

ПЕРЕТВОРЕННЯ БЕССЕЛЛЯ У ПРОСТОРАХ ТИПУ $\overset{\circ}{S}$

Доведено аналог загальної теореми про перетворення Фур'є просторів типу S у випадку інтегрального перетворення Бесселя, визначеного на парних функціях з просторів типу $\overset{\circ}{S}$. Як наслідок отримано твердження про перетворення Бесселя узагальнених просторів типу $\overset{\circ}{S}$.

An analogue of a general theorem on the Fourier transform of S type spaces in the case of the Bessel integral transform defined on the pair functions in $\overset{\circ}{S}$ type spaces is proved. As a consequence, the proposition on the Bessel transform of generalized $\overset{\circ}{S}$ type spaces is obtained.

Вступ. Одним із важливих і ефективних методів вивчення задачі Коші, крайових та мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Фур'є-Бесселя, Лежандра, Лапласа, Вебера, Ганкеля та ін.), який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших задач через їх інтегральне зображення.

І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов довели [1], що в просторах нескінченно диференційованих функцій, заданих на \mathbb{R} (просторах типу S), які задовольняють умову

$$\exists C = C(\varphi) > 0 \exists A = A(\varphi) > 0 \exists B = B(\varphi) > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C A^k B^q m_{k,q},$$

за певних обмежень на послідовність $\{m_{k,q}\}$ оператори множення на x та диференціювання комутують між собою. Звідси вже випливає, що перетворення Фур'є відображає зазначені простори у простори такого ж типу, при цьому

$$\exists C_1 = C_1(\varphi) > 0 \exists A_1 = A_1(\varphi) > 0 \exists B_1 =$$

$$= B_1(\varphi) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|\sigma^k \psi^{(q)}(\sigma)| \leq C_1 A_1^q B_1^k m_{q,k},$$

де $\psi = F[\varphi]$, F – перетворення Фур'є.

При дослідженні сингулярних параболічних рівнянь, еволюційних рівнянь з псевдодіфференціальними операторами та інших рівнянь,

що вироджуються на межі, використовується перетворення Бесселя. У цій роботі доведено аналог загальної теореми з [1] про перетворення Фур'є просторів типу S у випадку інтегрального перетворення Бесселя, визначеного на парних функціях з просторів типу S (простори типу $\overset{\circ}{S}$). Як наслідок, отримано твердження про перетворення Бесселя узагальнених просторів типу $\overset{\circ}{S}$, побудованих за послідовностями вигляду $m_{k,q} = a_k b_q$, $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+$, зокрема, якщо $a_k = k^{k\alpha}$, $b_q = q^{q\beta}$, де $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – фіксовані параметри. Простори, які відповідають таким послідовностям, позначають символами $\overset{\circ}{S}_\alpha$, $\overset{\circ}{S}^\beta$, $\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$. На теперешній час були досліджені властивості інтегрального перетворення Бесселя просторів типу $\overset{\circ}{S}$ з параметрами $\{\alpha, \beta\} \subset (0, 1)$ [2], у цьому випадку елементами таких просторів є функції, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняють певні оцінки. Наприклад, якщо $\varphi \in \overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$, $\{\alpha, \beta\} \subset (0, 1)$, то правильною є нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp \{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\},$$

$$c > 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

В.В. Крехівський у 1981 році [3], використовуючи властивості цілих функцій довів, що простори типу $\overset{\circ}{W}$, які складаються з парних функцій з просторів типу W , введені Б.Л. Гуревичем [4, 5], перетворенням

Бесселя відображаються у простори такого ж типу. Функції з просторів типу W можна охарактеризувати в термінах послідовностей [6], здійснивши оцінки похідних функцій з таких просторів на дійсній вісі. Отже, простори типу $\overset{\circ}{W}$ утворюють певний підклас просторів $\overset{\circ}{S}_{a_{2k}}, \overset{\circ}{S}^{b_{2q}}, \overset{\circ}{S}_{a_{2k}, b_{2q}}$ при відповідному підборі послідовностей $\{a_{2k}\}, \{b_{2q}\}$.

Сукупність $\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$. Нехай числа $m_{2k,2q}$, $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+$, такі, що виконуються умови:

$$1) \exists \gamma > 0 \forall \{k, q\} \subset \mathbb{N} :$$

$$\frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}} \leq \gamma^2 \left(\frac{k+q}{kq} \right)^2 ; \quad (1)$$

$$\frac{m_{2k-2,2q}}{m_{2k,2q}} \leq \gamma \left(\frac{k+q}{kq} \right)$$

або

$$\frac{m_{2k,2q-2}}{m_{2k,2q}} \leq \gamma \left(\frac{k+q}{kq} \right) ; \quad (2)$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \exists \mu_\varepsilon > 0 \forall \{k, q\} \subset \mathbb{N} :$$

$$\frac{m_{2k+2,2q}}{m_{2k,2q}} \leq \mu_\varepsilon (1 + \varepsilon)^{2k+2q}$$

або

$$\frac{m_{2k,2q+2}}{m_{2k,2q}} \leq \mu_\varepsilon (1 + \varepsilon)^{2k+2q}. \quad (3)$$

Сукупність парних нескінченно диференційовних функцій $\varphi = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, для яких виконується умова

$$\exists C = C(\varphi) > 0 \exists A = A(\varphi) > 0 \exists B = B(\varphi) > 0$$

$$\forall x \in [0; +\infty) \forall \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|x^{2k} \varphi^{(2q)}(x)| \leq CA^{2k} B^{2q} m_{2k,2q}, \quad (4)$$

позначатимемо символом $\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$.

Умови (1)–(3) гарантують визначення у $\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$ операцій множення на x^2 , $\frac{d^2}{dx^2}$ і $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$.

Для функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$ також справджується умова

$$\exists C_0 = C_0(\varphi) > 0 \exists A_0 = A_0(\varphi) > 0 \exists B_0 =$$

$$= B_0(\varphi) > 0 \forall x \in [0; +\infty) \forall \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|(x^{2k} \varphi(x))^{(2q)}| \leq C_0 A_0^{2k} B_0^{2q} m_{2k,2q}. \quad (5)$$

Справді, згідно з формулою Лейбніца [7]

$$(x^{2k} \varphi(x))^{(2q)} = \sum_{i=0}^{2q} C_{2q}^i (x^{2k})^{(i)} \varphi^{(2q-i)}(x). \quad (6)$$

Зауважимо, що для φ , крім умови (4), виконуються також нерівності:

$$\begin{aligned} & \exists C_1 = C_1(\varphi) > 0 \exists A_1 = A_1(\varphi) > 0 \exists B_1 = \\ & = B_1(\varphi) > 0 \forall x \in [0; +\infty) \forall \{l, n\} \subset \mathbb{Z}_+ : \\ & |x^{2l-1} \varphi^{(2n-1)}(x)| = |x^{2l-2} (x \varphi^{(2n-1)}(x))| \leq \\ & \leq C_1 A_1^{2(l-1)} B_1^{2n} m_{2(l-1), 2n}. \quad (7) \end{aligned}$$

Подамо праву частину (6) у вигляді суми двох доданків

$$I_{2i} \equiv \sum_{i=0}^{2q} C_{2q}^{2i} (x^{2k})^{(2i)} \varphi^{(2q-2i)}(x),$$

$$I_{2i-1} \equiv \sum_{i=1}^{2q} C_{2q}^{2i-1} (x^{2k})^{(2i-1)} \varphi^{(2q-2i+1)}(x).$$

Нехай виконується, наприклад, перша умова з (2). Враховуючи (4) і (7), маємо

$$\begin{aligned} & |I_{2i}| \leq CA^{2k} B^{2q} m_{2k,2q} \times \\ & \times \left(1 + \frac{1}{2!} \frac{\prod_{i=0}^{2k-i} (2k-i)(2q-i)}{(AB)^2} \frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4!} \frac{\prod_{i=0}^3 (2k-i)(2q-i)}{(AB)^4} \frac{m_{2k-4,2q-4}}{m_{2k,2q}} + \dots \right) \leq \\ & \leq CA^{2k} B^{2q} m_{2k,2q} \times \\ & \times \left(1 + \frac{(4\gamma(2k+2q))^2}{2!(AB)^2} + \left(\frac{(4\gamma(2k+2q))^4}{4!(AB)^4} + \dots \right) \right) \leq \\ & \leq CA^{2k} B^{2q} m_{2k,2q} \operatorname{ch} \left(\frac{4\gamma(k+q)}{AB} \right) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} & |I_{2i-1}| \leq C_1 A_1^{2k} B_1^{2q} m_{2k,2q} \times \\ & \times \left(\frac{1}{1!} \frac{\prod_{i=0}^0 (2k-i)(2q-i)}{A_1^2 B_1^0} \frac{m_{2k-2,2q}}{m_{2k,2q}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3!} \frac{\prod_{i=0}^2 (2k-i)(2q-i)}{A_1^4 B_1^2} \frac{m_{2k-4, 2q-2}}{m_{2k, 2q}} + \dots \Big) \leq \\
& \leq C_1 \frac{B_1}{A_1} A_1^{2k} B_1^{2q} m_{2k, 2q} \times \\
& \times \left(\frac{4\gamma(k+q)}{1!(A_1 B_1)} + \frac{(4\gamma(2k+2q))^3}{3!(A_1 B_1)^3} + \dots \right) \leq \\
& \leq \left(C_1 \frac{B_1}{A_1} \right) A_1^{2k} B_1^{2q} m_{2k, 2q} \operatorname{sh} \left(\frac{4\gamma(k+q)}{A_1 B_1} \right).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
& |I_{2i}| + |I_{2i-1}| \leq \\
& \leq \tilde{C}_0 \tilde{A}_0^{2k} \tilde{B}_0^{2q} m_{2k, 2q} \exp \left(\frac{4\gamma}{d} (k+q) \right),
\end{aligned}$$

де $\tilde{C}_0 = \max \left\{ C, C_1 \frac{B_1}{A_1} \right\}$, $\tilde{A}_0 = \max \{ A, A_1 \}$, $\tilde{B}_0 = \max \{ B, B_1 \}$, $d = \min \{ AB, A_1 B_1 \}$.

Отже, виконується умова (5) зі сталими $A_0 = \tilde{A}_0 \exp \{ 2\gamma/d \}$, $B_0 = \tilde{B}_0 \exp \{ 2\gamma/d \}$, $C_0 = \tilde{C}_0$.

Аналогічно доводимо нерівність (5), якщо виконується друга умова з (2).

Розглянемо оператор Бесселя

$$B_p := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{d}{dx},$$

$p > -\frac{1}{2}$ – фіксований параметр.

Для нескінченно диференційовної парної функції $\varphi = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, правильна рівність

$$B_p^q \varphi(x) = \sum_{i=0}^q C_i(p) \frac{\varphi^{(2q-i)}(x)}{x^i}, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

де $C_i(p)$ – коефіцієнти, залежні від параметра p , при цьому функції $\frac{\varphi^{(2q-i)}(x)}{x^i}$, $i \in \{0, 1, \dots, q\}$, належать до $\overset{\circ}{S}_{m_{2k, 2q}}$. Тому, якщо φ задовольняє умову (4), то

$$\begin{aligned}
& \exists \tilde{C} = \tilde{C}(\varphi, p) > 0 \exists \tilde{A} = \tilde{A}(\varphi, p) > 0 \exists \tilde{B} = \\
& = \tilde{B}(\varphi, p) > 0 \forall x \in [0; +\infty) \forall \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+ : \\
& |x^{2k} B_p^q \varphi(x)| \leq \tilde{C} \tilde{A}^{2k} \tilde{B}^{2q} m_{2k, 2q}, \quad (8)
\end{aligned}$$

і навпаки.

Для функції $x^{2k} \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, справджується співвідношення

$$\begin{aligned}
& B_p(x^{2k} \varphi(x)) = (x^{2k} \varphi(x))^{(2)} + \\
& + (2p+1)(2kx^{2k-2} \varphi(x) + x^{2k-2} (x\varphi^{(1)}(x))).
\end{aligned}$$

Згідно з (4) і (7) отримуємо, що

$$\begin{aligned}
& \exists C' = C'(\varphi) > 0 \exists A' = A'(\varphi) > 0 \exists B' = \\
& = B'(\varphi) > 0 \forall x \in [0; +\infty) \forall \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+ : \\
& |B_p(x^{2k} \varphi(x))| \leq C' A'^{2k} B'^2 m_{2k, 2} (1 + (2p+1)). \\
& \text{Методом математичної індукції встановлюємо оцінку} \\
& \exists \tilde{C}' = \tilde{C}'(\varphi, p) > 0 \exists \tilde{A}' = \tilde{A}'(\varphi, p) > 0 \exists \tilde{B}' = \\
& = \tilde{B}'(\varphi, p) > 0 \forall x \in [0; +\infty) \forall \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+ : \\
& |B_p^q(x^{2k} \varphi(x))| \leq \tilde{C}' \tilde{A}'^{2k} \tilde{B}'^{2q} m_{2k, 2q}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Перетворення Бесселя. Пряме і обернене перетворення Бесселя визначаються за допомогою формул [8]

$$\begin{aligned}
& \psi(\sigma) \equiv F_{B_p}[\varphi](\sigma) = \\
& = \int_0^{+\infty} \varphi(x) j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \varphi \in \overset{\circ}{S}(\mathbb{R}), \\
& \varphi(x) \equiv F_{B_p}^{-1}[\psi](x) = \\
& = \frac{1}{2^{2p} \Gamma^2(p+1)} \int_0^{+\infty} \psi(\sigma) j_p(\sigma x) \sigma^{2p+1} d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \quad (10)$$

де функція j_p є розв'язком задачі [8, 9]

$$\begin{cases} B_p u = \sigma^2 u, \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \end{cases}$$

$\overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$ – сукупність парних функцій з простору $S(\mathbb{R})$ Л. Шварца [1].

Лема. Для функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}_{m_{2k, 2q}}$ правильна рівність

$$\sigma^{2q} B_{p, \sigma}^k \psi(\sigma) = \int_0^{+\infty} B_{p, x}^q (x^{2k} \varphi(x)) j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx.$$

(Тут $B_{p, x}^q$ – q -ий степінь оператора Бесселя порядку p , який діє за змінною x .)

Доведення. Застосуємо формально B_p^k до $\psi = F_{B_p}[\varphi]$. Маємо

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x) B_{p, \sigma}^k (j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{2k} j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx.$$

Інтеграл у правій частині рівності існує та збіжний рівномірно, а тому правильною є рівність

$$\begin{aligned} \sigma^{2q} B_{p,\sigma}^k \psi(\sigma) &= \int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{2k} \sigma^{2q} j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{2k} B_{p,x}^q j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx. \end{aligned}$$

Подамо останній інтеграл як суму двох інтегралів

$$\begin{aligned} I+II &\equiv \int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{2k} \frac{d^2}{dx^2} (B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx + \\ &+ \int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{2k} \frac{2p+1}{x} \frac{d}{dx} (B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx. \end{aligned}$$

Кожний інтеграл проінтегруємо частинами. Враховуючи властивості функції φ , отримуємо

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^{+\infty} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{d^2}{dx^2} (B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx = \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{d}{dx} (B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx - \\ &- \int_0^{+\infty} \frac{2p+1}{x} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{d}{dx} (B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx, \\ II &\equiv \\ &\equiv \int_0^{+\infty} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{2p+1}{x} \frac{d}{dx} (B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx = \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{d}{dx} (B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx - \\ &- \int_0^{+\infty} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{d^2}{dx^2} (B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} I+II &= - \int_0^{+\infty} (\varphi(x) x^{2k}) B_{p,x}^q j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx - \\ &- 2 \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{d}{dx} (B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx. \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} \sigma^{2q} B_{p,\sigma}^k \psi(\sigma) &= \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{d}{dx} (B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x)) x^{2p+1} dx. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши інтеграл справа частинами, прийдемо до співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma^{2q} B_{p,\sigma}^k \psi(\sigma) &= \\ &= \int_0^{+\infty} B_{p,x} (\varphi(x) x^{2k}) B_{p,x}^{q-1} j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx. \end{aligned}$$

Застосувавши вищенаведений алгоритм $q-1$ разів, отримаємо, що

$$\sigma^{2q} B_{p,\sigma}^k \psi(\sigma) = \int_0^{+\infty} B_{p,x}^q (\varphi(x) x^{2k}) j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx.$$

Отже,

$$\sigma^{2q} B_{p,\sigma}^k \psi(\sigma) = F_{B_p} [B_{p,x}^q (\varphi(x) x^{2k})](\sigma).$$

Теорема 1. *Правильною є формула*

$$F_{B_p} [\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}] = \overset{\circ}{S}_{m_{2q,2k}}.$$

Доведення. Очевидно, що $\psi = F_{B_p}[\varphi]$, яка визначається формулою (10), – парна і нескінченно диференційовна функція.

Враховавши (1)–(3), (9), а також оцінку $|j_p(\sigma x)| \leq C_{j_p}$, $\{\sigma, x\} \subset \mathbb{R}$, прийдемо до нерівностей

$$\begin{aligned} |\sigma^{2q} B_{p,\sigma}^k \psi(\sigma)| &\leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} |B_{p,x}^q(x^{2k} \varphi(x))| |j_p(\sigma x)| x^{2p+1} dx \leq \\ &\leq C_{j_p} \tilde{C}' \tilde{A}'^{2k} \tilde{B}'^{2q} m_{2k,2q} \int_0^1 x^{2p+1} dx + \end{aligned}$$

$$+(C_{j_p} \tilde{A}^{[2p+1]+\delta} \tilde{C}') \tilde{A}^{2k} \tilde{B}^{2q} m_{2k,2q} \times \\ \times \int_1^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{x^{[2p+1]+\delta}} dx \frac{m_{2k+[2p+1]+\delta,2q}}{m_{2k,2q}},$$

де $\delta > 0$ – таке, що $[2p+1] + \delta > 0$ – парне число і $\delta - \{2p+1\} > 1$. (Тут $[a]$, $\{a\}$ – відповідно ціла і дробова частини числа a).

Оскільки, згідно з умовами на числа $m_{2k,2q}$, $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+$,

$$\frac{m_{2k+[2p+1]+\delta,2q}}{m_{2k,2q}} = \frac{m_{2k+[2p+1]+\delta,2q}}{m_{2k+[2p+1]+\delta-2,2q}} \dots \\ \dots \frac{m_{2k-2,2q}}{m_{2k,2q}} \leq (\mu_\varepsilon(1+\varepsilon))^{2k+2q} [2p+1] + \delta,$$

то

$$|\sigma^{2q} B_p^k \psi(\sigma)| \leq C_{j_p} \tilde{C}_0 \tilde{A}_0^{2k} \tilde{B}_0^{2q} m_{2k,2q} \times \\ \times \left(\frac{1}{2p+2} + \frac{\tilde{A}^{[2p+1]+\delta}}{\delta - 1 - \{2p+1\}} \right) \times \\ \times (\mu_\varepsilon(1+\varepsilon))^{2k+2q} [2p+1] + \delta.$$

Тому

$$|\sigma^{2q} B_p^k \psi(\sigma)| \leq \tilde{C} \tilde{A}^{2k} \tilde{B}^{2q} m_{2k,2q}, \quad (11)$$

де сталі \tilde{C} , \tilde{A} і \tilde{B} залежні від p .

Отже, $\psi \in \mathring{S}_{m_{2q,2k}}$ і $F_{B_p}[\mathring{S}_{m_{2q,2k}}] \subset \mathring{S}_{m_{2q,2k}}$.

Також правильне вкладення $F_{B_p}[\mathring{S}_{m_{2q,2k}}] \subset \mathring{S}_{m_{2q,2q}}$. Застосовуючи ще раз перетворення Бесселя і вищенаведені вкладення, отримуємо $F_{B_p}[\mathring{S}_{m_{2q,2q}}] = \mathring{S}_{m_{2q,2k}}$.

Розглянемо простори $\mathring{S}_{a_{2k}}$, $\mathring{S}^{\overset{\circ}{b}_{2q}}$, $\mathring{S}_{a_{2k}}$, які складаються з парних функцій відповідно з просторів S_{a_k} , S^{b_q} , $S_{a_k}^{b_q}$ з тією самою топологією [1].

Теорема 2. Якщо числа a_{2k} , b_{2q} , $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+$, такі, що:

$$\exists C_a > 0 \exists C_b > 0 \exists \tilde{C} > 0 \exists A_0 > 0 \forall \{k, q\} \subset \mathbb{N}:$$

$$\frac{a_{2k-2}}{a_{2k}} \leq C_a k^{-2(1-\mu)}, \quad \frac{b_{2q-2}}{b_{2q}} \leq C_b q^{-2(1-\lambda)},$$

$$\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \mu + \lambda \leq 1, \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} \leq \tilde{C} A_0^{2k}, \quad (12)$$

$$\text{то } F_{B_p}[\mathring{S}_{a_{2k}}] = \mathring{S}^{\overset{\circ}{a}_{2q}}, \quad F_{B_p}[\mathring{S}^{\overset{\circ}{b}_{2q}}] = \mathring{S}_{b_{2k}}, \\ F_{B_p}[\mathring{S}_{a_{2k}}^{\overset{\circ}{b}_{2q}}] = \mathring{S}_{b_{2k}}^{\overset{\circ}{a}_{2q}}.$$

Доведення. Розглянемо насамперед простір $\mathring{S}_{a_{2k}}^{\overset{\circ}{b}_{2q}}$. Тоді $m_{2k,2q} = a_{2k} b_{2q}$, $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+$.

Перевіримо виконання умов (1)–(3).

Справді, врахувавши перші дві умови з (12), маємо

$$\frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}} = \frac{a_{2k-2}}{a_{2k}} \cdot \frac{b_{2q-2}}{b_{2q}} \leq C_a C_b \left(\frac{k^\mu q^\lambda}{kq} \right)^2 \leq \\ \leq C_a C_b \left(\frac{(\max\{k, q\})^{\mu+\lambda}}{kq} \right)^2 \leq \\ \leq C_a C_b \left(\frac{(k+q)^{\mu+\lambda}}{kq} \right)^2.$$

Тоді

$$\frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}} \leq C_a C_b \left(\frac{k+q}{kq} \right)^2.$$

Нехай $\mu \leq \lambda$. Перевіримо виконання першої умови з (2). Згідно з першою нерівністю з (12) маємо

$$\frac{m_{2k-2,2q}}{m_{2k,2q}} = \frac{a_{2k-2}}{a_{2k}} \leq C_a k^{2(\mu-1)} \leq C_a \frac{k^{2\mu-1} q}{kq} \leq \\ \leq C_a \frac{(\max\{k, q\})^{2\mu}}{kq} \leq C_a \frac{(k+q)^{2\mu}}{kq} \leq \\ \leq C_a \frac{(k+q)^{\mu+\lambda}}{kq} \leq C_a \frac{(k+q)}{kq}.$$

Якщо ж $\mu \geq \lambda$, то аналогічно перевіряється виконання другої умови з (2). Отже, умови (1)–(2) виконуються зі сталою $\gamma = \max\{C_a, \sqrt{C_a C_b}\}$.

Виконання перших двох умов з (12) для $m_{2k,2q} = a_{2k} b_{2q}$, $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+$, гарантує виконання оцінки (4). А виконання третьої умови з (12) гарантує виконання оцінки (11). Отже, правильна рівність $F_{B_p}[\mathring{S}_{a_{2k}}^{\overset{\circ}{b}_{2q}}] = \mathring{S}_{b_{2k}}^{\overset{\circ}{a}_{2q}}$.

Аналогічно встановлюються рівності $F_{B_p}[\mathring{S}_{a_{2k}}] = \mathring{S}^{\overset{\circ}{a}_{2q}}$ і $F_{B_p}[\mathring{S}^{\overset{\circ}{b}_{2q}}] = \mathring{S}_{b_{2k}}$.

Частинним випадком просторів $\mathring{S}_{a_{2k}}$, $\mathring{S}^{\overset{\circ}{b}_{2q}}$, $\mathring{S}_{a_{2k}}^{\overset{\circ}{b}_{2q}}$ є простори \mathring{S}_α , \mathring{S}^β , $\mathring{S}_\alpha^\beta$, які складаються з парних функцій відповідно з просторів S_α , S^β , S_α^β з тією самою топологією [1].

Наслідок. $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}_\alpha] = \overset{\circ}{S}^\alpha$, $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}^\beta] = \overset{\circ}{S}_\beta$,
 $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta] = \overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$, $\alpha > 0, \beta > 0$.

Доведення. Перевіримо виконання умов (12) теореми 2. Маємо, що

$$\begin{aligned} \frac{a_{2k-2}}{a_{2k}} &= \frac{(2k-2)^{(2k-2)\alpha}}{(2k)^{2k\alpha}} = \\ &= \frac{1}{(2k-2)^{2\alpha}} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{2k\alpha} = \\ &= \frac{1}{2^{2\alpha}} \frac{1}{k^{2\alpha}} \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{2\alpha} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{2k\alpha} \leq \\ &\leq e^{-2\alpha} \frac{1}{k^{2\alpha}}, \end{aligned}$$

оскільки $\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{2\alpha} \leq 2^{2\alpha}$, $k \geq 2$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\alpha k} = e^{-\alpha}.$$

Аналогічно встановлюємо нерівності $\frac{b_{2q-2}}{b_{2q}} \leq e^{-2\beta} \frac{1}{q^{2\beta}}$. Крім того,

$$\begin{aligned} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} &= \frac{(2k+2)^{(2k+2)\alpha}}{(2k)^{2k\alpha}} = \\ &= (2k+2)^{2\alpha} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{2k\alpha} \leq \\ &\leq C_\alpha 2^{2\alpha} (k+1)^{2\alpha} e^{2\alpha} \leq C_\alpha 2^{2\alpha} 2^{(k+1)2\alpha} e^{2\alpha}, \end{aligned}$$

оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\alpha k} = e^\alpha$, $(k+1)^{2\alpha} \leq C 2^{(k+1)2\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$.

Отже,

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} \leq \tilde{C} A_0^{2k},$$

де $\tilde{C} = C C_\alpha 2^{4\alpha}$, $A_0 = 2^\alpha$.

Зауваження. Для просторів $\overset{\circ}{S}_\alpha$, $\overset{\circ}{S}^\beta$, $\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$ виконуються й оцінки (1)–(3), оскільки

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mu_\varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} :$$

$$(k+1)^{2\alpha} \leq \mu_\varepsilon (1+\varepsilon)^{2k}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

2. Дринь С.С., Дринь І.І. Перетворення Фур'є-Бесселя просторів типу S та S' // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.160. Математика. – Чернівці, Рута, 2003. – С. 50–59.

3. Крехивский В.В. Преобразования Фурье-Бесселя классов целых функций, убывающих на действительной оси. // Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1984. – С. 124–128.

4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

5. Гуревич Б.Л. Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем // Докл. АН СССР – 1954. – Т.99, №6. – С. 893–896.

6. Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М. Різні форми означення просторів типу W // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.111. Математика. – Чернівці, Рута, 2001. – С. 21–26.

7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. Перевод с английского И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна, Л.З. Румшинского и Л.Я. Цлафа. Под общей редакцией И.Г. Арамановича. Издание второе. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

8. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Математический сборник. – 1955. – Т.36 (78), №2. – С. 299–310

9. Левитан Б.И. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – Т.6, вып.2. – С. 102–143.