

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

ПРО ПОВНОТУ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ ФУНКЦІЄЮ БЕССЕЛЯ

Ми досліджуємо повноту систем функцій, породжених функцією Бесселя з від'ємним півцілим індексом, меншим за -1 .

We investigate completeness of systems of functions generated by Bessel function with negative half integer order less than -1 .

Нехай $p \in (0; +\infty)$ і $L_2((0; 1); x^p dx)$ – простір вимірних функцій f , для яких $\int_0^1 t^p |f(t)|^2 dt < +\infty$, зі скалярним добутком $\langle f_1; f_2 \rangle = \int_0^1 t^p f_1(t) \overline{f_2(t)} dt$, нормою $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 t^p |f(t)|^2 dt}$ і $[x]$ – ціла частина числа x . Добре відомо ([1, с.71]), що при $\nu > 1$ функція Бесселя $J_{-\nu}(z)$ порядку $-\nu$ має нескінченну кількість дійсних нулів і $2[\nu]$ попарно спряжених комплексних нулів. Якщо $[\nu]$ – непарне ціле число, то серед комплексних нулів є два чисто уявних (див. також [2], [3, с.532]). Нехай $\rho_j = \rho_{-\nu, j}$, $j \in \mathbb{N}$, – ті нулі функції $J_{-\nu}(z)$, для яких $\Im \rho_j > 0$, якщо ρ_j – комплексне число і $\rho_j > 0$, якщо ρ_j – дійсне число.

У цій роботі ми продовжуємо дослідження, розпочаті в працях [4–6]. Зокрема, було доведено

Теорема А ([4, с.39-40]). Система функцій $\{\rho_j \sqrt{\rho_j x} J_{-3/2}(\rho_j x) : j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$, $\rho_j := \sqrt{\lambda_j}$, є повною в просторі $L_2((0; 1), x^2 dx)$, має в цьому просторі біртогональну систему $\{\gamma_k : k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$,

$$\bar{\gamma}_k(x) := \frac{\pi}{x^2 \rho_k^2 \cos^2 \rho_k} \times$$

$$\times (\rho_k \sqrt{\rho_k x} J_{-3/2}(\rho_k x) - \rho_1 \sqrt{\rho_1 x} J_{-3/2}(\rho_1 x)),$$

і не є базисом цього простору.

Теорема В ([5, с.181]). Система $\{\sqrt{x} J_{-5/2}(\rho_j x) : j \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}\}$ є повною, мінімальною в просторі $L_2((0; 1); x^4 dx)$, має в цьому просторі біртогональну

систему $\{\gamma_k(x) : k \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}\}$. При цьому

$$\bar{\gamma}_k(x) := \frac{2\sqrt{x}}{(\rho_1^2 - \rho_2^2) \rho_k^{5/2} J_{-3/2}^2(\rho_k) x^4} \times \\ \times ((\rho_k^2 - \rho_2^2)(\rho_k^{5/2} J_{-5/2}(\rho_k x) - \rho_1^{5/2} J_{-5/2}(\rho_1 x)) - \\ (\rho_k^2 - \rho_1^2)(\rho_k^{5/2} J_{-5/2}(\rho_k x) - \rho_2^{5/2} J_{-5/2}(\rho_2 x))).$$

Теорема С ([6]). Нехай $u_j(x) = \rho_j^\nu \sqrt{\pi x/2} J_{-\nu}(\rho_j x)$, де $\nu > 1$ – півціле число. Тоді система $\{u_j(x) : j \in \mathbb{N}\}$ є переповненою в просторі $L_2((0; 1); x^{2\nu-1} dx)$.

Слід зазначити, що розгляд властивостей функцій $J_{-\nu}(z)$ пов'язаний з розглядом наступної крайової задачі [7;8]

$$-f'' + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} f = \lambda f, \lambda = \rho^2,$$

$$f(1) = 0,$$

$$\exists c_k \in \mathbb{C} : f(x) = \sum_{k \in 0; \nu} c_k x^{-\nu+2k+1/2} + o(x^{\nu+1/2}), \\ x \rightarrow 0+.$$

Наша мета полягає в доведенні такого твердження.

Теорема. Нехай $v_j(x) = \sqrt{x} J_{-\nu}(\rho_j x)$, де $\nu > 1$ – півціле число. Тоді система $\{v_j(x) : j \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2; \dots; m\}\}$, де $m \in \mathbb{N}$ таке, що $-\nu + m = -1/2$ є повною в просторі $L_2((0; 1); x^{2\nu-1} dx)$.

Ключовою для її доведення є нижче сформульована лема

Лема ([8, с.190]). Нехай z – довільне число. Тоді

$$\int_0^1 \cos(zt) \frac{J_{-\nu}(\rho_j t)}{(\rho_j t)^{-\nu}} dt = (-1)^{m+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho_j^{1+\nu} \times$$

$$\times J_{-\nu+1}(\rho_j) \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^m \frac{J_{-\nu}(z)}{(z^2 - \rho_j^2) z^{-\nu}}, \quad (1)$$

де $\nu > 1$ – нівціле число, $m \in \mathbb{N}$ таке, що $-\nu + m = -1/2$, $(z^{-1}d/dz)^m - m$ разів застосована операція $z^{-1}d/dz$ (диференціювання з наступним множенням на $1/z$).

Доведення теореми. Скористаємось методом з праць [4-6]. Припустимо, що система $\{v_j(x) : j \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2; \dots; m\}\}$ неповна. Тоді існує ненульова функція $\varphi \in L_2((0; 1); x^{2\nu-1}dx)$ така, що

$$\int_0^1 t^{2\nu-1/2} J_{-\nu}(\rho_j t) \varphi(t) dt = 0, j \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2; \dots; m\}.$$

Нехай

$$Q(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 t^{2\nu-1/2} z^\nu J_{-\nu}(zt) \varphi(t) dt$$

або

$$Q(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \tilde{\varphi}(t) \frac{J_{-\nu}(zt)}{(zt)^{-\nu}} dt, \quad (2)$$

де $\tilde{\varphi}(t) = t^{\nu-1/2} \varphi(t) \in L_2(0; 1)$. З [3, с.67] маємо

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi/2} J_{-\nu}(zt) / (zt)^{-\nu} &= \cos\left(zt + \frac{m\pi}{2}\right) \times \\ &\times \sum_{r=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^r (m+2r)! (zt)^{m-2r}}{(2r)! (m-2r)! 2^{2r}} - \\ &- \sin\left(zt + \frac{m\pi}{2}\right) \times \\ &\times \sum_{r=0}^{[(m-1)/2]} \frac{(-1)^r (m+2r+1)! (zt)^{m-2r-1}}{(2r+1)! (m-2r-1)! 2^{2r+1}}, \end{aligned}$$

де $-\nu = -m - 1/2$, $m \in \mathbb{N}$. Отже

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_{r=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^r (m+2r)! z^{m-2r}}{(2r)! (m-2r)! 2^{2r}} \times \\ &\times \int_0^1 \tilde{\varphi}(t) t^{m-2r} \cos(zt + m\pi/2) dt - \\ &- \sum_{r=0}^{[(m-1)/2]} \frac{(-1)^r (m+2r+1)! z^{m-2r-1}}{(2r+1)! (m-2r-1)! 2^{2r+1}} \times \\ &\times \int_0^1 \tilde{\varphi}(t) t^{m-2r-1} \sin(zt + m\pi/2) dt. \end{aligned}$$

Тоді Q – парна ціла функція і $Q(\rho_j) = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Будемо вважати, що c_i – деякі сталі. Згідно з нерівністю Коші-Буняковського маємо

$$\left| \int_0^1 \tilde{\varphi}(t) t^{m-2r} \cos\left(zt + \frac{m\pi}{2}\right) dt \right| \leq \frac{c_1 e^{|\Im z|}}{\sqrt{1 + |\Im z|}},$$

$$r \in \{0; [m/2]\},$$

$$\left| \int_0^1 \tilde{\varphi}(t) t^{m-2r-1} \sin\left(zt + \frac{m\pi}{2}\right) dt \right| \leq \frac{c_1 e^{|\Im z|}}{\sqrt{1 + |\Im z|}},$$

$$r \in \{0; [(m-1)/2]\},$$

$$|Q(z)| \leq c_2 \frac{e^{|\Im z|}}{\sqrt{1 + |\Im z|}} (1 + |z|)^m, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Нехай $L(z) := \sqrt{\pi/2} z^\nu J_{-\nu}(z) = \cos(z + m\pi/2) \sum_{r=0}^{[m/2]} ((-1)^r (m+2r)! z^{m-2r}) / ((2r)! (m-2r)! 2^{2r}) - \sin(z + m\pi/2) \sum_{r=0}^{[(m-1)/2]} ((-1)^r (m+2r+1)! z^{m-2r-1}) / ((2r+1)! (m-2r-1)! 2^{2r+1})$. Тоді існують промені $\arg z = \psi_k$, $k \in \{0; 1; 2; 3\}$, $\psi_0 \in (0; \pi/2)$, $\psi_1 \in (\pi/2; \pi)$, $\psi_2 \in (\pi; 3\pi/2)$, $\psi_3 \in (3\pi/2; 2\pi)$, на яких

$$|L(z)| \geq c_3 (1 + |z|)^m \exp(|\Im z|).$$

Нехай $Q_0(z) = L(z) / ((z^2 - \rho_1^2)(z^2 - \rho_2^2) \times \dots \times (z^2 - \rho_m^2))$, $\Omega = Q/Q_0$. Тоді Ω є цілою парною функцією порядку $\tilde{\rho} \leq 1$. Крім цього,

$$|\Omega(z)| \leq c_4 (1 + |z|)^{2m-1/2},$$

$$\arg z = \psi_k, k \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Остання нерівність справедлива для всіх $z \in \mathbb{C}$. Справді, нехай $G_0 = \{z : \psi_3 < \arg z < \psi_0\}$, $G_1 = \{z : \psi_0 < \arg z < \psi_1\}$, $G_2 = \{z : \psi_1 < \arg z < \psi_2\}$, $G_3 = \{z : \psi_2 < \arg z < \psi_3\}$. Тоді візьмемо довільну голоморфну гілку функції $\sqrt{i^k + z}$ в G_k , $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ і розглянемо функцію $\tilde{\Omega}_k(z) = \Omega(z) / ((i^k + z)^{2m-1} \sqrt{i^k + z})$, голоморфну в області G_k . На межі області G_k функція $\tilde{\Omega}_k$ є обмеженою і має порядок $\tilde{\rho}_k \leq 1$ в G_k . Тому згідно з принципом Фрагмена і Ліндельофа, вона є обмеженою в G_k . Отже, $|\Omega(z)| \leq c_5 (1 + |z|)^{2m-1/2}$ для всіх $z \in \mathbb{C}$. Але, Ω – парна ціла функція. Тому $Q(z) = (a_{2m-2} z^{2m-2} + a_{2m-4} z^{2m-4} + \dots + a_4 z^4 + a_2 z^2 +$

$a_0)Q_0(z)$, де a_{2i} , $i \in \{0; 1; \dots; m-1\}$ – довільні комплексні числа.

Скористаємось рівністю [3, с. 56]

$$\frac{d}{dz} \frac{J_{-\nu}(z)}{z^{-\nu}} = -z^{\nu} J_{-\nu+1}(z),$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}\right)^m \frac{J_{-\nu}(zx)}{(zx)^{-\nu}} &= \\ &= (-1)^m x^{2m} \frac{J_{-\nu+m}(zx)}{(zx)^{-\nu+m}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Оскільки $x^{1/2} J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi} \cos x$, то з (2) і (3) маємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m ((a_{2m-2}z^{2m-2} + a_{2m-4}z^{2m-4} + \dots + a_4z^4 + a_2z^2 + a_0)Q_0(z)) &= \\ &= (-1)^m \int_0^1 \tilde{\varphi}(t)t^{2m} \cos(zt) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

З формули (1) отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m \frac{L(z)}{(z^2 - \rho_j^2)} &= \\ &= \frac{(-1)^{m+1} \rho_j^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_j)} \int_0^1 \cos(zt) \frac{J_{-\nu}(\rho_j t)}{(\rho_j t)^{-\nu}} dt. \end{aligned}$$

Далі, виберемо числа b_1, b_2, \dots, b_m так, щоб

$$\begin{aligned} \frac{a_{2m-2}z^{2m-2} + a_{2m-4}z^{2m-4} + \dots + a_2z^2 + a_0}{(z^2 - \rho_1^2)(z^2 - \rho_2^2) \cdot \dots \cdot (z^2 - \rho_m^2)} &= \\ &= \frac{b_1}{z^2 - \rho_1^2} + \frac{b_2}{z^2 - \rho_2^2} + \dots + \frac{b_m}{z^2 - \rho_m^2}. \end{aligned}$$

Помножимо цей вираз на $z^2 - \rho_1^2$. Тоді

$$b_1 = \frac{a_{2m-2}\rho_1^{2m-2} + a_{2m-4}\rho_1^{2m-4} + \dots + a_2\rho_1^2 + a_0}{(\rho_1^2 - \rho_2^2) \cdot \dots \cdot (\rho_1^2 - \rho_m^2)}.$$

Аналогічно одержуємо

$$b_2 = \frac{a_{2m-2}\rho_2^{2m-2} + a_{2m-4}\rho_2^{2m-4} + \dots + a_2\rho_2^2 + a_0}{(\rho_2^2 - \rho_1^2)(\rho_2^2 - \rho_3^2) \cdot \dots \cdot (\rho_2^2 - \rho_m^2)},$$

...

$$b_m = \frac{a_{2m-2}\rho_m^{2m-2} + a_{2m-4}\rho_m^{2m-4} + \dots + a_2\rho_m^2 + a_0}{(\rho_m^2 - \rho_1^2) \cdot \dots \cdot (\rho_m^2 - \rho_{m-1}^2)}.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m ((a_{2m-2}z^{2m-2} + a_{2m-4}z^{2m-4} + \dots + a_4z^4 + a_2z^2 + a_0)Q_0(z)) &= \\ &= \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m ((a_{2m-2}z^{2m-2} + a_{2m-4}z^{2m-4} + \dots + a_2z^2 + a_0) \frac{L(z)}{(z^2 - \rho_1^2) \times \dots \times (z^2 - \rho_m^2)}) = \\ &= \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m \left(\left(\frac{b_1}{z^2 - \rho_1^2} + \dots + \frac{b_m}{z^2 - \rho_m^2} \right) L(z) \right) = \\ &= b_1 \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m \frac{L(z)}{z^2 - \rho_1^2} + \dots + b_m \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m \frac{L(z)}{z^2 - \rho_m^2} = \\ &= b_1 \frac{(-1)^{m+1} \rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} \int_0^1 \cos(zt) \frac{J_{-\nu}(\rho_1 t)}{(\rho_1 t)^{-\nu}} dt + \\ &+ \dots + b_m \frac{(-1)^{m+1} \rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} \int_0^1 \cos(zt) \frac{J_{-\nu}(\rho_m t)}{(\rho_m t)^{-\nu}} dt = \\ &= (-1)^{m+1} \int_0^1 \cos(zt) \left(\frac{b_1 \rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} \frac{J_{-\nu}(\rho_1 t)}{(\rho_1 t)^{-\nu}} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{b_m \rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} \frac{J_{-\nu}(\rho_m t)}{(\rho_m t)^{-\nu}} \right) dt. \end{aligned}$$

Враховуючи (4), отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &= -t^{-2m} \left(\frac{b_1 \rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} \frac{J_{-\nu}(\rho_1 t)}{(\rho_1 t)^{-\nu}} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{b_m \rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} \frac{J_{-\nu}(\rho_m t)}{(\rho_m t)^{-\nu}} \right). \end{aligned}$$

Оскільки $\tilde{\varphi} \in L_2(0; 1)$ і

$$(\rho_j t)^{\nu} J_{-\nu}(\rho_j t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu,k} \rho_j^{2k} t^{2k}, \text{ де } a_{\nu,k} = (-1)^k 2^{\nu-2k} / (k! \Gamma(k - \nu + 1)),$$

то це можливо

$$\begin{aligned} &\text{лише у випадку, коли} \\ &\frac{b_1 \rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} \sum_{k=0}^{m-1} a_{\nu,k} \rho_1^{2k} t^{2k} + \\ &+ \dots + \frac{b_m \rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} \sum_{k=0}^{m-1} a_{\nu,k} \rho_m^{2k} t^{2k} = 0, \\ &\sum_{k=0}^{m-1} a_{\nu,k} t^{2k} \left(\frac{b_1 \rho_1^{-1-\nu+2k}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} + \right. \end{aligned}$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1 \rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} + \dots + \frac{b_m \rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} = 0, \\ \frac{b_1 \rho_1^{1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} + \dots + \frac{b_m \rho_m^{1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} = 0, \\ \dots \\ \frac{b_1 \rho_1^{-\nu+2m-3}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} + \dots + \frac{b_m \rho_m^{-\nu+2m-3}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} & \cdots & \frac{\rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} \\ \frac{\rho_1^{1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} & \cdots & \frac{\rho_m^{1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\rho_1^{-\nu+2m-3}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} & \cdots & \frac{\rho_m^{-\nu+2m-3}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} \end{array} \right| = 0$$

або

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \dots & \rho_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_1^{2(m-1)} & \rho_2^{2(m-1)} & \dots & \rho_m^{2(m-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Зауваження. Аналогічні питання можна розглядати, коли ρ_j – нулі функції $aJ_{-\nu}(z) + zJ'_{-\nu}(z)$, $\nu > 1$, $a \in \mathbb{R}$ ([9;10]) і зокрема нулі $J'_{-\nu}(z)$, $\nu > 1$ ([11–13]).

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974. — Т.2. — 296 с.
2. *Hurwitz A.* Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function // *Math. Ann.* — 1889. — **33**. — P. 246-266.
3. *Ватсон Г.Н.* Теория Бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949. — Ч.1. — 787 с.
4. *Винницкий Б., Шавала О.* Обмеженість розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку і одна крайова задача для рівняння Бесселя // *Математичні Студії.* — 2008. — **30**, N1. — С. 31-41.

13. Керимов М.К., Скороходов С.Л. О вычислении комплексных нулей функций Бесселя $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ и их производных // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 1984. – **24**, N10. – С. 1497-1513.