. Ердешу висловив гіпотезу про те, що степеневі розвинення цілої трансцендентної функції f в околі двох різних точок $z = a$ і $z = b$ не можуть мати одночасно лакуни Фабрі, тобто, якщо $a \ne b$ і

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\|} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\|} \frac{f^n(b)}{n!}(z-b)^n, \tag{3}$$

а $Z_a(n)$ і $Z_b(n)$ - кількість рівних нулеві елементів множин $\{f(a), f'(a), \ldots, f^n(a)\}$ і $\{f(b), f'(b), \ldots, f^n(b)\}$ відповідно, то рівності

$$\lim_{n\to\|} Z_a(n)/n = 1, \quad \lim_{n\to\|} Z_b(n)/n = 1$$

не можуть виконуватись одночасно.

Зауваживши, що досить розглянути випадок, коли $a = 0$, $b = 1$ і коефіцієнти степневих розвинень (3) є дійсними, К. Реньї [2] показала, що гіпотеза Пойа є правильною, довівши таке твердження.

Теорема А Для кожної трансцендентної функції

$$\varliminf_{n\to\|}(Z_0(n) + Z_1(n))/n \le 1. \tag{4}$$

Пізніше А. Реньї і К. Реньї [3], узагальнюючи теорему А, довели наступне твердження.

Теорема Б Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\|} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\|} b_n (z-1)^n \tag{5}$$

- ціла трансцендентна функція, а

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\|} c_n z^n \tag{6}$$

- довільна ціла функція. Через $S_0(n)$ і $S_1(n)$ позначимо кількість тих індексів $k \le$

n, для яких відповідно $|a_k| \le |c_k|$ і $|b_k| \le |c_k|$. Тоді, якщо $\varrho[g] < \varrho[f]$, де $\varrho[g]$ і $\varrho[f]$ - порядки функцій g і f відповідно, то

$$\varliminf_{n\to\|}(S_0(n)+S_1(n))/n \le 1 + 2\varrho[g]/\varrho[f]. \quad (7)$$

Мета запропонованої нами замітки - показати, що в (7) замість $\varrho[g]$ і $\varrho[f]$ можна поставити нижні порядки $l[g]$ і $l[f]$. Для цього нам буде потрібним одне співвідношення між максимальними членами двох цілих рядів Діріхле.

2. Зв'язок між зростанням максимальних членів двох цілих рядів Діріхле. Отже, нехай Ł $= (l_n)$ – зростаюча до $+\|$ послідовність невід'ємних чисел, а ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\|} a_n \exp{(sl_n)},\ s = \sigma + it. \quad (8)$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = +\|$, тобто є цілим. Приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$, $\sigma < A$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp{(\sigma l_n)} : n \ge 0\}$ – максимальний член ряду (8), а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n|\exp{(\sigma l_n)} = \mu(\sigma, F)\}$ – його центральний індекс.

Через L позначимо клас додатних неперервних на $(-\infty, +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $-\infty < x \le x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ при $x_0 \le x \to +\infty$. Будемо говорити, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненими $\alpha\beta$-порядком і нижнім $\alpha\beta$-порядком додатної для $\sigma \ge \sigma_0$ функції $Q(\sigma)$ називаються відповідно величини

$$\varrho_{\alpha\beta}[Q] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(Q(\sigma))}{\beta(\sigma)},$$

$$l_{\alpha\beta}[Q] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(Q(\sigma))}{\beta(\sigma)}.$$

Теорема 1. Якщо $\beta(\ln x) \in L^0$, а ряди Діріхле (8) і $G(s) = \sum_{n=0}^{\|} c_n \exp{(sl_n)}$ є цілими, то рівносильним є такі твердження:

а) існує число $q \in (1, +\|)$ таке, що

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty}(\ln\, \mu(\beta^{-1}(q\sigma), G) - \ln\, \mu(\beta^{-1}(\sigma), F)) < +\|; \quad (9)$$

б) існує функція $\alpha \in L$ така, що $l_{\alpha\beta}[\ln\, \mu(\cdot, G)] < l_{\alpha\beta}[\ln\, \mu(\cdot, F)]$;

в) існує функція $\gamma \in L$ така, що $\varrho_{\gamma\beta}[\ln\, \mu(\cdot, G)] < \varrho_{\gamma\beta}[\ln\, \mu(\cdot, F)]$.

Доведення. Досить довести, рівносильність тверджень а) та б) і тверджень а) та в). Почнемо з тверджень а) та б). Припустимо, що існує число $q \in (1, +\|)$ таке, що виконується (9), але (від супротивного) для кожної функції $\alpha \in L$

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln\, \mu(\sigma, G))}{\beta(\sigma)} \ge \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln\, \mu(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}. \quad (10)$$

Виберемо $\P(\sigma) = \ln\, \mu(\sigma, F)$. Тоді функція $\P$ є неперервною, додатною і зростаючою до $+\|$ на $[\sigma_0, +\|)$ і, якщо $\alpha(x) = \beta(\P^{-1}(x))$, то $\alpha \in L$, а з (10) маємо

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\beta(\P^{-1}(\ln\, \mu(\sigma, G)))}{\beta(\sigma)} \ge \\ \ge \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\beta(\P^{-1}(\ln\, \mu(\sigma, F)))}{\beta(\sigma)} = 1,$$

тобто для кожного $\varepsilon \in (0,\, 1)$ і всіх $\sigma \ge \sigma_0(\varepsilon)$

$$\ln\, \mu(\sigma, G) \ge \P(\beta^{-1}((1-\varepsilon)\beta(\sigma)) = \\ = \ln\, \mu(\beta^{-1}((1-\varepsilon)\beta(\sigma)), F).$$

Тому для будь-якого $q > 1$ і $\varepsilon = (q-1)/(2q)$ маємо [4, с. 182]

$$\ln\, \mu(\beta^{-1}(q\sigma), G) - \ln\, \mu(\beta^{-1}(\sigma), F)) \ge \\ \ge \ln\, \mu(\beta^{-1}((q+1)\sigma/2), F) - \ln\, \mu(\beta^{-1}(\sigma), F)) \\ = \int\limits_{\beta^{-1}(\sigma)}^{\beta^{-1}((q+1)\sigma/2)} l_{\nu(x,F)}dx \ge \\ l_{(\nu(\beta^{-1}(\sigma),F))}(\beta^{-1}((q+1)\sigma/2) - \beta^{-1}(\sigma)) \to +\| \quad (11)$$

при $\sigma \to +\|$ за умови $\beta^{-1}(c\sigma) - \beta^{-1}(\sigma) \ge h(c) > 0$ для кожного $c > 1$ і всіх $\sigma \ge \sigma_0$.

Припустимо, від супротивного, що існує $c > 1$ таке, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує зростаюча до $+\|$ послідовність (σ_k), для якої $\beta^{-1}(c\sigma_k) - \beta^{-1}(\sigma_k) < \varepsilon$. Приймемо $x_k = \exp\{\beta^{-1}(\sigma_k)\}$. Тоді $c\beta(\ln x_k) \le \beta(\ln x_k +$

$\varepsilon) = \beta(\ln(e^{\varepsilon}x_k))$, тобто з огляду на умову $\beta(\ln x) \in L^0$, як доведено в [5],

$$c \leq \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\beta(\ln(e^{\varepsilon}x))}{\beta(\ln x)} = A(\varepsilon) \to 1, \quad \varepsilon \to 0,$$

що неможливо. Тому правильне співвідношення (11), яке суперечить (9), і отже, з а) випливає б).

Доведемо, що б) випливає а). Припустимо спочатку, що $l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] < +\|$. Тоді для кожного $\varepsilon \in (0, (l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] - l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, G)])/2)$ згідно з означенням нижнього $\alpha\beta$-порядку маємо

$$\alpha(\ln \mu(\sigma, F)) \geq (l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] - \varepsilon)\beta(\sigma)$$

для всіх $\sigma \geq \sigma_0$ і

$$\alpha(\ln \mu(\sigma_k, G)) \leq (l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, G)] + \varepsilon)\beta(\sigma_k)$$

для деякої зростаючою до $+\|$ послідовності (σ_k). Тому, якщо

$$q = \frac{l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] - \varepsilon}{l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, G)] + \varepsilon}, \tag{12}$$

то $q > 1$ і, якщо приймемо $t_k = \beta(\sigma_k)/q$, то

$$\ln \mu(\beta^{-1}(qt_k), G) \leq \alpha^{-1}((l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, G)]+\varepsilon)qt_k)$$

і

$$\ln \mu(\beta^{-1}(t_k), F) \geq \alpha^{-1}((l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] - \varepsilon)t_k),$$

звідки випливає, що $\ln \mu(\beta^{-1}(qt_k), G) - \ln \mu(\beta^{-1}(t_k), F) \leq 0$, тобто правильна нерівність (9) з $q > 1$, визначеним в (12).

Якщо $l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] = +\|$, то матимемо $\ln \mu(\beta^{-1}(t_k), F) \geq \alpha^{-1}(Kt_k)$ для будь-якого $K > 0$ і всіх $k \geq k_0$, тобто в результаті отримаємо (9) для будь-якого $q > 1$. Першу частину теореми 1 доведено.

Доведемо її другу частину. Припустимо спочатку що для деякого $q > 1$ виконується (9), але для кожної функції $\gamma \in L$

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\gamma(\ln \mu(\sigma, G))}{\beta(\sigma)} \geq \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\gamma(\ln \mu(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}. \tag{13}$$

Виберемо $\P(\sigma) = \ln \mu(\sigma, G)$ і приймемо $\gamma(x) = \beta(\P^{-1}(x))$. Тоді $\gamma \in L$, а з (13) отримуємо

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\beta(\P^{-1}(\ln \mu(\sigma, F)))}{\beta(\sigma)} \leq 1,$$

тобто для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$

$$\begin{gathered}\ln \mu(\sigma, F) \leq \P(\beta^{-1}((1+\varepsilon)\beta(\sigma)) = \\ = \ln \mu(\beta^{-1}((1+\varepsilon)\beta(\sigma)), G).\end{gathered}$$

Тому для будь-якого $q > 1$ і $\varepsilon = (q-1)/2$, як у доведенні першої частини, маємо

$$\begin{gathered}\ln \mu(\beta^{-1}(q\sigma), G) - \ln \mu(\beta^{-1}(\sigma), F)) \geq \\ \geq \ln \mu(\beta^{-1}(q\sigma), G) - \ln \mu(\beta^{-1}((1+\varepsilon)\sigma), G) = \\ = \int\limits_{\beta^{-1}((q+1)\sigma/2)}^{\beta^{-1}(q\sigma)} l_{\nu(x,G)}dx \geq l_{(\nu(\beta^{-1}((q+1)\sigma/2),G))} \times \\ \times(\beta^{-1}((q+1)\sigma/2) - \beta^{-1}(\sigma)) \to +\|\end{gathered}$$

при $\sigma \to +\|$, що неможливо, і отже, з а) випливає в).

Доведемо, що в) випливає а). Припускаючи, що $\varrho_{\gamma\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] < +\|$ для кожного $\varepsilon \in (0, (\varrho_{\gamma\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] - \varrho_{\gamma\beta}[\ln \mu(\cdot, G)])/2)$ за означенням $\gamma\beta$-порядку маємо

$$\ln \mu(\beta^{-1}(q\sigma), G) \leq \gamma^{-1}((\varrho_{\gamma\beta}[\ln \mu(\cdot, G)]+\varepsilon)q\sigma)$$

для всіх $q\sigma \geq \sigma_0$ і

$$\ln \mu(\beta^{-1}(t_k, F)) \geq \gamma^{-1}((\varrho_{\gamma\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] - \varepsilon)t_k)$$

для деякої зростаючою до $+\|$ послідовності (t_k). Тому, якщо приймемо

$$q = \frac{\varrho_{\gamma\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] - \varepsilon}{\varrho_{\gamma\beta}[\ln \mu(\cdot, G)] + \varepsilon}, \tag{14}$$

то $q > 1$ і $\ln \mu(\beta^{-1}(qt_k), G) - \ln \mu(\beta^{-1}(t_k), F) \leq 0$, тобто правильна нерівність (9) з $q > 1$, визначеним в (14).

Якщо $l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, F)] = +\|$, то, як вище, отримаємо (9) для будь-якого $q > 1$. Теорему 1 повністю доведено.

Зауваження 1. Зрозуміло, що якщо співвідношення (9) виконується для деякого $q > 1$, то воно є правильним і для $q_1 < q$. Тому з огляду на довільність ε з (12) і (14) випливає, що якщо за умови б) співвідношення (9) виконується для кожного $q \in \left(1, \dfrac{l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, F)]}{l_{\alpha\beta}[\ln \mu(\cdot, G)]}\right)$, а за умови б) - для кожного $q \in \left(1, \dfrac{\varrho_{\gamma\beta}[\ln \mu(\cdot, F)]}{\varrho_{\gamma\beta}[\ln \mu(\cdot, G)]}\right)$.

2. Узагальнення теореми Б. Для цілої функції (1) нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, а $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \geq 0\}$ - максимальний член ряду (1). Узагальненими α-порядком і нижнім α-порядком ($\alpha \in L$) будемо називати відповідно величини

$$\varrho_\alpha[f] = \varrho_\alpha[\ln M_f] = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\alpha(\ln M_f(r))}{\ln r},$$
$$l_\alpha[f] = l_\alpha[\ln M_f] = \underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\alpha(\ln M_f(r))}{\ln r}.$$

Якщо тут замість $\ln M_f(r)$ поставимо $\ln \mu_f(r)$, то отримаємо відповідно $\varrho_\alpha[\ln \mu_f]$ і $l_\alpha[\ln \mu_f]$, а якщо в ряді (1) зробимо заміну $z = e^s$, то отримаємо цілий ряд Діріхле (8), і оскільки $\sigma = \ln r$, то $\mu_f(r) = \mu(\ln r, F)$. Тому, якщо $\beta(x) = x$ для $x \geq x_0$, то з теореми 1 випливає таке твердження.

Наслідок 1. Для цілих функцій (5) і (6) рівносильними є такі твердження:

а) існує число $q \in (1, +\|)$ таке, що

$$\underline{\lim}_{r\to+\infty} (\ln \mu(r^q, g) - \ln \mu(r, f)) < +\|; \qquad (15)$$

б) існує функція $\alpha \in L$ така, що $l_\alpha[\ln \mu_g] < l_\alpha[\ln \mu_f]$;

в) існує функція $\gamma \in L$ така, що $\varrho_\gamma[\ln \mu_g] < \varrho_\gamma[\ln \mu_f]$.

Зауваження 2. Як видно зі зауваження 1, за умови в) наслідку 1 (15) виконуться для кожного $q \in \left(1, \dfrac{l_\alpha[\ln \mu_f]}{l_\alpha[\ln \mu_g]}\right)$, а за умови б) - для кожного $q \in \left(1, \dfrac{\varrho_\gamma[\ln \mu_f]}{\varrho_\gamma[\ln \mu_g]}\right)$.

Теорему Б узагальнює наступна теорема.

Теорема 2. Нехай $\alpha(\ln x) \in L$, а функції f, g, $S_0(n)$ і $S_1(n)$ такі, як у теоремі Б. Тоді, якщо $\varrho_\alpha[g] < +\|$ і $l_\alpha[f] > 0$, то

$$\underline{\lim}_{n\to\|} \frac{S_0(n) + S_1(n)}{n} \leq 1+2\min\left\{\frac{l_\alpha[g]}{l_\alpha[f]}, \frac{\varrho_\alpha[g]}{\varrho_\alpha[f]}\right\}. \qquad (16)$$

Доведення. В [3] доведено, що за умови а) наслідку 1 правильна нерівність

$$\underline{\lim}_{n\to\|}(S_0(n) + S_1(n))/n \leq 1 + 2/q. \qquad (17)$$

З іншого боку, оскільки для кожної цілої функції f правильні нерівності $\mu_f(r) \leq M_f(r)$ і

$$M_f(r) \leq \sum_{n=0}^{\|} |a_n|r^n = \sum_{n=0}^{\|} |a_n|(2r)^n 2^{-1} \leq$$
$$\leq 2\mu_f(2r),$$

а $\alpha(\ln x) \in L$, то $l_\alpha[f] = l_\alpha[\ln \mu_f]$, $\varrho_\alpha[f] = \varrho_\alpha[\ln \mu_f]$ і, зрозуміло, $l_\alpha[g] = l_\alpha[\ln \mu_g]$, $\varrho_\alpha[g] = \varrho_\alpha[\ln \mu_g]$. Тому, якщо $l_\alpha[g] < l_\alpha[f]$, то виконується умова б) наслідку 1 і, отже, нерівність (15) з $q \in (1, l_\alpha[f]/l_\alpha[g])$. З огляду на довільність q з (17) отримуємо

$$\underline{\lim}_{n\to\|}(S_0(n)+S_1(n))/n \leq 1+2l_\alpha[g]/l_\alpha[f]). \qquad (18)$$

Зауважимо, що завжди $\underline{\lim}_{n\to\|}(S_0(n) + S_1(n))/n \leq 2$, тобто нерівність (18) є тривіальною, якщо $l_\alpha[g] \leq l_\alpha[f]$.

Якщо ж $\varrho_\alpha[g] < \varrho_\alpha[f]$, то виконується умова в) з $\gamma(x) = \alpha(x)$ наслідку 1 і, отже, нерівність (15) з $q \in (1, \varrho_\alpha[f]/\varrho_\alpha[g])$, звідки, як вище, отримуємо

$$\underline{\lim}_{n\to\|}(S_0(n) + S_1(n))/n \leq 1 + 2\varrho_\alpha[g]/\varrho_\alpha[f]). \qquad (19)$$

Нерівність (16) випливає з (18) і (19). Теорему 2 доведено.

Зауваження 3. З теореми 2 випливає, що якщо або $l_\alpha[g] = 0$ і $l_\alpha[f] > 0$, або $\varrho_\alpha[g] < +\|$ і $\varrho_\alpha[f] = +\|$, то

$$\underline{\lim}_{n\to\|} \frac{S_0(n) + S_1(n)}{n} \leq 1. \qquad (20)$$

Зауваження 4. Якщо виберемо $\alpha(x) = \ln x$ для $x \geq x_0$, то $\varrho_\alpha[f] = \varrho[f]$ є порядком функції f, а $l_\alpha[f] = l[f]$ є її нижнім порядком. Тому в правій частині нерівності (7) замість $1 + 2\varrho[g]/\varrho[f]$ можна поставити $1 + 2\min\{l[g]/l[f], \varrho[g]/\varrho[f]\}$.

Зауваження 5. Нехай, як вище, $Z_0(n)$ - кількість рівних нулеві коефіцієнтів a_j, для яких $j \leq n$, а $S_1(n)$ - кількість тих індексів $k \leq n$, для яких $|b_k| \leq |c_k|$. Тоді [3], якщо виконується умова наслідку 1, то

$$\underline{\lim}_{n\to\|}(Z_0(n) + S_1(n))/n \leq 1 + 1/q.$$

Тому, використовуючи методику доведення теореми 2, приходимо до такого твердження: *Якщо* $\alpha(\ln x) \in L$, *функції* f *і* g *такі, як у теоремі Б, а* $\varrho_\alpha[g] < +\|$ *і* $l_\alpha[f] > 0$, *то*

$$\underline{\lim}_{n\to\|} \frac{S_0(n) + S_1(n)}{n} \leq 1{+}2\min\left\{\frac{l_\alpha[g]}{l_\alpha[f]}, \frac{\varrho_\alpha[g]}{\varrho_\alpha[f]}\right\}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Fabry E.* Sur les series de Taylor qui out une infinite de points singularies // Acta Math. - 1899. - T. 22. - P. 65-77.

2. *Renyi C.* On a conjecture of G. Polya // Acta Math. Acad. Sci. Hung. - 1956. - T. 7, N 2. - P. 145-149.

3. *Renyi A., Renyi C.* On "small"coefficients of the power series of entire functions // Ann. Univ. Sci. Budapest. de Rolando Eötvösnominantae, Sec. Math. - 1963. - T. 6. - P. 27-38.

4. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. - М.: Наука, 1976. - 536 с.

5. *Sheremeta M.M.* On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristics of entire functions // Mat. Stud. - 2003. - V. 19, N 1. - P. 73-82.