УДК 517.925


©2017 р. Г.А. Гержановська

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова


# ВЛАСТИВОСТІ ПОВІЛЬНО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ


Для рівнянь другого порядку, що містять нелінійності у деякому сенсі близькі до правильно змінних, встановлено необхідні й достатні умови існування одного класу неколивних розв'язків, а також одержано асимптотичні зображення для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

The necessary and sufficient conditions of the existence of a class of non- oscillatory solutions of second-order differential equations with nonlinearities, that are in some sense near to regularly varying nonlinearities are obtained. The asymptotic representations of such solutions and their first derivatives are found too.


Розглядається рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')f(y,y'), \qquad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to ]0,+\infty[$ — неперервні функції, $f : \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to ]0,+\infty[$ — неперервно диференційовна функція, $Y_i \in \{0,\pm\infty\}$, $\Delta_{Y_i}$ — проміжок або $[y_i^0;Y_i[$,[1] або $]Y_i;y_i^0]$ $(i=0,1)$. Крім того, вважається, що кожна з функцій $\varphi_i(z)$, (i=0,1) є правильно змінною функцією (див. [1], глава 1, §1.1, стр. 9) при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядку $\sigma_i$, $\sigma_0+\sigma_1 \ne 1$, $\sigma_1 \ne 1$, а функція $f$ задовольняє умову

$$\lim_{\substack{v_k \to Y_k \\ v_k \in \Delta_{Y_k}}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k}(v_0,v_1)}{f(v_0,v_1)} = 0, \qquad (2)$$

рівномірно по $v_j \in \Delta_{Y_j}$, $j \ne k$, $k,j = 0,1$.

Розв'язок $y$ рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язком, якщо він заданий на $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ та для кожного $i \in \{0,1\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)\,y(t)} = \lambda_0. \qquad (3)$$

Дану роботу присвячено дослідженню особливого класу $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків рівняння (1). Цей клас є одним з найскладніших для дослідження внаслідок того, що такі розв'язки є повільно змінними функціями при $t \uparrow \omega$. Тому в даній роботі результат отримано лише при додаткових обмеженнях на праву частину рівняння (1).

Введемо необхідні позначення

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t-\omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$\Theta_i(z) = \varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i}, \quad (i=0,1)$$

$$I(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega}^{t} p(\tau)d\tau,$$

$$A_\omega = \begin{cases} a, \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$J(t) = \int_{B_\omega^1}^{t} \left| I(\tau)\Theta_1\left(\frac{\mathrm{sign} y_0^1}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau,$$

$$B_\omega = \begin{cases} a, \text{ якщо} \\ \int_a^\omega \left| I(\tau)\Theta_1\left(\frac{\mathrm{sign} y_0^1}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty, \\ \omega, \text{ якщо} \\ \int_a^\omega \left| I(\tau)\Theta_1\left(\frac{\mathrm{sign} y_0^1}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Отримано наступну теорему.

[1] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

**Теорема.** *Нехай у рівнянні* (1) $f(v_0, v_1) = \exp(R(|\ln|v_0, v_1||))$, $R$ *— неперервно диференційовна, з монотонною похідною, правильно змінна на нескінченності функція порядку* $\mu, 0 < \mu < 1$ *і*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{R(|\ln|\pi_\omega(t)||)J(t)}{\pi_\omega(t)\ln|\pi_\omega(t)|J'(t)} = 0. \tag{4}$$

*Тоді, для існування у рівняння* (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$*-розв'язків, для яких існує скінченна чи нескінченна границя* $\lim\limits_{t\uparrow\omega} = \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, *необхідно і достатньо виконання умов*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0 |J(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \ \lim_{t\uparrow\omega} y_1^0 |I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} = Y_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \sigma_1 - 1, \ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = 0 \tag{5}$$

*і нерівностей*

$$\begin{gathered} \frac{I(t)}{y_1^0(1-\sigma_1)} > 0 \text{ при } t \in ]a, \omega[, \\ \frac{y_0^0 y_1^0 (1-\sigma_1)J(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1} > 0 \text{ при } t \in ]a, \omega[. \end{gathered} \tag{6}$$

*Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце наступні асимптотичні зображення при* $t \uparrow \omega$

$$\begin{gathered} \frac{y(t)}{|\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \\ = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} J(t)[1+o(1)], \end{gathered} \tag{7}$$

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)J(t)}{(1-\sigma_1)J'(t)}[1+o(1)].$$

**Доведення.** *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[ \to \Delta_{Y_0}$ — $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язок рівняння (1). Із умов на $\varphi_0, \varphi_1$ і $R$, з урахуванням 9 із [3] (розділ 5, пункт 1, стор. 116) випливає, що

$$\begin{gathered} \lim_{z\to\infty} \frac{zR'(z)}{R(z)} = \mu, \quad \lim_{z\to\infty} R'(z) = 0, \\ \lim_{\substack{z\to Y_0 \\ z\in\Delta_{Y_0}}} \frac{z\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)} = \sigma_0. \end{gathered} \tag{8}$$

Внаслідок властивостей повільно змінних функцій 1-4 (див. [1], глава 1, §1.4, стор. 23) існують нескінченно диференційовні функції $L_0 : \Delta_{Y_0} \to ]0, +\infty[$, $L_1 : \Delta_{Y_1} \to ]0, +\infty[$ такі, що

$$\begin{gathered} L_i(z) = \Theta_i(z)[1+o(1)] \text{ при } z \to Y_i \, (z \in \Delta_{Y_i}), \\ \lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL_i'(z)}{L_i(z)} = 0 \quad (i = 0, 1). \end{gathered} \tag{9}$$

Розглянемо рівність

$$\begin{gathered} \left( \frac{y'(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y(t)'|^{-\sigma_1}}{L_0(y(t))L_1(y'(t))\exp(R|\ln|y(t), y'(t)||)} \right)' = \\ = \left( 1 - \sigma_1 - R'(|\ln|y(t), y'(t)||) - \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \times \right. \\ \times \left( \sigma_0 + \frac{y(t)L_0'(y(t))}{L_0(y(t))} + R'(|\ln|y(t), y'(t)||) \right) - \\ \left. - \frac{y'(t)L_1'(y'(t))}{L_1(y'(t))} \right) \times \\ \times \frac{y''(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}}{L_0(y(t))L_1(y'(t))\exp(R|\ln|y(t), y'(t)||)}. \end{gathered} \tag{10}$$

Оскільки при $t \uparrow \omega$

$$\begin{gathered} \frac{y''(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}}{\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t))\exp(R|\ln|y(t), y'(t)||)} = \\ = \frac{y''(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}[1+o(1)]}{L_0(y(t))L_1(y'(t))\exp(R|\ln|y(t), y'(t)||)}, \end{gathered}$$

то, з використанням 1 і 2 із [3] (глава 5, §1, стор. 115), у випадку, коли $\int\limits_a^\omega p(\tau)d\tau = +\infty$ отримаємо із (10)

$$\begin{gathered} \frac{|y'(t)|}{\varphi(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\exp(R|\ln|y(t), y'(t)||)} = \\ = (1-\sigma_1)I(t)\Theta_1(y'(t))[1+o(1)]. \end{gathered} \tag{11}$$

В іншому випадку $\int\limits_a^\omega p(\tau)d\tau < +\infty$ отримаємо або (10), або

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{|y'(t)|}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\exp(R(|\ln|y(t), y'(t)||))} =$$

$$= c \neq 0. \tag{12}$$

Доведемо, що (12) не буде виконуватися. Оскільки $\sigma_1 \neq 1$, то внаслідок першої умови із (3) і (8) функція

$$\frac{|y'(t)|}{|y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln|y(t), y'(t)||))}$$

має або нульову, або нескінченну границю при $t \uparrow \omega$. При виконанні умов (12) функція $\varphi_0(y(t))$ мала би відповідно нульову або нескінченну границю при $t \uparrow \omega$. Тому, з використанням правила Лопіталя у формі Штольца, (8), (3), отримали би

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{|y'(t)|}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln|y(t), y'(t)||))} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[\dfrac{1}{\varphi_0(y(t))}\right]'}{\left[\dfrac{|y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln|y(t), y'(t)||))}{y'(t)}\right]'} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \left( \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))} \times \right.$$

$$\times \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln|y(t), y'(t)||))} \times$$

$$\left. \times \frac{\left[\dfrac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} + 1\right]^{-1}}{1 - \sigma_1 - R'\left(|\ln|y(t)y'(t)||\right)} \right) = 0.$$

Це співвідношення суперечить (12). Тобто, (11) має місце в обох випадках.

Зауважимо, що (11) може бути переписано при $t \uparrow \omega$ у вигляді

$$\frac{y'(t)\mathrm{sign} y_1^0}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = |1 - \sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} |I(t)\Theta_1(y'(t))| \times$$

$$\times |\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} [1 + o(1)]. \tag{13}$$

Крім того, з урахуванням вигляду рівняння (1), маємо

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))} =$$

$$= \alpha_0 p(t)\Theta_1(y'(t)), \tag{14}$$

а розділивши (14) на (11) отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\alpha_0 p(t)}{(1 - \sigma_1)I(t)}[1 + o(1)].$$

Звідси, оскільки існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} = \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, яка в силу леми 10.6 із [2] дорівнює $(-1)$, отримаємо другу із умов (5) і першу із умов (6).

Із першої із умов (6) випливає, що існує така повільно змінна неперервно диференційовна функція $K : \Delta_{Y_0} \to ]0; +\infty[$, що $y'(t) = \frac{K(\pi_\omega(t))}{\pi_\omega(t)}$. Тому, з урахуванням властивостей логарифмічної функції і функції $R$, зокрема, (8), маємо при $t \uparrow \omega$

$$R(|\ln|y(t)y'(t)||) = R(|ln|\pi_\omega(t)||)[1 + o(1)]. \tag{15}$$

Нехай

$$W(t) := \int_{B_\omega}^{t} J'(\tau) \exp(R(|\ln|y(\tau)y'(\tau)||))d\tau,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} J(t) = J_0.$$

Покажемо, що функція

$$\exp(R(|\ln|y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||)),$$

де $J^{-1}-$ функція, обернена до $J$, є повільно змінною функцією при $z \to J_0$. Дійсно, з урахуванням умов (4) і (15) маємо

$$\lim_{z\to J_0} \frac{z(\exp(R(|\ln|y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||)))'}{\exp(R(|\ln|y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||))} =$$

$$= \lim_{z\to J_0} \left[\frac{zR'(|\ln|y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||)}{R(|\ln|y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||)} \times \right.$$

$$\times \frac{R(|\ln|y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||)}{\pi_\omega(J^{-1}(z))J'(J^{-1}(z))} \times$$

$$\times \left(\frac{\pi_\omega(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))}{y(J^{-1}(z))} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\pi_\omega(J^{-1}(z))y''(J^{-1}(z))}{y'(J^{-1}(z))}\right)\right] = 0.$$

Звідси, з використанням теорем про інтегрування правильно змінних функцій (твердження 1 і 2 із [3] (розділ 5, пункт 1, стор. 116)), маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{W(t)}{\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))J(t)} = 1.$$

Тому, із (13) випливає перше з асимптотичних зображень (7), а звідси отримаємо другу із умов (6) і першу із (5). З першого зображення (7) з використанням (13) отримаємо друге зображення (7) і другу із умов (5). Також з першого з зображень (7), (13) та (3) отримаємо четверту з умов (5).

*Достатність.* Позначено $g(v_0, v_1) = \exp(R(|\ln|v_0 v_1||))L_0(v_0)L_1(v_1)$, де $L_0, L_1$ визначені в (9). Внаслідок (2) і (9), маємо

$$\lim_{\substack{v_i \to Y_i \\ v_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0, v_1)}{g(v_0, v_1)} = 0 \tag{16}$$

рівномірно по $v_j \in \Delta_{Y_j}$, $j \neq i$, $i, j = 0, 1$. Таким чином, можна вибрати $\tilde{\Delta}_{Y_i} \subset \Delta_{Y_i}$ $(i = 0, 1)$ так, щоб

$$\left| \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0, v_1)}{g(v_0, v_1)} \right| < \zeta, \ (i = 0, 1) \tag{17}$$

при $(v_0, v_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$, де $0 < \zeta < \frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|}{4}$, $\zeta$ достатньо мале і

$$\tilde{\Delta}_{Y_i} = \begin{cases} \{[\tilde{y}_i^0, Y_i[, \text{ якщо } \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[, \\ \qquad\qquad y_i^0 \leq \tilde{y}_i^0 < Y_i; \\ ]Y_i, \tilde{y}_i^0], \text{ якщо } \Delta_{Y_i} = ]Y_i, y_i^0], \\ \qquad\qquad Y_i > \tilde{y}_i^0 \geq y_i^0, \end{cases}$$

$i = 0, 1$.

Так само, як при доведенні теореми 1 із [5], розглянемо функцію

$$F(s_0, s_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)} \\ \\ \dfrac{s_1}{s_0} \end{pmatrix},$$

задану на множині $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$. Розглянемо першу з компонент даної функції. З урахуванням (16) маємо

$$\lim_{\substack{s_0 \to Y_0 \\ s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}}} \frac{s_0 \left( \frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)} \right)'_{s_0}}{\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)}} =$$

$$= \lim_{\substack{s_0 \to Y_0 \\ s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}}} \left( 1 - \frac{\sigma_0}{1-\sigma_1} - \frac{1}{1-\sigma_1} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{s_0 \frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0, s_1)}{g(s_0, s_1)} \right) = \frac{1 - \sigma_0 - \sigma_1}{1 - \sigma_1}$$

рівномірно по $s_1 \in \tilde{\Delta}_{Y_1}$.

Тому

$$\lim_{\substack{s_0 \to Y_0 \\ s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}}} \frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)} = \Upsilon$$

рівномірно по $s_1 \in \tilde{\Delta}_{Y_1}$,

$$\Upsilon = \begin{cases} +\infty, \text{ якщо} \\ Y_0 = +\infty \text{ і } \dfrac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} > 0, \text{ або} \\ Y_0 = 0 \text{ і } \dfrac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} < 0, \\ \\ 0, \text{ якщо} \\ Y_0 = +\infty \text{ і } \dfrac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} < 0, \text{ або} \\ Y_0 = 0 \text{ і } \dfrac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} > 0. \end{cases} \tag{18}$$

Покажемо, що $F$ взаємно однозначно відображає $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$ на множину

$$F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) = \begin{cases} \left[ \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)}; \Upsilon \right) \times \Delta_0, \\ \text{якщо } \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} < \Upsilon, \\ \\ \left( \Upsilon; \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} \right] \times \Delta_0, \\ \text{якщо } \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} > \Upsilon, \end{cases} \tag{19}$$

де

$$\Delta_0 = \begin{cases} (0; +\infty), & \text{якщо } \tilde{y}_0^0 \tilde{y}_0^1 > 0, \\ (-\infty; 0), & \text{якщо } \tilde{y}_0^0 \tilde{y}_0^1 < 0. \end{cases} \tag{20}$$

Розглянемо поведінку функції $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)}$ на прямих

$$s_1 = k s_0, \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{21}$$

На кожній такій прямій $\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)} = \dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}$. Крім того, маємо

$$\left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}\right)'_{s_0} =$$

$$= \frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{(1-\sigma_1)s_0 g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)} \times$$

$$\times \left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{s_0 g'_{s_0}(s_0,ks_0)}{g(s_0,ks_0)} - \right.$$

$$\left. -\frac{ks_0 g'_{ks_0}(s_0,ks_0)}{g(s_0,ks_0)}\right).$$

Це означає, що з урахуванням (17)

$$\operatorname{sign}\left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}\right)'_{s_0} =$$

$$= \operatorname{sign}(y_0^0(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)).$$

Тому функція $\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}$ строго монотонна на будь-якій прямій вигляду (21). Припустимо, що відображення $F$ не є взаємнооднозначним. Тоді

$$\exists (p_0,p_1),(q_0,q_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1},$$

$$(p_0,p_1) \neq (q_0,q_1): \qquad F(p_0,p_1) = F(q_0,q_1).$$

З урахуванням визначення множин $\tilde{\Delta}_{Y_0}, \tilde{\Delta}_{Y_1}$ остання рівність означає, що

$$\begin{aligned} &\frac{|p_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(p_0,p_1)} = \frac{|q_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(q_0,q_1)}, \\ &\frac{p_0}{p_1} = \frac{q_0}{q_1} = c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Точки $(p_0,p_1)$ і $(q_0,q_1)$ лежать на одній прямій вигляду (21). Але тоді (22) не може мати місця, оскільки функція $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,cs_0)}$ строго монотонна на цій прямій. Таким чином, існує обернена $F^{-1}: F(\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1}) \to \tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1}$. Оскільки якобіан функції $F$ є відмінним від нуля на $\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1}$, то функція $F^{-1}$ неперервно диференційовна на $F(\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1})$.

Вважаючи

$$\begin{cases} \dfrac{y(t)}{|\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \\ = c_1 J(t)[1+z_1(x)], \\ \dfrac{y(t)}{y'(t)} = c_2\dfrac{J(t)}{J'(t)}[1+z_2(x)], \end{cases} \tag{23}$$

де

$$c_1 = c_2|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}, \quad c_2 = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1},$$

$$x = \beta\ln|I(t)|,$$

$$\beta = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} I(t) = +\infty, \\ -1, \text{ якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} I(t) = 0, \end{cases}$$

зведемо рівняння (1) до системи

$$\begin{cases} z_1' = \beta H(t(x))[1+z_1]\times \\ \times\left(\dfrac{M(t(x))M_1(t(x))M_2(x,z_1,z_2)M_3(x,z_1,z_2)}{(1-\sigma_1)^2}\times\right. \\ \times\dfrac{|1+z_2|^{1-\sigma_1}}{|1+z_1|^{1-\sigma_1}} - \dfrac{|1+z_2|^{-1}}{1-\sigma_0-\sigma_1}\times \\ \times\left(M_3(x,z_1,z_2)\dfrac{R(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{|\ln|\pi_\omega(t(x))||}+\right. \\ \left.+\dfrac{\varphi_0'(\Psi_0(x,z_1,z_2))\Psi_0(x,z_1,z_2)}{\varphi_0(\Psi_0(x,z_1,z_2))}\right)+ \\ \left.+\dfrac{\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right), \\ z_2' = \beta\left([1+z_2](K(t)-H(t(x)))+\right. \\ \left.+H(t(x)) - \dfrac{1}{1-\sigma_1}\dfrac{|1+z_2|^{2-\sigma_1}}{|1+z_1|^{1-\sigma_1}}\right), \end{cases} \tag{24}$$

де

$$\Psi_0(x,z_1,z_2) =$$

$$= F_0^{-1}\left(c_1 J(t(x))[1+z_1], c_2\frac{J(t(x))}{J'(t(x))}[1+z_2]\right),$$

$$\Psi_1(x,z_1,z_2) =$$

$$= F_1^{-1}\left(c_1 J(t(x))[1+z_1], c_2\frac{J(t(x))}{J'(t(x))}[1+z_2]\right),$$

$$\Phi_0(x,z_1,z_2) =$$

$$= \frac{\Psi_0(x,z_1,z_2)\frac{\partial f}{\partial v_1}(\Psi_0(x,z_1,z_2),\Psi_1(x,z_1,z_2))}{f(\Psi_0(x,z_1,z_2),\Psi_1(x,z_1,z_2))},$$

$$\Phi_1(x,z_1,z_2) =$$

$$= \frac{\Psi_1(x,z_1,z_2)\frac{\partial f}{\partial v_2}(\Psi_0(x,z_1,z_2),\Psi_1(x,z_1,z_2))}{f(\Psi_0(x,z_1,z_2),\Psi_1(x,z_1,z_2))},$$

$$M(t) = \frac{R(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)J(t)}{\pi_\omega(t)|\ln|\pi_\omega(t)||J'(t)},$$

$$M_1(t) = \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)},$$

$$M_2(x,z_1,z_2) =$$

$$= |\ln|\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2)||\times$$

$$\times\frac{R'(|\ln||\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2)||)}{R(|\ln||\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2)||)},$$

$$M_3(x,z_1,z_2) =$$

$$= \frac{R(|\ln||\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2)||)}{|\ln||\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2)||}\times$$

$$\times\frac{|\ln|\pi_\omega(t(x))||}{R(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)},$$

$$H(x) = \frac{I'(t(x))J(t(x))}{I(t(x))J'(t(x))},$$

$$K(x) = H(t(x))\frac{J''(t(x))J(t(x))}{(J'(t(x)))^2}.$$

Внаслідок умови (4)

$$\lim_{t\uparrow\omega} M(t) = 0,$$

а внаслідок третьої із умов (5)

$$\lim_{t\uparrow\omega} M_1(t) = 1-\sigma_1.$$

Позначимо

$$\eta_1(t,z_1) = c_1 J(t)[1+z_1],$$

$$\eta_2(t,z_2) = c_2\frac{J(t)}{J'(t)}\cdot[1+z_2].$$

Розглянемо вираз

$$\frac{J(t)(\Psi_0(x(t),z_1,z_2))'_t}{J'(t)\Psi_0(x(t),z_1,z_2)} =$$

$$= \frac{\eta_1(t,z_1)\frac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_0}(\eta_1(t,z_1),\eta_2(t,z_2))}{F_k^{-1}(\eta_1(t,z_1),\eta_2(t,z_2))}+$$

$$+\frac{\eta_2(t,z_2)\frac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(\eta_0(t,z_1),\eta_1(t,z_2))}{F_k^{-1}(\eta_0(t,z_1),\eta_1(t,z_2))}\times$$

$$\times\frac{J(t)J''(t)}{(J'(t))^2}. \qquad (25)$$

Так само, як при доведенні достатності в теоремі 1 із [5], з урахуванням (25), отримаємо, що при побудові множин $\tilde{\Delta}_{Y_0}$, $\tilde{\Delta}_{Y_1}$ число $\zeta$ може бути вибране настільки малим, щоб існували такі константи $\zeta_1,\zeta_2 \in R$, що

$$\zeta_1 < \frac{J(t)(\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2))'_t}{J'(t)\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)} < \zeta_2,$$

$$\forall(\xi_1,\xi_2) \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\times\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$$

і $\mathrm{sign}\zeta_1 = \mathrm{sign}\zeta_2 = \mathrm{sign}\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}$. Тому

$$\lim_{x\to\infty}\Psi_0(x,z_1,z_2) = Y_0 \qquad (26)$$

рівномірно по $z_1,z_2 : |z_j| < \frac{1}{2}, j=1,2$.

Аналогічно, з урахуванням вигляду функції $\Psi_1$ маємо, що при побудові множин $\tilde{\Delta}_{Y_0}$, $\tilde{\Delta}_{Y_1}$ число $\zeta$ може бути вибране настільки малим, щоб існували такі константи $\zeta_3,\zeta_4 \in R$, що

$$\zeta_3 < \frac{\pi_\omega(t)(\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2))'}{\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2)} < \zeta_4,$$

$\mathrm{sign}\zeta_3 = \mathrm{sign}\zeta_4 = -1$. Тому

$$\lim_{x\to\infty}\Psi_1(x,z_1,z_2) = Y_1.$$

Звідси, з урахуванням четвертої з умов (5), маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2))'_t}{\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2)} = -1$$

рівномірно по $(\xi_1,\xi_2) \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\times\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

Тому функція $\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2)$ є правильно змінною функцію порядку $(-1)$ при $t\uparrow\omega$. Отримаємо, що

$$\lim_{x\to+\infty} M_3(x,z_1,z_2) = 1 \text{ рівномірно по } z_1,z_2.$$

З урахування вигляду функцій $\Psi_0$, $\Psi_1$ маємо

$$\lim_{x\to+\infty}\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2) =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{якщо } Y_1 = \infty, \\ 0, & \text{якщо } Y_1 = 0 \end{cases}$$

рівномірно по $z_1, z_2 : |z_1| < \frac{1}{2}$, $|z_2| < \frac{1}{2}$.

Тому

$$\lim_{x \to +\infty} \ln |\Psi_0(x, z_1, z_2)\Psi_1(x, z_1, z_2)| = \infty.$$

Таким чином, оскільки $R$ — правильно змінна функція при прямуванні аргументу до $\infty$ порядку $\mu$, то

$$\lim_{x \to +\infty} M_2(x, z_1, z_2) = \mu.$$

Згідно з (26) і (16) маємо

$$\lim_{\substack{v_i \to Y_i \\ v_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0, v_1)}{g(v_0, v_1)} = 0,$$

рівномірно по $v_j \in \Delta_{Y_j}$, $i \neq j$, $i, j = 0, 1$. Крім того, маємо, що

$$\lim_{x \to \infty} \Phi_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad (i = 0, 1) \tag{27}$$

рівномірно по $z_1, z_2 : |z_j| < \frac{1}{2}, j = 1, 2$. Так само, як при доведенні достатності в теоремі 1 із [5], з (5), (6), (18) — (20) випливає, що можна вибрати число $t_0 \in [a, \omega[$ так, щоб для будь-яких $|z_j| \leq \frac{1}{2}$, $j = 1, 2$

$$\begin{pmatrix} c_1 J(t)[1 + z_1] \\ \\ c_2 \dfrac{J(t)}{J'(t)} \cdot [1 + z_2] \end{pmatrix} \in F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1})$$

при $t \in [t_0, \omega[$.

Тепер розглянемо систему диференціальних рівнянь (24) на множині

$$\Omega = [x_0, +\infty[ \times D, \text{ где } x_0 = \beta \ln |I(t_2)|,$$

$$D = \{(z_1, z_2) : |z_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2\}.$$

Перепишемо систему (24) у вигляді

$$\begin{cases} z_1' = (A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + R_1(x, z_1, z_2) + \\ +R_2(z_1, z_2)) H(t(x)), \\ z_2' = A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + R_3(x) + R_4(z_1, z_2), \end{cases} \tag{28}$$

де

$$A_{11} = 0, \qquad A_{12} = \beta, \qquad A_{21} = \beta,$$

$$A_{22} = \beta \left( K(t) - H(t) - \frac{2 - \sigma_1}{1 - \sigma_1} \right),$$

$$R_1(x, z_1, z_2) = -\beta [1 + z_1] \times$$

$$\times \left( \frac{M(t) M_1(t) M_2(x, z_1, z_2) M_3(x, z_1, z_2)}{(1 - \sigma_1)^2} \times \right.$$

$$\times \frac{|1 + z_2|^{1 - \sigma_1}}{|1 + z_1|^{1 - \sigma_1}} + \frac{|1 + z_2|^{-1}}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \times$$

$$\left( M_3(x, z_1, z_2) \frac{R(|\ln |\pi_\omega(t)||)}{|\ln |\pi_\omega(t)||} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\varphi_0'(\Psi_0(x, z_1, z_2)) \Psi_0(x, z_1, z_2)}{\varphi_0(\Psi_0(x, z_1, z_2))} - \sigma_0 \right) \right),$$

$$R_2(z_1, z_2) = \beta [1 + z_1] \left( \frac{1 - \sigma_1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \left( |1 + z_2|^{-1} + z_2 \right) - 1 \right) +$$

$$+ \beta z_1 z_2,$$

$$R_3(x) = \beta \left( K(t(x)) - \frac{1}{1 - \sigma_1} \right),$$

$$R_4(z_1, z_2) = \beta \frac{1}{1 - \sigma_1} \left( \frac{|1 + z_2|^{2 - \sigma_1}}{|1 + z_1|^{1 - \sigma_1}} - \right.$$

$$\left. - (2 - \sigma_1) z_2 + (1 - \sigma_1) z_1 - 1 \right).$$

Внаслідок умови (5)

$$\lim_{x \to \infty} H(x) = 0, \tag{29}$$

а звідси

$$\lim_{x \to \infty} K(x) = \frac{1}{1 - \sigma_1}.$$

Отже, з урахуванням (24)

$$\lim_{x \to +\infty} R_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad (i = 1, 3)$$

рівномірно по $z_1, z_2 : (z_1, z_2) \in D$,

$$\lim_{|z_1| + |z_2| \to 0} R_j(z_1, z_2) = 0 \quad (j = 2, 4)$$

рівномірно по $x : x \in ]x_0, +\infty[$.

Застосуємо до (28) перетворення

$$z_2 = w_2 \quad z_1 = w_1 + \frac{1}{1 - \sigma_1} h(x) w_2, \tag{30}$$

де $w_1, w_2$ - нові невідомі функції,

$$h(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))J'(t(x))}{J(t(x))}. \tag{31}$$

З урахуванням (5) та (29) отримаємо

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{H(x)} = \sigma_1 - 1,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h'(x)}{H(x)} = \lim_{x\to+\infty} \beta\times$$
$$\times\left(1 + \frac{pi_\omega(t(x))J''(t(x))}{J'(t(x))} - h(x)\right) = 0. \tag{32}$$

У результаті перетворення (30) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} w_1' = H(x)\left(\frac{h(x)A_{21}}{(1-\sigma_1)H(x)}w_1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{h(x)A_{22}}{(1-\sigma_1)H(x)} - A_{12}\right)w_2\right) + \\ + H(x)Q_1(x, w_1, w_2), \\ w_2 = A_{21}w_1 + \left(A_{22} + \frac{1}{1-\sigma_1}\right)w_2 + \\ + Q_2(x, w_1, w_2), \end{cases} \tag{33}$$

де

$$Q_1(x, w_1, w_2) =$$
$$= \frac{h'(x)}{(1-\sigma_1)H(x)}w_2 + \frac{h^2(x)}{(1-\sigma_1)H(x)} +$$
$$+ \frac{h(x)}{1-\sigma_1}Q_2(x, w_1, w_2) -$$
$$- \sum_{i=1}^{2} R_i\left(x, w_1 + \frac{1}{1-\sigma_1}h(x)w_2, w_2\right),$$
$$Q_2(x, w_1, w_2) =$$
$$= \sum_{i=3}^{4} R_i\left(x, w_1 + \frac{1}{1-\sigma_1}h(x)w_2, w_2\right).$$

Враховуючи (31) та (32), а також властивості функцій $R_i(i = \overline{1,4})$ отримаємо, що для системи (33) виконано усі умови теореми 2.8 з [4], а також ця система має хоча б один розв'язок $\{z_i^*\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2(x_1 \geq x_0)$, що прямує до нуля при $x \to +\infty$. Йому, внаслідок (23) та (30), відповідає розв'язок $y$ рівняння (1), що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (7). Отже $y$ є $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язком. Теорему доведено

**Висновок.** У даній роботі отримано необхідні і достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків у особливому випадку $\lambda_0 = 0$ для класів суттєво нелінійних диференціальних рівнянь вигляду (1), а також асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Seneta E.* Regularly Varying Functions. – Lecture notes in Mathematics 508. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York. – 1976. – 113 p.

2. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02, Киев, 1998. 295 с.

3. *Maric V.* Regular variation and differential equations. – Lecture notes in Mathematics 1726. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York. – 2000. – 128 p.

4. *Евтухов В.М., Самойленко А.М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений// Укр. мат. журн. - 2010. - Т.62, №1. - С. 52 - 80.

5. *Белозерова М. А., Гержановская Г. А.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, в некотором смысле близкими к правильно меняющимся // Мат. Студії. – 2015. – Т.44, №2. – С. 204 – 214.