

СКРІЗЬ РОЗРИВНІ НАРІЗНО ПОЛІНОМІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ НА ДОБУТКАХ ВСЮДИ ЩІЛЬНИХ ПІДМНОЖИН ЧИСЛОВОЇ ПРЯМОЇ

Для довільних злічених всюди щільних підмножин X і Y числової прямої \mathbb{R} побудовано нарізно поліноміальну скрізь розривну функцію $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$.

For all countable dense subsets X and Y of the number line \mathbb{R} a separately polynomial discontinuous everywhere function is built $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Вступ

Питання про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних функцій, яке почали вивчати ще С. Мазур та В. Орлич [1], в останній час знову привернуло увагу математиків [2-11]. Зокрема, нерозв'язаною залишається така загальна проблема: для яких підмножин E степеня K^n довільного поля K множина $S(E)$ всіх нарізно поліноміальних функцій $f : E \rightarrow K$ збігається з множиною $P(E)$ всіх сукупно поліноміальних функцій $f : E \rightarrow K$? Навіть для підмножин арифметичної площини \mathbb{R}^2 не знайдено відповідної необхідної і достатньої умови для цього. Таку умову вдалось знайти [2, теорема 11] для множин $E = X_1 \times \dots \times X_n$, де X_k – довільні підмножини поля K , вона формулюється так: щонайбільше одна з множин X_1, \dots, X_n може бути зліченною. До того ж у [2, теорема 7] був побудований приклад нарізно поліноміальної і скрізь розривної, а тому і не сукупно поліноміальної функції $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ на квадраті раціональної прямої \mathbb{Q} .

У цій статті продовжуються дослідження з [2]. Розвиваючи метод міркувань з [2], що використовує многочлени Лагранжа, ми для довільних злічених всюди щільних підмножин X і Y числової прямої \mathbb{R} будемо нарізно поліноміальну і скрізь розривну функцію $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. При цьому ми не використовуємо як у [2] спеціальних властивостей множини \mathbb{Q} , а лише її зліченність і всюди щільність в \mathbb{R} .

2. Теорема про систему інтервалів з раціональними кінцями

Ми будемо використовувати наступну добре відому властивість, яка негайно випливає з [12, теорема 3].

Теорема 1. *Нехай \mathcal{I} – система всіх інтервалів $I = (a, b)$ з раціональними кінцями a і b . Тоді \mathcal{I} є зліченною множиною.*

Основою нашої побудови є наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $(I_k)_{k=1}^\infty$ – довільна послідовність невироджених інтервалів на числовій прямій \mathbb{R} і X – зліченна всюди щільна в \mathbb{R} множина. Тоді існує така бієкція $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$, $\varphi(n) = x_n$, що $x_{2k} \in I_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Оскільки $\overline{X} = \mathbb{R}$, то для кожного k перетин $I_k \cap X$ нескінченний. Нехай $X = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ – якась перенумерація множини X , де $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$. Існує такий номер n_1 , що $a_{n_1} \in I_1$. Візьмемо який небудь номер \tilde{n}_1 , такий, що $\tilde{n}_1 \neq n_1$. Покладемо $x_2 = a_{n_1}$, $\tilde{x}_2 = a_{\tilde{n}_1}$. Далі знайдемо такий номер n_2 , що $a_{n_2} \in I_2$, причому $n_2 \notin \{n_1, \tilde{n}_1\}$ та довільний номер \tilde{n}_2 , що відрізняється від вибраних номерів n_1, \tilde{n}_1, n_2 , і покладемо $x_4 = a_{n_2}$ і $\tilde{x}_4 = a_{\tilde{n}_2}$. Припустимо, що для деякого номера k уже визначені різні номери n_1, \dots, n_{k-1} , $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{k-1}$ і точки x_{2j} та \tilde{x}_{2j} , такі, що $x_{2j} = a_{n_j} \in I_j$, $\tilde{x}_{2j} = a_{\tilde{n}_j}$ при $j = 1, \dots, k-1$. Оскільки множина $\{n : a_n \in I_k\}$ нескінченна, то існують такі різні

номери n_k і \tilde{n}_k , що $x_{2k} = a_{n_k} \in I_k$, причому ці номери відрізняються від попередньо вибраних. Поклавши $\tilde{x}_{2k} = a_{\tilde{n}_k}$, ми продовжимо нашу побудову ще на один крок, тому її можна продовжити і до нескінченності. В результаті отримаємо по дві послідовності номерів і точок $x_{2k} = a_{n_k}$ і $\tilde{x}_{2k} = a_{\tilde{n}_k}$, такі, що $x_{2k} \in I_k$ для всіх k і всі номери n_k та \tilde{n}_j різні. Множина $E = X \setminus \{x_{2k} : k \in \mathbb{N}\}$ нескінченна, адже вона містить нескінченну множину $\tilde{X} = \{\tilde{x}_{2k} : k \in \mathbb{N}\}$. Оскільки множина X злічenna, то такою ж буде і множина E . Множина $M = \{1, 3, 5, \dots\}$ всіх непарних номерів теж злічenna. Тому існує бієкція $\psi : M \rightarrow E$. Визначимо бієкцію $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$, покладаючи $\varphi(2k) = x_{2k}$ і $\varphi(2k-1) = \psi(2k-1) = x_{2k-1}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Ця бієкція і буде шуканою.

3. Многочлени Лагранжа

Нехай x_1, \dots, x_n – різні точки числової прямої. Розглянемо для кожного $k = 1, \dots, n$ многочлени

$$\psi_k(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

$$(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)$$

і

$$\varphi_k(x) = \frac{\psi_k(x)}{\psi_k(x_k)}.$$

Ясно, що $\varphi_k(x_j) = \delta_{k,j}$, де $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера, тобто $\delta_{k,j} = 0$ при $k \neq j$ і $\delta_{k,k} = 1$.

Для чисел y_1, \dots, y_n многочлен

$$L(x) = \sum_{k=1}^n y_k \varphi_k(x)$$

задовольняє умови: $L(x_k) = y_k$ при $k = 1, \dots, n$. Він називається *многочленом Лагранжа з вузлами* $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

4. Основний результат

Перейдемо тепер до викладу основного результату.

Нагадаємо, що функція $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ яка визначена на підмножині D топологічного простору X називається *локально обмеженою* в точці $x_0 \in \overline{D}$, якщо існує такий окіл

U точки x_0 в X , що множина $f(U \cap D)$ обмежена в \mathbb{R} . Зрозуміло, що неперервна в точці $x_0 \in D$ функція є локально обмеженою в цій точці.

Теорема 3. *Нехай X і Y – зліченні всюди щільні підмножини числової прямої \mathbb{R} . Тоді існує така нарізно поліноміальна скрізь розривна функція $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, яка в жодній точці з \mathbb{R}^2 не є локально обмеженою.*

Доведення. Розглянемо систему \mathcal{P} всіх прямокутників $P = I \times J$, що є добутками невідроджених інтервалів $I = (a, b)$ та $J = (c, d)$ з раціональними кінцями. З теореми 1 легко вивести, що \mathcal{P} – це злічenna множина. Тому її можна записати у вигляді

$$\mathcal{P} = \{P_k : k \in \mathbb{N}\},$$

де $P_k = I_k \times J_k$ при $k \in \mathbb{N}$. Ясно, що \mathcal{P} – це база евклідової топології площини \mathbb{R}^2 . Використавши теорему 2 для послідовностей інтервалів I_k та J_k , занумеруємо множини X та Y так, що

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}, Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\},$$

$x_{2k} \in I_k, y_{2k} \in J_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і $x_n \neq x_m$ та $y_n \neq y_m$ при $n \neq m$.

Використавши многочлени Лагранжа можна побудувати такі послідовності многочленів p_n і q_n на \mathbb{R} , що $p_n(x_n) = q_n(y_n) = n$, причому $p_n(x_m) = q_m(y_n)$ для довільних номерів m і n . Справді, існують такі многочлени p_1 і q_1 , що $p_1(x_1) = q_1(y_1) = 1$. Нехай $n > 1$ і вже побудовані такі многочлени p_1, \dots, p_{n-1} і q_1, \dots, q_{n-1} , що $p_k(x_k) = k = q_k(y_k)$ при $k < n$ і $p_k(x_j) = q_j(y_k)$ при $k, j < n$. Нехай p_n і q_n – це інтерполяційні многочлени Лагранжа з вузлами $(x_1, q_1(y_n)), \dots, (x_{n-1}, q_{n-1}(y_n)), (x_n, n)$ і $(y_1, p_1(x_n)), \dots, (y_{n-1}, p_{n-1}(x_n)), (y_n, n)$ відповідно. Для цих многочленів за побудовою $p_n(x_n) = n = q_n(y_n)$. При $m < n$ будемо мати $p_n(x_m) = q_m(y_n)$ і $q_n(y_m) = p_m(x_n)$, отже, співвідношення $p_k(x_j) = q_j(y_k)$ виконується при всіх $k, j \leq n$. Таким чином, побудову можна продовжити на один крок, а значить, і до нескінченності.

Визначимо функцію $g : (X \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$, покладаючи $g(x, y) = q_n(y)$, якщо

$x = x_n$ і $y \in \mathbb{R}$ і $g(x, y) = p_n(x)$, якщо $y = y_n$ і $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $p_n(x_m) = q_m(y_n)$, то наше означення функції g коректне. Нарешті покладемо $f = g|_{X \times Y}$ і доведемо, що f – шукана функція.

По-перше, $f^x = f(x, \cdot) = g(x, \cdot)|_Y = g^x|_Y = q_n|_Y$, якщо $x = x_n \in X$, і $f_y = f(\cdot, y) = g(\cdot, y)|_X = g^y|_X = p_n|_X$, якщо $y = y_n \in Y$, таким чином, f – це нарізно поліноміальна функція.

По-друге, нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, U – довільний окіл точки x_0 , V – довільний окіл точки y_0 в \mathbb{R} і $W = U \times V$. Покажемо, що функція f не обмежена зверху на множині $W \cap (X \times Y)$. Справді, множина $K = \{k : P_k \subseteq W\}$ нескінченна, адже \mathcal{P} – це база топології в \mathbb{R}^2 , а за побудовою для кожного k точка $p_{2k} = (x_{2k}, y_{2k}) \in I_k \times J_k = P_k$, причому $f(p_{2k}) = 2k$. Оскільки множина K нескінченна, то множина $\{f(p_{2k}) : k \in K\}$ необмежена зверху, а значить, такою буде і множина $f(W \cap (X \times Y))$. Це і доводить нашу теорему.

Зрозуміло, що побудована в теоремі 3 функція f не може бути сукупно поліноміальною, бо тоді вона б була локально обмежена в кожній точці з \mathbb{R}^2 , адже многочлен від двох дійсних змінних є неперервною функцією.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Mazur S., Orlicz W. Grundlegende Eigenschaften der polinomischen Operationen// Studia Math. – 1935. – **5**. – Р. 50-68.
2. Косован В. М., Маслюченко В. К. Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. В. **374**. Математика. — Чернівці: Рута, 2008. — С. 66-74.
3. Косован В. М., Маслюченко В. К. Нарізно поліноміальні функції на довільних підмножинах \mathbb{R}^n // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. **454**. Математика. — Чернівці: Рута, 2009. — С. 50-53.
4. Косован В. М., Маслюченко В. К. Про нарізно сталі та стало-лінійні функції // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Серія: математика.: зб. наук. пр. – **1**. №3. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. 2011. – С. 44-49.
5. Косован В. М., Маслюченко В. К. Про (m, n) -поліноміальні функції на добутках та нарізно поліноміальні функції на хрестах // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Серія: математика.: зб. наук. пр. –

2-3. №3. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. 2012. – С. 108-113.

6. Косован В. М., Маслюченко В. К. Про поліноміальність нарізно сталих функцій // Карпатські математичні публікації. – 2014. – **5**. №3. – С. 61-66.

7. Косован В. М. Про поліноміальність нарізно поліноміальних функцій від багатьох змінних // Бук. мат. журн. – 2014. – **2**. №2-3. – С. 126-129.

8. Косован В. М., Маслюченко В. К. Про поліноміальність нарізно поліноміальних функцій на добутках комплексних банахових просторів // Мат. вісн. НТШ. – 2008. – **5**. – С. 89-96.

9. Плічко А. М. Поліноміальність нарізно поліноміальних операторів // Мат. вісн. НТШ. – 2014. – **11**. – С. 33-35.

10. Волошин Г. А., Косован В. М., Маслюченко В. К. Умова Гаара та сукупна поліноміальність нарізно поліноміальних функцій // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**. №1. – С. 17-27.

11. Волошин Г. А., Косован В. М., Маслюченко В. К. Умова Гаара і тригонометричні поліноми // Збірник праць Ін-ту. математики НАН України. – 2017. – **14**. №1. – С. 103-115.

12. Маслюченко В. К. Елементи теорії множин. – Чернівці: Рута, 2002. – С 132.