

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ГАРМОНІЙНИМ ОСЦИЛЯТОРОМ

Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з гармонічним осцилятором і функціями від такого оператора у просторах типу S і S' .

We prove the correct solvability of the nonlocal multipoint in time problem for the evolutionary equations with the harmonic oscillator and the functions of such operator in the spaces of S and S' type.

У розвитку багатьох важливих напрямів математики і фізики значну роль відіграли поняття і методи, які виникли при вивченні рівняння Штурма-Ліувілля та пов'язаного з цим рівнянням оператора Штурма-Ліувілля $A = -d^2/dx^2 + q(x)$. Оператор Штурма-Ліувілля породжує різні крайові задачі: регулярні (x належить скінченному інтервалу) і сингулярні (випадок нескінченного проміжку). Вони, як відомо, відрізняються постановкою задачі, методами дослідження і сферами застосування. Функція q називається потенціалом; якщо $q(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, то оператор A називається гармонічним осцилятором. Відомо [1, с. 145], що гармонічний осцилятор – невід'ємний самоспряжений оператор у просторі $L_2(\mathbb{R})$. Еволюційне рівняння

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

з таким оператором відноситься до рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких необмежено зростають при $|x| \rightarrow +\infty$. М.Л.Горбачуком, А.І. Кашпіровским [1, с. 148] доведено, що розв'язок рівняння (1) завжди має граничне значення $u(0) = \lim_{t \rightarrow +0} u(t)$ в просторах узагальнених функцій нескінченного порядку типу ультрарозподілів (типу S') і за ним завжди однозначно знаходиться. У працях М.Л. Горбачука, В.І. Горбачук, П.І. Дудникова, В.В. Городецького та ін. доведено, що простори типу S' співпадають з множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з ча-

стинними похідними параболічного типу (до яких відносяться і рівняння (1)), при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за просторовими змінними функціями (див., наприклад, [1, 2]).

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum_{k=0}^m \alpha_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (если $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші); при цьому умова $\sum_{k=0}^m \alpha_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f$ трактується в класичному або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція (така ситуація виникає у випадку, коли f має особливість в одній або декількох точках і допускає регуляризацію в тому чи іншому просторі узагальнених функцій).

Нелокальна багатоточкова за часом задача відноситься до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними, теорія яких інтенсивно розвивається з сімдесятих років минулого століття. Дослідження таких задач зумовлено багатьма застосуваннями в механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні тих чи інших процесів [3–6]. На доцільності використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вперше

вказав А.А. Дезин [7], котрий досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він довів, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати разом з локальними і нелокальними умовами. А.Х. Мамян встановив [8], що існують рівняння з частинними похідними, для яких неможливо сформулювати жодної коректної локальної задачі; в той же час коректні задачі існують, якщо застосувати нелокальні умови.

У цій роботі встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для диференціально-операторних рівнянь другого порядку з гармонійним осцилятором і функціями від такого оператора у випадку, коли функція, за допомогою якої задається багатоточкова задача, належить до простору типу S або є узагальненою функцією типу ультрарозподілів і ототожнюється з певним формальним рядом Фур'є-Ерміта (нелокальна багатоточкова задача для диференціально-операторних рівнянь першого порядку досліджена в [9]). Знайдено представлення розв'язку вказаної задачі у вигляді згортки фундаментального розв'язку з граничною функцією.

1. Простори основних і узагальнених елементів.

Нехай A – невід'ємний самоспряжений оператор з дискретним спектром у сепарабельному гільбертовому просторі H зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) та нормою $\|\cdot\|$, $\{e_k, k \geq 1\}$ – ортонормований базис з його власних векторів, $\{\lambda_k, k \geq 1\}$ – послідовність відповідних власних чисел, розміщених у порядку зростання; при цьому кожне власне число береться стільки разів, якою є його кратність, і $\sum_{k:\lambda_k \neq 0} \lambda_k^{-p} < \infty$ при деякому $p > 0$.

Позначимо

$$\Phi_m = \left\{ \varphi \in H \mid \varphi = \sum_{k=1}^m c_{k,\varphi} e_k, c_{k,\varphi} \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\Phi = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind } \Phi_m$$

(очевидно, що Φ лежить щільно в H і інваріантно відносно A), а через Φ' – простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Зіставлення

$$H \ni \varphi \longrightarrow f_\varphi \in \Phi' : \langle f_\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi), \forall \psi \in \Phi,$$

визначає вкладення $H \subset \Phi'$ ($\langle f, \psi \rangle$ позначає дію функціоналу f на елемент ψ). Елементи з Φ' називаються узагальненими.

Нехай s – простір усіх числових послідовностей $\{s_k, k \geq 1\}$ ($s_k \in \mathbb{C}$) з поординатною збіжністю. Ізоморфізм $J: f \rightarrow \{c_k(f) = \langle f, e_k \rangle, k \geq 1\} \in s$ із Φ' на s відображає Φ на множину фінітних послідовностей із s , а H – на l_2 . При цьому оператору A відповідає операція $\{c_k(f), k \geq 1\} \rightarrow \{\lambda_k c_k(f), k \geq 1\}$ і його можна розширити на Φ' до неперервного оператора $\hat{A}: \hat{A}f = J^{-1}\{\lambda_k c_k(f), k \geq 1\}$.

Нехай $f \in \Phi'$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, де $c_k = \langle f, e_k \rangle$, називається рядом Фур'є елемента $f \in \Phi'$, а числа c_k – його коефіцієнтами Фур'є. Для довільного елемента $f \in \Phi'$ його ряд Фур'є збігається в Φ' до f . Навпаки, довільний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ збігається в Φ' до деякого елемента $f \in \Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [10]. Отже, Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$.

Введемо тепер деякі класи елементів, які породжені оператором A . Позначимо

$$H_\infty(A) := \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{pr } H_\alpha(A), \quad H_\alpha(A) = \mathcal{D}(A^\alpha),$$

$$G_{\beta,B}(A) := \{\varphi \in H_\infty(A)\}$$

$$\exists c > 0 \exists B > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \|A^n \varphi\| \leq c B^n n^{n\beta},$$

де $\beta > 0$ – фіксований параметр. Простір $G_{\beta,B}(A)$ є банаховим відносно норми $\|\varphi\|_{\beta,B} = \sup(\|A^n \varphi\| / (B^n n^{n\beta}))$. Простір $G_{\{\beta\}}(A) := \lim_{B \rightarrow \infty} \text{ind } G_{\beta,B}(A)$ називається простором Жевре порядку β . Якщо через $H'_\infty(A)$, $G'_{\{\beta\}}(A)$ позначити простори, топологічно спряжені з просторами $H_\infty(A)$, $G_{\{\beta\}}(A)$ відповідно, то, згідно [10], прийдемо

до ланцюжка щільних і неперервних вкладень $\Phi \subset G_{\{\beta\}}(A) \subset H_{\infty}(A) \subset H \subset H'_{\infty}(A) \subset G'_{\{\beta\}}(A) \subset \Phi', \beta > 1$.

Символом $H_{\alpha,\beta}$ позначимо сукупність тих елементів $f \in \Phi'$, для яких при деякому $\alpha > 0$

$$\|f\|_{H_{\alpha,\beta}}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta})|c_k|^2 < \infty,$$

$c_k = \langle f, e_k \rangle, k \in \mathbb{N}$, і покладемо $H_{\{\beta\}} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \text{ind} H_{\alpha,\beta}$. Відповідно, $H'_{\{\beta\}} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \text{pr} H'_{\alpha,\beta}$. Як доведено в [10], $G_{\{\beta\}}(A) = H_{\{\beta\}}$.

Простори $G_{\{\beta\}}(A), G'_{\{\beta\}}(A)$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їх елементів описуються так [10]:

$$(f \in G_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N} :$$

$$|c_k(f)| \leq c \exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta});$$

$$(f \in G'_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : |c_k(f)| \leq c \exp(\mu\lambda_k^{1/\beta})).$$

Нехай $\{f_1, f_2\} \subset \Phi', f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1)e_k,$

$f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_2)e_k$. У просторі Φ' визначимо операцію $*$, яку називатимемо "абстрактною згорткою" (або просто згорткою) і задамо формулою

$$f_1 * f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1)c_k(f_2)e_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1 * f_2)e_k,$$

тобто $c_k(f_1 * f_2) = c_k(f_1)c_k(f_2), k \in \mathbb{Z}_+$.

2. Функції Ерміта. Формальні ряди Фур'є-Ерміта.

Функція $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається ваговою, якщо вона невід'ємна і така, що абсолютно збігаються інтеграли $\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} x^n F(x) dx,$

$n \in \mathbb{Z}_+$, які називаються степеневими моментами функції F . Наприклад, за F , зокрема, можна взяти функцію $\exp(-x^2), x \in \mathbb{R}$. Користуючись методом математичної індукції можна довести (див. [11]), що $(e^{-x^2})^{(n)} = e^{-x^2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$. Отже, функція $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, n \in$

\mathbb{Z}_+ , є многочленом степеня n . Цей многочлен називається стандартизованим многочленом Ерміта, а відповідна формула – формулою Родріга. Многочлени $H_n, n \in \mathbb{Z}_+$, ортогональні на \mathbb{R} з ваговою функцією F ; при цьому

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n!, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, ортонормовані многочлени Ерміта $\hat{H}_n, n \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)},$$

$n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$.

Многочлени $\hat{H}_n, n \in \mathbb{Z}_+$, побудовані за ваговою функцією $F(x) = \exp(-x^2), x \in \mathbb{R}$, утворюють ортонормований базис у просторі $L_2(\mathbb{R}, \exp(-x^2))$. У просторі ж $L_2(\mathbb{R})$ ортонормований базис утворюють функції Ерміта $h_n(x) = e^{-x^2/2} \hat{H}_n(x) = (-1)^n \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} \cdot e^{x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$.

У просторі $H = L_2(\mathbb{R})$ розглянемо гармонійний осцилятор – невід'ємний самоспряжений оператор A , який є замиканням оператора $-d^2/dx^2 + x^2$, заданого на множині фінітних нескінченно диференційовних на \mathbb{R} функцій. Спектр цього оператора дискретний, його власні числа $\lambda_k = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+$, власні функції – функції Ерміта $h_k, k \in \mathbb{Z}_+$ [2, с. 145]. Простір Φ у даному випадку складається з функцій φ вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^m c_{k,\varphi} h_k(x), c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, де $c_k = \langle f, h_k \rangle$, називається рядом Фур'є-Ерміта функціоналу $f \in \Phi'$, а числа $c_k, k \in \mathbb{Z}_+$, – його коефіцієнтами Фур'є (надалі елементи простору Φ' називатимемо узагальненими функціями). Простір Φ' у даному конкретному випадку можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k$.

3. Простори типу S і S' .

Для фіксованих $\alpha, \beta > 0$ покладемо $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists c > 0 \exists A > 0 \exists B > 0 \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R} : \right.$

$$\left. |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta} \right\}.$$

Введені простори можна охарактеризувати ще й так [12].

S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційованих на \mathbb{R} функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq c B^n n^{n\beta} \exp(-a|x|^{1/\alpha}), n \in \mathbb{Z}_+,$$

$x \in \mathbb{R}$, з деякими додатними сталими c, a і b , залежними тільки від функції φ .

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій φ , які допускають аналітичне продовження в \mathbb{C} і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}),$$

$c, a, b > 0$.

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини. При $\beta > 1$ простори S_α^β містять фінітні функції.

Топологічна структура в просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову: $\forall \delta > 0 \forall \rho > 0 \exists c_{\delta\rho} > 0 : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$. Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2, B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$.

Якщо P – деякий фіксований многочлен, то в просторі S_α^β визначена і неперервна операція множення на P . Звідси, зокрема, випливає, що функції Ерміта $h_k, k \in \mathbb{Z}_+$, належать до простору $S_{1/2}^{1/2}$. Справді, $|\exp(-z^2/2)| = \exp(-x^2/2 + y^2/2)$, якщо

$z = x + iy$ і $1/\alpha = 1/(1 - \beta) = 2$, тобто $\alpha = \beta = 1/2$, а кожна функція Ерміта має вигляд $P(x) \exp(-x^2/2)$, де P – многочлен Ерміта.

У просторі S_α^β визначені і є неперервними операція зсуву аргументу і диференціювання, які переводять S_α^β у себе. Простори типу S є досконалими [12] тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні. Простір всіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю позначають символом $(S_\alpha^\beta)'$. Елементи із $(S_\alpha^\beta)'$ називаються ультрарозподілами Жевре порядку β .

У [12, с. 145–147] доведено, що $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A)$ при $\beta \geq 1$, де A – гармонійний осцилятор. Тоді, як випливає із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів у гільбертовому просторі з дискретним спектром (див. п. 1), простори $S_\beta^\beta, (S_\beta^\beta)', \beta \geq 1/2$, можна охарактеризувати так.

Якщо $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in \Phi', c_k = \langle f, e_k \rangle$, то правильними є такі співвідношення еквівалентності:

$$\text{а) } (f \in S_\beta^\beta) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k| \leq c \exp(-\mu(2k + 1)^{1/(2\beta)})); \quad (\text{А})$$

$$\text{б) } (f \in (S_\beta^\beta)') \Leftrightarrow (\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k| \leq c \exp(\mu(2k + 1)^{1/(2\beta)})). \quad (\text{Б})$$

4. Функції від гармонійного осцилятора.

Нехай B – невід'ємний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі H з щільною у H областю визначення $\mathcal{D}(B), f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – деяка неперервна функція, яка строго монотонно зростає на $[0, +\infty), \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = +\infty$. За функцією f і оператором B на множині

$$\mathcal{D}(f(B)) = \left\{ \varphi \in H \mid \int_0^{\infty} f^2(\lambda) d(E_\lambda f, f) < \infty \right\},$$

де $E_\lambda, \lambda \in [0, +\infty)$, – спектральна функція оператора B , будемо оператор $f(B)$:

$$f(B)\varphi = \int_0^{\infty} f(\lambda) dE_\lambda \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(f(B)), \quad (2)$$

який також невід'ємний і самоспряжений в

H , при цьому $\overline{\mathcal{D}(f(B))} = H$ [12]. Інтеграл (2) береться, фактично, лише по спектру $\sigma(B)$ оператора B , тобто

$$f(B)\varphi = \int_{\sigma(B)} f(\lambda) dE_{\lambda}\varphi, \varphi \in \mathcal{D}(f(B)).$$

Якщо $B = A -$ гармонійний осцилятор, то $\sigma(A) = \{\lambda_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\lambda_k = 2k + 1$. Спектральна функція E_{λ} , $\lambda \in [0, +\infty)$, оператора A є кусково-сталюю і має розриви у точках $\lambda_k, k \in \mathbb{Z}_+$, причому $E_{\lambda_{k+0}} - E_{\lambda_k}$ – оператор проектування на власний підпростір оператора A , який відповідає власному значенню λ_k . Цей підпростір є одновимірним, відповідна функція Ерміта h_k утворює його базис. Отже,

$$(E_{\lambda_{k+0}} - E_{\lambda_k})\varphi = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})} \cdot h_k = c_k(\varphi)h_k;$$

спектральна функція E_{λ} , $\lambda \in [0, +\infty)$, у цьому випадку має вигляд

$$(E_{\lambda}\varphi)(x) = \sum_{\lambda_k < \lambda} c_k(\varphi)h_k(x),$$

а інтеграл (2) є таким:

$$(f(A)\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)(E_{\lambda_{k+0}} - E_{\lambda_k})\varphi(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(\varphi)h_k(x), \varphi \in \mathcal{D}(f(A)),$$

при цьому $\mathcal{D}(f(A)) = \left\{ \varphi \in L_2(\mathbb{R}) \mid \sum_{k=0}^{\infty} f^2(\lambda_k)|c_k(\varphi)|^2 < \infty, \lambda_k = 2k + 1 \right\}$, $f(\lambda_k)$ – власні числа оператора $f(A)$. Оператор $f(A)$ продовжимо на Φ' до неперервного оператора $\hat{f}(A)$: $\hat{f}(A)\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(\varphi)h_k$,

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi)h_k \in \Phi'.$$

Розглянемо узагальнену функцію G_f із простору Φ' , побудовану за функцією f : $G_f = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)h_k$. Тоді $\hat{f}(A)$ – оператор згортки, який діє у просторі Φ' :

$$\hat{f}(A)\varphi = G_f * \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(\varphi)h_k.$$

Символом A_f будемо позначати звуження оператора $\hat{f}(A)$ на простір $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A)$, $\beta \geq 1$; при цьому

$$\Phi \subset S_{\beta/2}^{\beta/2} \subset L_2(\mathbb{R}) \subset (S_{\beta/2}^{\beta/2})' \subset \Phi', \beta \geq 1.$$

Лема 1. Нехай $G_f \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, тоді оператор $A_f \in$ неперервним у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$.

Доведення. Передусім доведемо, що $G_f * \varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для довільної функції $\varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$. Справді, оскільки $G_f \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, то із умови (Б) випливає, що

$$\forall \mu_1 > 0 \exists c_1 = c_1(\mu_1) > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_k(G_f)| = f(\lambda_k) \leq c_1 \exp(\mu_1 \lambda_k^{1/\beta}), \quad (3)$$

де $\lambda_k = 2k + 1$. Крім того, $\varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, тому, з урахуванням умови (А), $\exists \mu_2 > 0 \exists c_2 > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k(\varphi)| \leq c_2 \exp(-\mu_2 \lambda_k^{1/\beta})$. Тоді

$$|c_k(G_f * \varphi)| = |c_k(G_f)| \cdot |c_k(\varphi)| \leq c_1 c_2 \exp(-(\mu_2 - \mu_1) \lambda_k^{1/\beta}).$$

Візьмемо $\mu_1 = \mu_2/2$, тоді

$$|c_k(G_f * \varphi)| \leq \tilde{c} \exp(-\tilde{\mu} \lambda_k^{1/\beta}), \tilde{c} = c_1 c_2,$$

$\tilde{\mu} = \mu_2/2$, звідки й випливає, що $G_f * \varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$. Отже, оператор A_f відображає простір $S_{\beta/2}^{\beta/2}$ в себе. Доведемо, що A_f – неперервний оператор у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, тобто довільну обмежену множину цього простору він відображає в обмежену множину цього ж простору (відзначимо, що в просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $\beta \geq 1$, клас неперервних операторів співпадає з класом обмежених операторів [12]).

Нехай L – обмежена множина у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} H_{\alpha, \beta}$. Тоді L – обмежена множина у гільбертовому просторі $H_{\alpha, \beta}$ при деякому $\alpha > 0$, тобто $\exists b > 0 \forall \psi \in L :$

$$\|\psi\|_{H_{\alpha, \beta}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) |c_k(\psi)|^2 \leq b^2,$$

$\lambda_k = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+$, або

$$\forall \psi \in L : |c_k(\psi)| \leq b \exp(-\alpha \lambda_k^{1/\beta}), k \in \mathbb{Z}_+.$$

У нерівності (3) покладемо $\mu_1 = \alpha/2$. Тоді

$$\begin{aligned} |c_k(A_f\psi)| &= |c_k(G_f)| \cdot |c_k(\psi)| \leq \\ &\leq c_1 b \exp(-(\alpha - \mu_1)\lambda_k^{1/\beta}) = b_2 \exp(-\alpha_1\lambda_k^{1/\beta}), \\ \alpha_1 &= \alpha/2, b_2 = c_1 b, \text{ і} \end{aligned}$$

$|c_k(A_f\psi)| \exp\left(\frac{\alpha_1}{2}\lambda_k^{1/\beta}\right) \leq b_2 \exp\left(-\frac{\alpha_1}{2}\lambda_k^{1/\beta}\right)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси випливає збіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(A_f\psi)| \exp\left(\frac{\alpha_1}{2}\lambda_k^{1/\beta}\right)$. Таким чином, множина $A_f L$ обмежена у просторі $H_{\alpha_1/2, \beta} = H_{\alpha/4, \beta}$, тобто у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$. Твердження доведено.

Надалі вважатимемо, що функція f задовольняє умову:

$$\exists d_0, d_1, d_2 > 0, d_1 \geq d_0, \forall \lambda \in [0, \infty) :$$

$$d_0 \lambda^{2/\beta} \leq f(\lambda) \leq d_1 \lambda^{2/\beta} + d_2. \quad (4)$$

5. Нелокальна багатоточкова за часом задача.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - A_f u(t, x) = 0, \quad (5)$$

де $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega$, A_f – оператор, побудований в п. 4 за функцією f .

Під розв'язком рівняння (5) розумітимемо функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, яка задовольняє умови: 1) $u(t, \cdot) \in C^2((0, \infty), S_{\beta/2}^{\beta/2})$ і задовольняє рівняння (5); 2) для довільного фіксованого проміжку $[\delta, +\infty) \subset (0, +\infty)$ існує стала $c = c(\delta) > 0$ така, що

$$\sup_{t \in [\delta, +\infty)} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq c.$$

Теорема 1. *Функція u є розв'язком рівняння (5) тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x), \\ (t, x) &\in \Omega, \lambda_k = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, $\beta \geq 1$.

Доведення. Нехай u задається формулою (6). Доведемо, що $u(t, \cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ при кожному $t > 0$. Оскільки $\psi \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, то

$$\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 : |c_k| \leq c \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta}), \quad (7)$$

$k \in \mathbb{Z}_+$. Враховуючи (4), (7), а також співвідношення $c_k(u(t, x)) = c_k \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)})$ знайдемо, що

$$\begin{aligned} |c_k(u(t, x))| &\leq c \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta}) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq \\ &\leq c \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta}) \exp(-\sqrt{d_0} t \lambda_k^{1/\beta}) = \\ &= c \exp(-(\sqrt{d_0} t - \mu) \lambda_k^{1/\beta}). \end{aligned}$$

Візьмемо $\mu = \sqrt{d_0} t / 2$. Тоді

$$|c_k(u(t, x))| \leq c \exp(-\mu \lambda_k^{1/\beta}), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

звідси випливає, що $u(t, \cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ при кожному $t > 0$.

Функція $u(t, x)$ диференційовна за $t \in (0, \infty)$ (для довільного $x \in \mathbb{R}$). Справді, нехай $t \in [\varepsilon, +\infty)$, де $\varepsilon > 0$. Доведемо, що ряд

$$\begin{aligned} - \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{f(\lambda_k)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(t, x, \lambda_k) \end{aligned} \quad (8)$$

збігається рівномірно по t , тоді

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(t, x, \lambda_k).$$

Враховуючи нерівності (4), (7), а також те, що $|h_k(x)| \leq 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$ [11], для $t \geq \varepsilon$ і довільного, фіксованого $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$|\gamma(t, x, \lambda_k)| \leq c \sqrt{\tilde{d}} \lambda_k^{1/\beta} \exp(-\varepsilon \sqrt{d_0} \lambda_k^{1/\beta}).$$

$$\cdot \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta}) \leq c \sqrt{\tilde{d}} \cdot \frac{2}{\varepsilon} \exp\left(-\left(\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{d_0} - \mu\right) \lambda_k^{1/\beta}\right),$$

$$\tilde{d} = \max\{d_1, d_2\}. \quad (9)$$

Нехай $\mu = \varepsilon \sqrt{d_0} / 4$. Тоді $|\gamma(t, x, \lambda_k)| \leq \tilde{c} \sqrt{\tilde{d}} \exp(-\mu \lambda_k^{1/\beta})$. Звідси отримуємо, що ряд

(8) збігається рівномірно по $t \in [\varepsilon, +\infty)$. Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то функція $u(t, x)$ диференційовна за t на проміжку $(0, +\infty)$, а співвідношення (9) має місце для кожного $t \in (0, +\infty)$. Аналогічно можна довести, що функція $u_t(t, x)$ диференційовна за $t \in (0, \infty)$. Отже, $u(t, \cdot) \in C^2((0, \infty), S_{\beta/2}^{\beta/2})$.

Функція u задовольняє рівняння (5). Справді,

$$\begin{aligned} A_f u(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(u(t, x)) h_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x). \end{aligned}$$

З іншого боку, при доведенні диференційовності функції $u(t, x)$ встановлено, що

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x).$$

Таким чином, $u(t, x)$ – розв’язок рівняння (5).

Перевіримо виконання умови 2). Маємо, що

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(u(t, x))|^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}). \end{aligned}$$

Враховуючи умову (4) і нерівності (7) знайдемо, що для $t \geq \delta > 0$

$$\begin{aligned} |c_k| \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) &\leq c \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta}) \cdot \\ \cdot \exp(-t\sqrt{d_0} \lambda_k^{1/\beta}) &\leq c \exp(-(\delta\sqrt{d_0} - \mu) \lambda_k^{1/\beta}), \\ \lambda_k = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Візьмемо $\mu = \delta\sqrt{d_0}/2$. Тоді для $t \geq \delta$ виконується нерівність $|c_k| \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq c \exp(-\mu \lambda_k^{1/\beta})$. Звідси отримуємо, що

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [\delta, +\infty)} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &\leq \\ &\leq c^2 \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-2\mu \lambda_k^{1/\beta}) = \tilde{c}(\delta). \end{aligned}$$

Отже, умова 2) виконується.

Навпаки, нехай u – розв’язок рівняння (5). Тоді $u(t, \cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2} \subset L_2(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$, при цьому $u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) h_k(x)$, $c_k(t) = (u(t, x), h_k)_{L_2(\mathbb{R})}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, причому

$$\|u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(t)|^2, \quad t > 0. \quad (10)$$

Помножимо (5) скалярно на h_k , $k \in \mathbb{Z}_+$; тоді

$$\left(\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}, h_k \right) = (A_f u(t, x), h_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$\begin{aligned} (A_f u(t, x), h_k) &= (u(t, x), A_f h_k) = \\ &= (u(t, \cdot), f(\lambda_k) h_k) = f(\lambda_k) (u(t, \cdot), h_k) = \\ &= f(\lambda_k) c_k(t). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\left(\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}, h_k \right) = \frac{d^2}{dt^2} (u(t, \cdot), h_k) = c_k''(t),$$

$k \in \mathbb{Z}_+$, то функція $c_k(t)$ (при фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$) задовольняє умову

$$c_k''(t) - f(\lambda_k) c_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, t \in (0, +\infty),$$

загальний розв’язок якого задається формулою

$$c_k(t) = c_k^{(1)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) + c_k^{(2)} \exp(t\sqrt{f(\lambda_k)}),$$

$k \in \mathbb{Z}_+$, де $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ – довільні сталі. Із (10), вигляду коефіцієнтів $c_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і умови 2), яку задовольняє функція $u(t, \cdot)$, випливає, що $c_k^{(2)} = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, тобто $c_k(t) = c_k^{(1)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)})$. Отже, якщо $u(t, \cdot)$ – розв’язок рівняння (5), то $u(t, \cdot)$ має вигляд

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) h_k(x).$$

Доведемо тепер, що

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'.$$

Для цього скористаємося тим, що $\|u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq c$, $c = c(t) > 0$, для кожного $t > 0$. Звідси випливає нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k^{(1)}|^2 \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq c^2,$$

тобто $|c_k^{(1)}| \leq c \exp(t\sqrt{f(\lambda_k)})$. Із умови (4), яку задовольняє функція f випливає, що для кожного $t > 0$ існує стала $c = c(t) > 0$ така, що $|c_k^{(1)}| \leq c \exp(t\sqrt{\tilde{d}\lambda_k^{1/\beta}})$, $\tilde{d} = \max\{d_1, d_2\}$, $\lambda_k = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, звідси випливає, що $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$. Теорема доведена.

Зауваження 1. Введемо позначення

$$G(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) h_k(x).$$

Із властивостей функції f випливає, що $G(t, \cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для кожного $t > 0$. Крім того, $u(t, x) = G(t, x) * \psi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $\forall \psi \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$. Отже, оператор згортки $G(t, x) * \cdot$ переводить кожний елемент простору $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ (зокрема, кожний елемент простору $S_{\beta/2}^{\beta/2} \subset (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$) у розв'язок рівняння (5).

Поставимо задачу: у множині розв'язків рівняння (5) вигляду (6) знайти розв'язок, який задовольняє умову

$$\mu u(0, \cdot) - \sum_{n=1}^m \mu_n u(t_n, \cdot) = g, \quad (11)$$

де $g \in H = L_2(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, \infty)$ – фіксовані числа, $\mu > \sum_{n=1}^m \mu_n$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m$; при цьому $u(0, \cdot)$ розуміємо як $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot)$, де границя розглядається в $L_2(\mathbb{R})$. Таку задачу називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (5). Із теореми 1 і зауваження 1 випливає, що задачу (5), (11) можна поставити ще і так: у класі $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ знайти елемент ψ , який утворює згортку з функцією $G(t, x)$ і є розв'язком рівняння (5), який задовольняє умову

(11). Для розв'язності цієї задачі необхідно знайти коефіцієнти Фур'є $c_k = c_k(\psi)$ такого елемента. Для цього помножимо (11) скалярно на h_k , $k \in \mathbb{Z}_+$, враховуючи при цьому, що

$$c_k(u(t, \cdot)) = c_k(G(t, \cdot))c_k(\psi),$$

$$c_k(G(t, \cdot)) = \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}).$$

У результаті прийдемо до співвідношень

$$\begin{aligned} \mu c_k(G(0, \cdot))c_k(\psi) - \sum_{n=1}^m \mu_n c_k(G(t_n, \cdot))c_k(\psi) &= \\ &= c_k(g), \quad c_k(G(0, \cdot)) = 1. \end{aligned}$$

Отже,

$$c_k(\psi) = c_k(g) \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n \exp(-t_n \sqrt{f(\lambda_k)}) \right)^{-1}.$$

Введемо позначення:

$$Q_1(t, \lambda_k) = \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}).$$

Тоді

$$c_k(\psi) = c_k(g) \cdot \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k) \right)^{-1}.$$

Відмітимо, що $\left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k) \right)^{-1} \leq$

$$\leq \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n \right)^{-1} \equiv \mu_0.$$

Тоді $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(\psi)|^2 \leq \mu_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(g)|^2 = \mu_0^2 \|g\|_H^2$, $g \in H$, тобто елемент ψ , за допомогою якого будується розв'язок задачі (5), (11), належить до $L_2(\mathbb{R})$. При цьому розв'язок задається формулою $u(t, x) = G(t, x) * \psi$,

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} Q_2(\lambda_k) c_k(g) h_k,$$

$$Q_2(\lambda_k) := \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k) \right)^{-1},$$

або

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) h_k(x) =$$

$$= G_1(t, x) * g, \quad g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) h_k \in H,$$

де

$$G_1(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k,$$

$G_1(t, \cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, для всіх $t \in (0, +\infty)$.

Теорема 2. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (5), (11) є коректно розв'язною, розв'язок задається формулою*

$$u(t, x) = G_1(t, x) * g(x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

при цьому $\{G_1(t, \cdot), u(t, \cdot)\} \subset S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для всіх $t > 0$.

Доведення. Те, що функція $u(t, x)$ є розв'язком задачі (5), (11), доведено раніше. Єдиність розв'язку цієї задачі випливає з таких міркувань. Якщо $g = 0$, то $c_k(g) = (g, h_k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$; тоді $u(t, x) = 0$ для кожного $t \in (0, +\infty)$, що і доводить єдиність розв'язку задачі (5), (11).

Доведемо тепер, що розв'язок задачі (5), (11) неперервно залежить від функції, за допомогою якої задається умова (11). Нехай $\{g, g_n, n \geq 1\} \subset L_2(\mathbb{R})$, причому $g_n \rightarrow g$ при $n \rightarrow \infty$ у просторі $L_2(\mathbb{R})$, тобто $\|g_n - g\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Це рівносильно тому, що $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(g_n - g)|^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Нехай u_n – розв'язок задачі (5), (11), який відповідає функції g_n , за допомогою якої задається умова (11). Тоді

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= \|G_1(t, \cdot) * (g_n - g)\|^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(G_1(t, \cdot))|^2 \cdot |c_k(g_n - g)|^2. \end{aligned}$$

Із доведеного раніше випливає, що $|c_k(G_1)| \leq \tilde{c}, k \in \mathbb{Z}_+$, де $\tilde{c} = \left(\mu - \sum_{p=1}^m \mu_p\right)^{-1} > 0$. Отже,

$$\|u_n - u\|^2 \leq \tilde{c}^2 \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(g_n - g)|^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

що і потрібно було довести. Теорему доведено.

Згортка $G_1(t, \cdot) * g$ має зміст і в тому випадку, коли $g \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})' = G_{\{\beta\}}'(A)$, при цьому $u(t, \cdot) = G_1(t, \cdot) * g \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ при кожному $t \in (0, \infty)$. Доведемо, що функція $u(t, x)$ є розв'язком рівняння (5), але умову (11), де $g \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, $u(t, x)$ задовольняє у тому розумінні, що

$$\begin{aligned} \mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} u(t, \cdot) &= g, \\ g &\in (S_{\beta/2}^{\beta/2})', \end{aligned} \quad (12)$$

границі розглядаються у просторі $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$.

Перед доведенням деяких допоміжних тверджень, дамо означення абстрактної функції. Нехай X – топологічний простір, K – деяка множина чисел. Функцію $K \ni t \rightarrow \varphi_\nu \in X$ називають абстрактною функцією параметра ν зі значеннями в просторі X . Про властивості абстрактних функцій див. [12, 94–97]. Зокрема, абстрактна функція називається диференційовною у точці $\nu_0 \in K$, якщо у просторі X існує границя

$$\left. \frac{d\varphi_\nu}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{\nu_0+h} - \varphi_{\nu_0}}{h}.$$

Лема 2. *Функція $G_1(t, \cdot), t \in (0, \infty)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, диференційовна за t .*

Доведення. Виберемо довільне $t \in (0, \infty)$. Оскільки $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A) = H_{\{\beta\}} = \bigcup_{\alpha>0} H_{\alpha, \beta}$, де A – гармонійний осцилятор, то для доведення твердження досить довести, що

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta t}(x) &:= \frac{1}{\Delta t} [G_1(t + \Delta t, x) - G_1(t, x)] \longrightarrow \\ &\frac{\partial}{\partial t} G_1(t, x), \quad \Delta t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

у просторі $H_{\{\beta\}}$ (якщо $\Delta t < 0$, то вважаємо Δt таким, що $t + \Delta t \geq t/2$). Це означає, що: 1) множина функцій $\{\Phi_{\Delta t} : |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq$

0} ($\varepsilon_0 > 0$ – довільно фіксоване мале число)
 є обмеженою у просторі $H_{\{\beta\}}$, тобто $\exists c > 0$

$$\forall \Delta t \ (|\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0) : \|\Phi_{\Delta t}\|_{H_{\alpha,\beta}}^2 \leq c$$

для деякого $\alpha > 0$;

2) $\Phi_{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} G_1(t, \cdot)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ у просторі $H_{\{\beta\}}$, тобто

$$\left\| \Phi_{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial t} G_1(t, \cdot) \right\|_{H_{\alpha,\beta}}^2 \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Передусім відзначимо, що функція $G_1(t, \cdot)$ диференційовна за змінною $t \in (0, \infty)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Доведення цієї властивості аналогічне доведенню диференційовності функції, яка задається формулою (6); при цьому $\frac{\partial G_1(t,x)}{\partial t} = - \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{f(\lambda_k)} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x)$.

Оскільки

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta t}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta t} [Q_1(t + \Delta t, \lambda_k) - Q_1(t, \lambda_k)] \cdot \\ &\cdot Q_2(\lambda_k) h_k(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{f(\lambda_k)} Q_1(t + \theta \Delta t, \lambda_k) \cdot \\ &\cdot Q_2(\lambda_k) h_k(x), \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

то

$$c_k(\Phi_{\Delta t}) = -\sqrt{f(\lambda_k)} Q_1(t + \theta \Delta t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k)$$

(якщо $\Delta t < 0$, то внаслідок домовленостей відносно Δt маємо, що $t + \theta \Delta t > t + \Delta t \geq t/2$). Тоді для довільно фіксованого $\alpha < t\sqrt{d_0}/2$ (d_0 – стала із нерівності (4)) виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\Delta t}\|_{H_{\alpha,\beta}}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) |c_k(\Phi_{\Delta t})|^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) \exp(-2(t + \theta \Delta t)) \cdot \\ &\cdot \sqrt{f(\lambda_k)} Q_2^2(\lambda_k) \leq (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \cdot \\ &\cdot \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}), \quad \tilde{\mu}_0 = \sum_{p=1}^m \mu_p. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} f(\lambda_k) \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}) &\leq \frac{2}{t^2} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq \\ &\leq \frac{2}{t^2} \exp(-t\sqrt{d_0} \lambda_k^{1/\beta}), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

то

$$\|\Phi_{\Delta t}\|_{H_{\alpha,\beta}}^2 \leq \frac{2}{t^2} (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-2} \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-(t\sqrt{d_0} - 2\alpha) \lambda_k^{1/\beta}) < \infty,$$

$\lambda_k = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+$. Отже, множина функцій $\{\Phi_{\Delta t} : |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0\}$ обмежена у просторі $H_{\{\beta\}}$.

Перевіримо виконання умови 2). Нехай $\Psi_{\Delta t}(x) := \Phi_{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial t} G_1(t, x)$. Тоді

$$\begin{aligned} \Psi_{\Delta t}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} [Q_1(t, \lambda_k) - Q_1(t + \theta \Delta t, \lambda_k)] \cdot \\ &\cdot Q_2(\lambda_k) \sqrt{f(\lambda_k)} h_k(x). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\alpha,\beta}}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) |\exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) - \\ &- \exp(-(t + \theta \Delta t)\sqrt{f(\lambda_k)})|^2 Q_2^2(\lambda_k) f(\lambda_k) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) \exp(-2(t + \theta_1 \Delta t)\sqrt{f(\lambda_k)}) \cdot \\ &\cdot f^3(\lambda_k) \theta^2 Q_2^2(\lambda_k) (\Delta t)^2 \leq \\ &\leq (\mu - \mu_0)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) \cdot \\ &\cdot \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}) f^3(\lambda_k) (\Delta t)^2, \quad 0 < \theta_1 < 1. \end{aligned}$$

Оскільки $f^3(\lambda_k) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq 3!/t^3$ та $\alpha < t\sqrt{d_0}/2$, то $\|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\alpha,\beta}}^2 \leq 3!(\mu - \mu_0)^{-2} t^{-3} \cdot$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-(t\sqrt{d_0} - 2\alpha) \lambda_k^{1/\beta}) (\Delta t)^2.$$

Отже, $\|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\alpha,\beta}} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ для довільно-фіксованого $\alpha \in (0, t\sqrt{d_0}/2)$, тобто $\Phi_{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} G_1(t, \cdot)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ у просторі $H_{\{\beta\}} = S_{\beta/2}^{\beta/2}$. Лема доведена.

Аналогічно доводиться диференційовність функції $\frac{\partial}{\partial t}G_1(t, \cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0, \infty)$ зі значеннями у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$.

Лема 3. Для функції

$$u(t, x) = G_1(t, x) * g = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k h_k(x), (t, x) \in \Omega, \quad (13)$$

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})', c_k = \langle g, h_k \rangle, k \in \mathbb{Z}_+,$$

правильною є формула $u(t, x) = \langle g, G_{t,x}(\cdot) \rangle$, де

$$G_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x) h_k(y).$$

Доведення. Нехай

$$S_{n,t,x}(y) := \sum_{k=0}^n Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x) h_k(y).$$

Твердження леми випливає з того, що послідовність частинних сум $S_{n,t,x}$ збігається до $G_{t,x}$ при $n \rightarrow \infty$ у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2} = H_{\{\beta\}}$ при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ (для доведення цієї властивості використовуються оцінки функції Ерміта h_k : $|h_k(x)| \leq 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, і функції $Q_1(t, \lambda_k)$, $Q_2(\lambda_k)$). Справді, внаслідок лінійності і неперервності функціонала g

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) h_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) \langle g, h_k(y) \rangle h_k(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) \langle g, h_k \rangle h_k(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle g, \sum_{k=0}^n Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x) h_k(\cdot) \right\rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g, S_{n,t,x}(\cdot) \rangle = \langle g, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,t,x}(\cdot) \rangle = \\ &= \langle g, G_{t,x}(\cdot) \rangle. \end{aligned}$$

Лема 4. Функція $u(t, x)$, яка задається формулою (13), диференційовна за t , при цьому

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \left\langle g, \frac{\partial}{\partial t} G_{t,x}(\cdot) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} G_1(t, x) * g.$$

Доведення. Із леми 2 випливає, що функція $G_{t,x}$, як абстрактна функція аргументу t зі значеннями у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, диференційовна за t (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$). Отже,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\Delta t, t, x}(y) &:= \frac{1}{\Delta t} [G_{t+\Delta t, x}(y) - G_{t, x}(y)] \rightarrow \\ &\frac{\partial}{\partial t} G_{t, x}(y) \end{aligned}$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$. Тоді, враховуючи неперервність функціонала g , прийдемо до співвідношень

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [u(t + \Delta t, x) - u(t, x)] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle g, \frac{1}{\Delta t} [G_{t+\Delta t, x}(\cdot) - G_{t, x}(\cdot)] \right\rangle = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle g, \tilde{\Phi}_{\Delta t, t, x}(\cdot) \rangle = \\ &= \langle g, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{\Phi}_{\Delta t, t, x}(\cdot) \rangle = \left\langle g, \frac{\partial}{\partial t} G_{t, x}(\cdot) \right\rangle. \end{aligned}$$

Той факт, що $\partial u / \partial t$ можна також подати за допомогою згортки $\frac{\partial G_1(t, \cdot)}{\partial t} * g$, доводиться за схемою, яка використовувалася при доведенні леми 2. Лема доведена.

Варто відзначити, що аналогічно доводиться диференційовність за t функції $\partial u / \partial t$, при цьому

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \left\langle g, \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{t,x}(\cdot) \right\rangle = \frac{\partial^2 G_1(t, x)}{\partial t^2} * g.$$

Лема 5. Нехай $u(t, x) = G_1(t, x) * g$, $g \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, $(t, x) \in \Omega$; тоді у просторі $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ виконується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} u(t, \cdot) = g. \quad (14)$$

Доведення. Для доведення (14) візьмемо довільну функцію $\psi(x) =$

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\psi)h_k(x) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ і відмітимо, що внаслідок неперервності вкладання $S_{\beta/2}^{\beta/2}$ у простір $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ і ортонормованості базису $\{h_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$

$$\begin{aligned} \langle u(t, \cdot), \psi \rangle &= (u(t, \cdot), \psi)_{L_2(\mathbb{R})} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t, \cdot))c_k(\psi) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi), \\ &\lambda_k = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mu \lim_{t \rightarrow +0} \langle u(t, \cdot), \psi \rangle - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} \langle u(t, \cdot), \psi \rangle = \\ = \mu \lim_{t \rightarrow +0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t, \cdot))c_k(\psi) - \\ - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t, \cdot))c_k(\psi), \end{aligned}$$

при цьому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t, \cdot))c_k(\psi)$ збігається рівномірно по $t \in (0, \infty)$. Це впливає із вигляду коефіцієнтів $c_k(u(t, \cdot))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, нерівності

$$|c_k(u(t, \cdot))| \cdot |c_k(\psi)| \leq \tilde{c}|c_k(g)| \cdot |c_k(\psi)|,$$

$t \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і тверджень (А), (Б). Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t, \cdot))c_k(\psi) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t_n, \cdot))c_k(\psi) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t_n, \lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi), \quad (15) \\ \lim_{t \rightarrow +0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t, \cdot))c_k(\psi) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(0, \cdot))c_k(\psi) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi). \quad (16) \end{aligned}$$

Враховуючи (15), (16), знайдемо, що

$$\begin{aligned} \mu \lim_{t \rightarrow +0} \langle u(t, \cdot), \psi \rangle - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} \langle u(t, \cdot), \psi \rangle = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k) \right) \right] Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g)c_k(\psi) = \langle g, \psi \rangle, \end{aligned}$$

$$\psi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}, g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g)h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})',$$

що і потрібно було довести.

Теорема 3. *Нелокальна багатоточкова задача (5), (12) є коректно розв'язною, розв'язок дається формулою*

$$u(t, x) = G_1(t, x) * g = \langle g, G_{t,x}(\cdot) \rangle, \quad (t, x) \in \Omega,$$

$u(t, \cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для довільного $t > 0$.

Доведення. Із властивостей абстрактної згортки випливає, що $u(t, \cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для довільного $t > 0$. Функція $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (5). Справді,

$$A_f(G_1(t, \cdot) * g) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(G_1(t, \cdot) * g)h_k =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(G_1)c_k(g)h_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(g)Q_1(t, \lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k. \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 G_1(t, x)}{\partial t^2} * g = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} \right) c_k(g)h_k = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(g) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k.$$

Звідси отримуємо, що функція $u(t, x) = G_1(t, x) * g$ є розв'язком рівняння (5). Крім того, із леми 5 випливає, що $u(t, x)$ задовольняє (12) у вказаному сенсі. Отже, $u(t, x)$ – розв'язок задачі (5), (12). Єдиність розв'язку випливає із наступних міркувань: якщо $g = 0$, то $c_k(g) = \langle g, h_k \rangle = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$; тоді $u(t, x) = 0$, $t \in (0, +\infty)$.

Як приклад, розглянемо оператор A_f , побудований за функцією $f(\lambda) = \lambda^2$, яка задовольняє умову (4) з параметром $\beta = 1$. При цьому рівняння (5) має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} - 2x^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + x^4 u(t, x), \quad (t, x) \in \Omega. \quad (17)$$

Для рівняння (17) задамо двоточкову задачу з параметрами μ, μ_1 ; $\mu > \mu_1$:

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \mu_1 \lim_{t \rightarrow t_1} u(t, \cdot) = g, \quad (18)$$

$$g \in (S_{1/2}^{1/2})', t_1 > 0.$$

Внаслідок теореми 3 така задача є коректно розв'язною, розв'язок задається формулою

$$u(t, x) = \langle g, G_{t,x}(\cdot) \rangle, u(t, \cdot) \in S_{1/2}^{1/2}, t > 0,$$

де $G_{t,x}(y) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(2k+1)} (\mu - \mu_1 e^{-t_1(2k+1)})^{-1} h_k(x) h_k(y).$$

Скористаємося тим, що

$$(\mu - \mu_1 e^{-t_1(2k+1)})^{-1} = \mu^{-1} \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu} e^{-t_1(2k+1)} \right)^{-1} =$$

$$= \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu} \right)^n e^{-nt_1(2k+1)}, \quad \frac{\mu_1}{\mu} e^{-t_1(2k+1)} < 1,$$

$k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$G_{t,x}(y) = \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t+nt_1)(2k+1)} h_k(x) h_k(y).$$

Враховуючи результат, наведений в [2, с. 53–54], знайдемо, що

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t+nt_1)(2k+1)} h_k(x) h_k(y) = \\ & (2\pi \operatorname{sh}(2(t + nt_1)))^{-1/2} \cdot \\ & \cdot \exp\{\operatorname{sh}^{-1}(2(t + nt_1))xy - \frac{1}{2} \operatorname{cth}(2(t + nt_1)) \cdot \\ & \cdot (x^2 + y^2)\} \equiv K_n(t, x, y). \end{aligned}$$

Отже,

$$G_{t,x}(y) = \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu} \right)^n K_n(t, x, y), \mu_1/\mu < 1.$$

Зокрема, якщо $g = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})'$, де δ – дельта-функція Дірака, то розв'язок задачі дається формулою

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \langle \delta, G_{t,x}(y) \rangle = G_{t,x}(0) = \\ &= \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu} \right)^n K_n(t, x, 0). \end{aligned}$$

Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = 0$ (випадок задачі Коші), $g = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})'$, то

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (2\pi \operatorname{sh}(2t))^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \operatorname{cth}(2t)x^2\right\}, \\ & (t, x) \in \Omega. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.
2. Городецький В.В. *Множини початкових значень гладких розв'язків дифференціально-операторних рівнянь параболічного типу*. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.
3. Нахушев А.М. *О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения*. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 92–101.
4. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии*. – М.: Высшая, школа, 1995. – 301 с.

-
5. Белавин И.А., Капица С.П., Курдюмов С.П. *Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения* // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1988. – Т. 38, № 6. – С. 885–902.
 6. Майков А.Р., Поезд А.Д., Якунин С.А. *Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем* // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1990. – Т. 30, № 8. – С. 1267–1271.
 7. Дезин А.А. *Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия* // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61–86.
 8. Мамян А.Х. *Общие граничные задачи в слое* // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 292–296.
 9. Городецкий В.В., Широковских А.О. *Нелокальна багаточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором* // Буковинський математ. журнал. Т. 3, № 1. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2015. – С. 30–44.
 10. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены*. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
 11. Горбачук В.И. *О разрешимости задачи Дирихле для дифференциально-операторного уравнения второго порядка* // Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов: Сб. науч. трудов. – К., 1985. – С. 8–22.
 12. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. *Пространства основных и обобщенных функций*. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.