УДК 517.956.4

©2017 р. **Н. І. Турчина, С. Д. Івасишен**

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря сікорського"

ПРО МОДЕЛЬНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ З ВЕКТОРНОЮ ВАГОЮ

Розглядається модельна крайова задача для параболічної за Ейдельманом системи рівнянь векторного порядку $2\vec{b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$. Сформульовано умову доповняльності, яку мають задовольняти крайові диференціальні вирази, щоб задача була добре поставлена. Побудовано ядра Пуассона задачі та наведено їх оцінки.

Model boundary value problem for parabolic in the sense of Eidelman system of equations with vector order $2\vec{b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$ is considered. The problem is well-posedness under the ancillarity condition for boundary differential expressions. This condition is formulated. Poisson kernels of the problem are constructed and their estimations are given.

Вступ. На теперішній час добре відома загальна теорія крайових задач для систем рівнянь, параболічних у розумінні І. Г. Петровського та більш загальних у сенсі В. О. Солонникова [1—6]. Параболічні крайові задачі визначаються умовою параболічності системи рівнянь та умовою доповняльності для крайових диференціальних виразів. Зауважимо, що умови параболічності задачі задаються лише групами старших у параболічному сенсі членів системи рівнянь і крайових умов.

Для параболічних крайових задач у рамках їх загальної теорії доведено теореми про коректну розв'язність у просторах Гельдера та Соболєва—Слободецького (шаудерівська теорія та L_p-теорія). Виявилось, що встановлені при цьому апріорні оцінки розв'язків є необхідними та достатніми умовами параболічності задачі.

Важливим етапом у побудові теорії параболічних крайових задач є детальне вивчення так званих модельних задач, тобто задач у півпросторах за просторовими змінними, в яких системи рівнянь і крайових умов містять тільки старші в параболічному сенсі члени, а їх коефіцієнти сталі.

Якщо розглядати означені в [7] С. Д. Ейдельманом так звані $2\vec{b}$-параболічні системи, то порядки таких систем є векторними і в групу їх старших членів уходять похідні різних найвищих порядків за різними посторовими змінними, бо просторові змінні не рівноправні. Через це, мабуть, не можна побудувати загальну теорію крайових задач для таких систем, аналогічну вказаній вище теорії для систем І. Г. Петровського та систем В. О. Солонникова, в яких усі просторові змінні рівноправні. Але для систем С. Д. Ейдельмана можна побудувати теорію модельних крайових задач у півпросторах, в яких одна з просторових змінних міняється в інтервалі $(0, \infty)$, а всі інші — в інтервалі $(-\infty, \infty)$.

У даній статті для систем С. Д. Ейдельмана розглядаються модельні крайові задачі в півпросторі, в якому тільки остання просторова змінна міняється в інтервалі $(0, \infty)$. Для таких задач формулюється умова доповняльності, будуються ядра Пуассона та наводяться їх оцінки.

1. Позначення та постановка крайової задачі. Нехай $n, N, b_1, \ldots, b_n$ — задані натуральні числа; $2\vec{b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$; s— найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_j := s/b_j, j \in \{1, \ldots, n\}$; $\|k\| := \sum_{j=1}^{n} m_j k_j$ і $\|k'\| := \sum_{j=1}^{n-1} m_j k_j$, якщо $k := (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ і $k' := (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ — відповідно n-вимірний і $(n-1)$-вимірний мультиіндекс; $\|x\|_{2\vec{b}} := (\sum_{j=1}^{n} x_j^{2b_j/b_n})^{1/2}$ і $\|x'\|_{2\vec{b}} := (\sum_{j=1}^{n-1} x_j^{2b_j/b_n})^{1/2}$, якщо $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $x' := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$; $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$, $\Pi^+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t > 0, x \in$

$\mathbb{R}^n_+\}$, $\Pi' := \{(t,x') \in \mathbb{R}^n | t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$; $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j}, j \in \{1,\dots,n\}$, $\partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1}\dots\partial_{x_n}^{k_n}$, якщо $k \in \mathbb{Z}^n_+$ і $x \in \mathbb{R}^n$.

В області Π^+ розглядатимемо таку крайову задачу:

$$A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n})u(t,x) := (I_N\partial_t -$$

$$\sum_{\|k\|=2s} a_k\partial_x^k)u(t,x) = f(t,x), (t,x) \in \Pi^+, \quad (1)$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \phi(x), x \in \mathbb{R}^n_+, \quad (2)$$

$$B_j^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n})u(t,x)|_{x_n=0} :=$$

$$= \sum_{2sk_0+\|k\|=r_j} b_{jk_0k}\partial_t^{k_0}\partial_x^k u(t,x)|_{x_n=0} = g_j(t,x'),$$

$$(t,x') \in \Pi', j \in \{1,\dots,m\}, \quad (3)$$

де u, f і ϕ — матриці-стовпчики висоти N; a_k і b_{jk_0k} — сталі матриці відповідно розміру $N \times N$ і $1 \times N$; I_N — одинична матриця порядку N; $g_1,\dots,g_m$— скалярні функції; $r_1,\dots,r_m$ — невід'ємні цілі числа.

Будемо припускати, що система рівнянь (1) є $2\vec{b}$-параболічною за Ейдельманом, тобто існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $\sigma' \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $\tau \in \mathbb{R}$ p-корені рівняння

$$Q(p,\sigma',\tau) := \det A^0(p, i\sigma', i\tau) = 0 \quad (4)$$

задовольняють умову

$$\operatorname{Re} p_j(\sigma',\tau) \le -\delta(\|\sigma'\|^{2b_n}_{2\vec{b}} + \tau^{2b_n}),$$

$$j \in \{1,\dots,N\}. \quad (5)$$

2. Умова доповняльності. Знайдемо умови на крайові вирази $B_j^0, j \in \{1,\dots,m\}$, у тому числі й на їх кількість m, за яких задача (1) — (3) буде добре поставлена. Для цього розглянемо задачу

$$A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n})u(t,x) = 0, (t,x) \in \Pi^+,$$

$$u(t,x)|_{t=0} = 0, x \in \mathbb{R}^n_+,$$

$$B_j^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n})u(t,x)|_{x_n=0} = g_j(t,x'), \quad (6)$$

$$(t,x') \in \Pi', j \in \{1,\dots,m\},$$

Для розв'язування цієї задачі будемо використовувати перетворення Фур'є $F_{n-1}[\cdot]$ за x' і перетворення Лапласа $L[\cdot]$ за t. Припустимо, що крайові функції $g_j, j \in \{1,\dots,m\}$, мають усі необхідні для подальших міркувань властивості, зокрема, існують їх перетворення Фур'є за x' та перетворення Лапласа за t:

$$\psi_j := (LF_{n-1})[g_j], j \in \{1,\dots,m\}. \quad (7)$$

Шукатимемо розв'язок задачі (6) у вигляді

$$u(t,x) = (F^{-1}_{n-1}L^{-1})[v(p,\sigma',x_n)](t,x),$$

$$(t,x) \in \Pi^+. \quad (8)$$

Щоб ця функція справді була розв'язком задачі (6), функція v повинна бути розв'язком такої крайової задачі на півосі $\{x_n > 0\}$ для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$A^0(p, i\sigma', \partial_{x_n})v(p,\sigma',x_n) = 0, x_n > 0, \quad (9)$$

$$B_j^0(p, i\sigma', \partial_{x_n})v(p,\sigma',x_n)|_{x_n=0} = \psi_j(p,\sigma'),$$

$$j \in \{1,\dots,m\}. \quad (10)$$

Будемо розглядати тільки ті розв'язки, для яких існують інтеграли, що входять у формулу (8), тобто розв'язки, які є перетворенням Фур'є за x' і перетворенням Лапласа за t функцій, визначених у Π^+.

З теорії звичайних диференціальних рівнянь відомо, що система (9) як лінійна система N звичайних диференціальних рівнянь порядку $2b_n$ має $2b_nN$ лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$v_j(p,\sigma',x_n) = P_j(p,\sigma',x_n)\exp\{\mu_j(p,\sigma')x_n\},$$

$$x_n > 0, j \in \{1,\dots,2b_nN\}. \quad (11)$$

Тут $P_j, j \in \{1,\dots,2b_nN\}$, — матриці-стовпчики висотою N, елементами яких є многочлени від x_n, а $\mu_j, j \in \{1,\dots,2b_nN\}$, — корені характеристичного рівняння $\det A_0(p, i\sigma', \mu) = 0$, серед яких можуть бути однакові. При цьому загальний розв'язок системи (9) є лінійною комбінацією розв'язків (11) з довільними сталими коефіцієнтами. Нехай $\tau_j, j \in \{1, \dots, 2b_nN\}$, — τ-корені рівняння (4). Тоді формули (11) можна записати у вигляді

$$v_j(p, \sigma', x_n) = P_j(p, \sigma', x_n) \exp\{i\tau_j(p, \sigma')x_n\},$$
$$x_n > 0, j \in \{1, \dots, 2b_nN\}. \qquad (12)$$

Властивості функцій (12) істотно визначаються властивостями τ-коренів рівняння (4). Тому потрібна детальна інформація про ці корені, яку можна отримати подібно до випадку рівноправних просторових змінних, тобто систем, параболічних за І. Г. Петровським і В. О. Солонниковим (див. [2, 4]). Наведемо лише необхідні для подальшого відомості про розміщення τ-коренів і деякі оцінки для них.

Насамперед відзначимо, що рівняння (4) для будь-яких фіксованих p і σ' справді має $2b_nN$ τ-коренів, ураховуючи кратність. Щоб у цьому впевнитись, досить помітити, що коефіцієнт при τ^{2b_nN} в рівнянні (4) не дорівнює нулеві. У противному разі при всіх $\tau \in \mathbb{R}$ виконувалась би рівність $Q(0, 0, \tau) = 0$, яка означає, що при $(\sigma', \tau) \neq 0$ рівняння (4) має нульовий p-корінь, а це суперечить умові (5).

Нехай, далі, δ_1 — фіксована стала з проміжку $(0, \delta)$, де δ — стала з умови (5). Розглянемо множину

$$\Gamma := \{(p, \sigma') |\, \mathrm{Re}\, p \geq -\delta_1 \|\sigma'\|_{\vec{2b}}^{2b_n}, \sigma' \in \mathbb{R}^{n-1},$$
$$|p| + \|\sigma'\|_{\vec{2b}}^{2b_n} > 0\}. \qquad (13)$$

Властивості τ-коренів многочлена Q з (4) описуються в наступній лемі.

Лема. Правильні такі твердження:

1) для будь-яких $(p, \sigma') \in \Gamma$ серед τ-коренів $\tau_j, j \in \{1, \dots, 2b_nN\}$, рівняння (4) немає дійсних коренів, а є b_nN коренів $\tau_j^+, j \in \{1, \dots, b_nN\}$, які мають додатну уявну частину, і стільки ж коренів з від'ємною уявною частиною, враховуючи їх кратність;

2) існують такі сталі $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$, що для будь-яких $(p, \sigma') \in \Gamma$ справджуються нерівності

$$|\tau_j(p, \sigma')| \leq c_1(|p| + \|\sigma'\|_{\vec{2b}}^{2b_n})^{1/(2b_n)},$$
$$j \in \{1, \dots, 2b_nN\}$$
$$\mathrm{Im}\, \tau_j^+(p, \sigma') \geq c_2(|p| + \|\sigma'\|_{\vec{2b}}^{2b_n})^{1/(2b_n)},$$
$$j \in \{1, \dots, b_nN\}.$$

Використовуючи лему, бачимо, що серед розв'язків (12) системи (9) є рівно b_nN розв'язків, для яких існують перетворення $L^{-1}[\cdot]$ і $F_{n-1}^{-1}[\cdot]$. Ці розв'язки відповідають кореням $\tau_j^+, j \in \{1, \dots, b_nN\}$, і задовольняють умову

$$|v(p, \sigma', x_n)| \to 0, x_n \to \infty. \qquad (14)$$

Нехай такими розв'язками є перші b_nN функцій (12). Тоді розв'язки системи (9), які задовольняють умову (14), визначаються формулою

$$v(p, \sigma', x_n) = \sum_{k=1}^{b_nN} c_k(p, \sigma') v_k(p, \sigma', x_n),$$
$$x_n > 0, \qquad (15)$$

де c_k, $k \in \{1, \dots, b_nN\}$, — довільні функції від параметрів p, σ'. Щоб знайти потрібний розв'язок задачі (9), (10) для довільних $(p, \sigma') \in \Gamma$, функції $c_k, k \in \{1, \dots, b_nN\}$, треба вибрати так, щоб задовольнялися умови (10):

$$\sum_{k=1}^{b_nN} B_j^0(p, i\sigma', \partial_{x_n}) v_k(p, \sigma', x_n)|_{x_n=0} c_k(p, \sigma') =$$
$$= \psi_j(p, \sigma'), (p, \sigma') \in \Gamma, j \in \{1, \dots, m\}. \qquad (16)$$

Отримали систему m алгебраїчних рівнянь відносно c_k, $k \in \{1, \dots, b_nN\}$. Вона однозначно розв'язна при довільних ψ_j, $j \in \{1, \dots, m\}$, тоді й тільки тоді, коли $m = b_nN$ і

$$\det(B_j^0(p, i\sigma', \partial_{x_n}) v_k(p, \sigma', x_n)|_{x_n=0})_{j,k=1}^{b_nN} \neq 0,$$
$$(p, \sigma') \in \Gamma. \qquad (17)$$

Отже, щоб задача (6) була добре поставленою, число крайових умов треба брати рівним b_nN і повинна виконуватись умова (17), яка називається *умовою доповняльності* для задачі (6).

Зауваження. Так само, як у [4,5], можна довести, що умову доповняльності можна сформулювати в наступному зручнішому алгебраїчному вигляді. Нехай B^0— матриця, рядками якої є $B_j^0, j \in \{1, \ldots, b_n N\}$, а $\hat{A}^0$ — взаємна матриця для A^0, тобто $\hat{A}^0 = (A^0)^{-1} \det A^0$. Запровадимо позначення:

$$C(p, \sigma', \tau) := B^0(p, i\sigma', i\tau)\hat{A}^0(p, i\sigma', i\tau),$$

$$A^+(p, \sigma', \tau) := \prod_{j=1}^{b_n N}(\tau - \tau_j^+(p, \sigma')).$$

Умова (17) рівносильна такій умові: *для будь-яких* $(p, \sigma') \in \Gamma$ *рядки матриці* $C(p, \sigma', \tau)$, *як многочлени від* τ, *лінійно незалежні за модулем многочлена* $A^+(p, \sigma', \tau)$.

3. Ядра Пуассона. Розглянемо задачу (6) у припущенні,що $m = b_n N$ і виконується умова доповняльності. Як з'ясовано в п.2, розв'язок цієї задачі визначається формулами (8), (15), в яких $c_k, k \in \{1, \ldots, m\}$, знаходяться із системи (16). Розв'язавши цю систему, отримуємо, що

$$v(p, \sigma', x_n) = \sum_{j=1}^{m} V_j(p, \sigma', x_n)\psi_j(p, \sigma'), x_n > 0.$$

Скориставшись формулою для перетворень Лапласа і Фур'є згортки та рівностями (7), маємо

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t - \tau, x - \xi')\times$$

$$\times g_j(\tau, \xi')d\xi', (t, x) \in \Pi^+, \qquad (18)$$

де

$$G_j(t, x) := (F_{n-1}^{-1} L^{-1})[V_j(p, \sigma', x_n)](t, x),$$

$$(t, x) \in \Pi^+, j \in \{1, \ldots, m\}. \qquad (19)$$

Функції $G_j, j \in \{1, \ldots, m\}$, називаються ядрами Пуассона задачі (6). Вони можуть бути визначені як розв'язки в просторі узагальнених функції таких задач:

$$A^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n})G_j(t, x) = 0,$$

$$B_l^0(\partial_t, \partial_{x'}, \partial_{x_n})G_j(t, x)|_{x_n=0} = \delta_{lj}\delta(t, x'),$$

$$l \in \{1, \ldots, m\}.$$

$$G_j(t, x) = 0 \text{ при } t \le 0,$$

де $l \in \{1, \ldots, m\}$, δ_{lj} — символ Кронекера, символ $\delta(t, x')$ — це дельта-функція Дірака, яка зосереджена в точці $(0, 0)$, тобто при $t = 0$ і $x' = 0$.

Наведемо властивості ядер Пуассона G_j.

Теорема. Правильні такі твердження:

1) справджуються оцінки

$$|\partial_t^{k_0} \partial_x^k G_j(t, x)| \le C_{k_0 k} t^{-M'-1-k_0+\frac{r_j - \|k\|}{2s}} \times$$

$$\times \exp\{-c \sum_{l=1}^{n} t^{1-q_l}|x_l|^{q_l}\}, (t, x) \in \Pi^+,$$

$$k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, k \in \mathbb{Z}_+^n, j \in \{1, \ldots, m\}, \qquad (20)$$

де $M' := \sum_{l=1}^{n-1} m_j/(2s)$, $q_l := 2b_l/(2b_l - 1)$, $l \in \{1, \ldots, n\}$;

2) правильні такі дивергентні зображення за змінними t і x':

$$G_j(t, x) = (\partial_t + (1 + \delta_1) \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{b_l} \partial_{x_l}^{2b_l})^r \times$$

$$\times G_j^{(r)}(t, x), (t, x) \in \Pi^+, j \in \{1, \ldots, m\}, \quad (21)$$

де r — будь-яке невід'ємне ціле число, δ_1 — стала з (13), а для функцій $G_j^{(r)}$ справджуються оцінки

$$|\partial_t^{k_0} \partial_x^k G_j^{(r)}(t, x)| \le C_{k_0 k}^{(r)} t^{-M'-1+r-k_0+\frac{r_j - \|k\|}{2s}} \times$$

$$\times \exp\{-c \sum_{l=1}^{n} t^{1-q_l}|x_l|^{q_l}\}, (t, x) \in \Pi^+,$$

$$k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, k \in \mathbb{Z}_+^n, j \in \{1, \ldots, m\}. \qquad (22)$$

Оцінки (20) і (22) подібно до [2, 4] отримуються із зображення (19) та аналогічних зображень для $G_j^{(r)}$ через функції V_j за допомогою варіації контурів, по яких у цих зображеннях ведеться інтегрування. При цьому використовуються точні оцінки функцій V_j і властивості їх аналітичності за аргументами p і σ' у відповідній області.

Зауважимо, що ядра $G_j^{(r)}$ можна отримати як розв'язки $2\vec{b}' := (2b_1, \ldots, 2b_{n-1})$-параболічного рівняння (21) порядку r за змінною t з неоднорідністю G_j. Так, якщо

$Z^{(1)}$ — фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для рівняння

$$Lv := (\partial_t + (1+\delta_1)\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{b_l}\partial_{x_l}^{2b_l})v = 0,$$

то легко переконатись, що функція

$$Z^{(r)}(t,x') := \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}Z^{(1)}(t,x'), (t,x') \in \Pi',$$

є ФРЗК для рівняння $L^r v = 0$. Тому маємо зображення

$$G_j^{(r)} = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z^{(1)}(t-\tau, x'-\xi')\times$$
$$\times G_j(\tau,(\xi',x_n))d\xi',$$
$$(t,x) \in \Pi^+, j \in \{1,\ldots,m\}, r \geq 1.$$

Використовуючи це зображення та оцінки [7]

$$|\partial_t^{k_0}\partial_{x'}^{k'}Z^{(1)}(t,x')| \leq C_{k_0k'}t^{-M'-k_0-\|k'\|/(2s)}\times$$
$$\times\exp\{-c\sum_{l=1}^{n-1}t^{1-q_l}|x_l|^{q_l}\}, (t,x') \in \Pi',$$
$$k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, k' \in \mathbb{Z}^{n-1},$$

можна вивести оцінки (22) з оцінок (20).

Висновки. Сформульована умова доповняльності виділяє широкий клас коректно поставлених крайових задач вигляду (1) — (3). Наведені оцінки ядер Пуассона будуть істотно використані для побудови, дослідження властивостей і різноманітних застосувань матриць Гріна таких задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Загорский Т. Я.* Смешаная задача для систем дифференциальных уравнений параболического типа. — Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1961. — 115 с.

2. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — Москва: Наука, 1964. — 443 с.

3. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. — 1964. — **19**, №3.— С. 53—161.

4. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1965. — **83**.— С. 3—162.

5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — Москва: Наука, 1967. — 736 с.

6. *Ивасишен С. Д.* Линейные параболические граничные задачи. — Киев: Выща школа, 1987. — 72 с.— (Современные достижения математики и ее приложений)

7. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. — 1960. — **133**, №1.— С. 40—43.