

©2018 р. І. В. Замрій, М. В. Працьовитий

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова,
Державний університет телекомунікацій**ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ, ВИЗНАЧЕНИХ В
ТЕРМІНАХ Q_s -ЗОБРАЖЕННЯ ДРОБОВОЇ ЧАСТИНИ ДІЙСНОГО
ЧИСЛА**

Для заданого Q_s -зображення чисел $x \in [0; 1]$, яке є узагальненням класичного трійкового зображення, і визначається параметрами $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{s-1}$ ($q_i > 0, \sum_{i=0}^{s-1} q_i = 1$) та наступною рівністю

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right] \equiv \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_s},$$

де $\alpha_k(x) \in A_s \equiv \{0, 1, 2, \dots, s-1\}, \beta_0 = 0, \beta_i = \sum_{j=0}^{i-1} q_j$, вивчаються функції

$$\omega_n(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\dots}^{Q_s}$$

та

$$f_{ni}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}i\alpha_n\alpha_{n+1}\dots}^{Q_s}, \text{ де } n, i \in N.$$

Доведено, що всі функції є кусково-неперервними та мають скінченну кількість точок розриву першого роду, знайдено їх аналітичний вираз. Розглянуто застосування у метричних задачах.

Ключові слова: Q_s -зображення дробової частини дійсного числа, кусково-неперервна функція, кусково-монотонна функція, оператори лівостороннього та правостороннього зсуву цифр.

Q_s -representation of numbers $x \in [0, 1]$ is a generalization of classic ternary representation and is determined by the parameters $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{s-1}$ ($q_i > 0, \sum_{i=0}^{s-1} q_i = 1$) and the following equality

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right] = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_s},$$

where $\alpha_k(x) \in A_s \equiv \{0, 1, 2, \dots, s-1\}, \beta_0 = 0, \beta_i = \sum_{j=0}^{i-1} q_j$. For a given Q_s -representation, we study functions

$$\omega_n(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\dots}^{Q_s}$$

and

$$f_{ni}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}i\alpha_n\alpha_{n+1}\dots}^{Q_s}, \text{ where } n, i \in N.$$

We prove that all functions are piecewise continuous and have a finite number of points of discontinuity of the first kind. Their analytic expression is found. The Gauss-Kuzmin problem is also solved.

Keywords: Q_s -representation digits of real number, piecewise continuous, piecewise monotonic, left-shift and right-shift digit operators.

Вступ

На сьогоднішній день існує ряд проблем, пов'язаних з функціями, що мають всю-

ди щільну множину особливостей (сингулярність, недиференційовність, ніде не монотонність і т.д.), однією з яких є проблема ефективних способів їх задання та дослідження. Для цього використовують геометрично-описовий метод, метод згущення особливостей, задання їх за допомогою систем функціональних рівнянь, а в останній час з цією метою широко використовуються різні системи зображення дійсних чисел як зі скінченним [7, 9], так і нескінченним [8, 11] алфавітом, який споріднений з останнім. Однією з таких є Q -зображення дійсних чисел, вперше введене у 1986 році. Воно використовувалось в різних цілях. Ми ж використовуємо Q -зображення чисел для задання та дослідження функцій і тут значною мірою допомагає знання геометрії цього зображення, а саме: геометричного змісту цифр зображення, властивостей циліндричних, напівциліндричних і хвостових множин, метричних відношень породжених цим зображенням тощо.

Нагадаємо основні поняття [7].

Нехай $Q_s = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_{s-1}\}$ – впорядкована множина додатних дійсних чисел, таких, що $q_i > 0$, $\sum_{i=0}^{s-1} q_i = 1$; $\beta_k = \sum_{i=0}^{k-1} q_i$.

Відомо, що для будь-якого $x \in [0, 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L_s = A_s \times A_s \times \dots \times A_s \times \dots$, $\alpha_n \in \{0, 1, 2, \dots, s-1\} \equiv A_s$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s} \quad (1)$$

Розклад числа x у ряд (1) називається його Q_s -представленням, а скорочений (формальний) запис

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_s} \quad (2)$$

– Q_s -зображенням. При цьому α_k називається k -тим Q_s -символом зображення числа x .

Взагалі кажучи, поняття k -ого Q_s -символа числа є некоректно визначеним, оскільки можна довести, що

$$\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} c_m}^{Q_s} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} [c_m - 1] (s-1)}^{Q_s},$$

де (i) -період в зображенні числа з одного символу (цифри) i . Ті числа, що мають два різні зображення, називаються Q_s -раціональними, а решта – Q_s -іраціональними.

Означення 1. Нехай (c_1, c_2, \dots, c_k) – фіксований впорядкований набір чисел з $\{0, 1, 2, \dots, s-1\}$. Циліндром рангу k з основою $c_1 c_2 \dots c_k$ називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s}$ всіх чисел $x \in [0, 1]$, які мають наступне Q_s -зображення

$$x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+m} \dots}^{Q_s}, \quad \alpha_{k+i} \in A_s.$$

Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s}(0)$ і $b = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s}(s-1)$, тобто $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s} = [a; b]$. Його внутрішність позначатимемо через $\nabla_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s}$ і називатимемо циліндричним інтервалом, тобто $\nabla_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s} = \text{int} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s} = (a, b)$.

Циліндричні множини або циліндри мають наступні властивості:

- 1) $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s} = \bigcup_{t \in A_s} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k t}^{Q_s}$;
- 2) $[0, 1] = \bigcup_{i_1=0}^{s-1} \bigcup_{i_2=0}^{s-1} \dots \bigcup_{i_n=0}^{s-1} \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{Q_s}$;
- 3) $\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k (i+1)}^{Q_s}$;
- 4) $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s}| = \prod_{i=1}^k q_{c_i} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$;
- 5) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_s} = x \equiv \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k \dots}^{Q_s}$ для довільної послідовності (c_k) , $c_k \in A_s$.

В ергодичній теорії важливу роль відіграють оператори лівостороннього зсуву цифр зображення дійсного числа (s -кового, ланцюгового і т.д.). Вони використовуються в математиці (фрактальному аналізі та геометрії, теорії функцій та теорії ймовірностей) в різних цілях, зокрема для опису цікавих груп перетворень простору $[0, 1]$.

На сьогоднішній день досліджувались оператори зсуву цифр для $n = 1$ у різних кодуваннях (зображеннях) дійсних чисел зі скінченним та нескінченним [8, 10] алфавітом. Хоча вони широко застосовуються і відіграють важливу роль у теорії динамічних систем, зокрема фігурують у працях

Ф. Schweiger [3], А. Я. Хінчина [12], Р. О. Нікіфорова і Г. М. Торбіна. Крім того, вони мають застосування й в інших дослідженнях, наприклад, у роботі [4] оператор зсуву ($n = 1$) використовують для побудови базису лінійного простору узагальнених послідовностей Фібоначчі з фіксованими параметрами p та s та знаходження координат довільного вектора в даному базисі, а у роботі [8] для доведення теореми, яка стверджує, що неперервна випадкова величина ξ , 2^∞ -символи якої є незалежними, має або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярно неперервний розподіл. В роботі [9] вони використовувалися для встановлення функціональних співвідношень.

Ці оператори викликають інтерес ще й тому, що тісно пов'язані з перетвореннями та функціями, що зберігають частоти цифр та множинами, що мають властивість зберігати «хвости» (хвостові множини) у різних зображеннях, зокрема у такому аспекті це висвітлено у роботах Р. Ю. Осауленка [6] та С. О. Климчук [5].

Дана робота присвячена вивченню операторів Q_s -цифр дійсного числа, а саме:

$$\omega_n(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\dots}^{Q_s},$$

$$\delta_{in}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}i\alpha_n\alpha_{n+1}\dots}^{Q_s},$$

де $i \in \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Оператор лівостороннього зсуву цифр

У множині всіх Q_s -зображень дійсних чисел з відрізка $[0; 1]$ розглянемо оператор $\hat{\omega}_1$ зсуву цифр, який послідовності $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ ставить у відповідність (відображає) послідовність $(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots)$.

Після домовленості не використовувати Q_s -зображення дійсних чисел із $[0; 1]$ з періодом $(s-1)$ оператор $\hat{\omega}_1$ породжує функцію, означену рівністю

$$\omega_1(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}.$$

Оператор $\hat{\omega}_1$ і функцію ω_1 називають *оператором лівостороннього зсуву цифр* Q_s -зображення дійсного числа.

Очевидно, що даний оператор має рівно s інваріантних точок: $\Delta_{(0)}^{Q_s}$, $\Delta_{(1)}^{Q_s}$, $\Delta_{(2)}^{Q_s}, \dots, \Delta_{(s-1)}^{Q_s}$. Він володіє властивістю сюр'єктивності, але не є ін'єктивним, бо прообразом точки, що має зображення $\Delta_{c_1c_2\dots c_n\dots}^{Q_s} \in s$ точок $\Delta_{0c_1c_2\dots c_n\dots}^{Q_s}$, $\Delta_{1c_1c_2\dots c_n\dots}^{Q_s}$, $\Delta_{2c_1c_2\dots c_n\dots}^{Q_s}, \dots, \Delta_{[s-1]c_1c_2\dots c_n\dots}^{Q_s}$.

Теорема 1. *Функція $\omega_1(x)$:*

1) *є кусково-лінійною, причому лінійною на циліндричних інтервалах першого рангу:*

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{q_0} & \text{при } 0 \leq x < q_0, \\ \frac{x - q_0}{q_1} & \text{при } q_0 \leq x < q_0 + q_1, \\ \frac{x - q_0 - q_1}{q_2} & \text{при } q_0 + q_1 \leq x < q_0 + q_1 + q_2, \\ \dots & \dots \\ \frac{x - (1 - q_{s-1})}{q_{s-1}} & \text{при } 1 - q_{s-1} \leq x < 1; \end{cases}$$

2) *в точках $x = q_0$ і $x = q_0 + q_1, \dots, x = 1 - q_{s-1}$ має розриви першого роду зі стрибком 1, причому $\lim_{x \rightarrow q_0-0} \omega_1(x) = 1$ і*

$$\lim_{x \rightarrow q_0 + q_1-0} \omega_1(x) = 1, \dots, \lim_{x \rightarrow 1 - q_{s-1}-0} \omega_1(x) = 1.$$

Доведення. Очевидно, що

$$\omega_1(q_0) = \omega_1(\Delta_{1(0)}^{Q_s}) = \Delta_{(0)}^{Q_s} = 0 = \omega_1(0).$$

Нехай $x \in \Delta_i^{Q_s}$, тобто

$$\begin{aligned} x &= \Delta_{i\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^{Q_s} = \\ &= \beta_i + \beta_{\alpha_2}q_i + \beta_{\alpha_3}q_iq_{\alpha_2} + \dots + \beta_{\alpha_n}q_i \prod_{j=2}^{n-1} q_{\alpha_j} + \dots = \\ &= \beta_i + q_i \left(\beta_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_3}q_{\alpha_2} + \dots + \beta_{\alpha_n} \prod_{j=2}^{n-1} q_{\alpha_j} + \dots \right). \end{aligned}$$

Тоді $x = \beta_i + q_i\omega_1(x)$.

Звідки

$$\begin{aligned} \omega_n(x) &= x + (1 - q_{\alpha_n}) \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}(x) \times \\ &\times (\beta_{\alpha_{n+1}} - q_{\alpha_n} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_{n+k}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_{n+j}}) = \\ &= x + [(1 - q_{\alpha_n})\omega_1^n(x) - \beta_{\alpha_n}(x)] \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}(x). \end{aligned}$$

Перепишемо число x у вигляді

$$\begin{aligned} x &= A + \beta_{\alpha_n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i} + \\ &+ q_{\alpha_n} \left(\underbrace{\beta_{\alpha_{n+1}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i} + \beta_{\alpha_{n+2}} q_{\alpha_{n+1}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i} + \dots}_B \right) = \\ &= A + \beta_{\alpha_n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i} + q_{\alpha_n} B. \end{aligned}$$

Останню рівність поділимо на q_{α_n} та додамо до лівої і правої частини число A , отримаємо

$$\frac{x}{q_{\alpha_n}} + A = \frac{A + \beta_{\alpha_n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}}{q_{\alpha_n}} + B + A.$$

Очевидно, що $\omega_n(x) = A + B$. Тому

$$\omega_n(x) = \frac{x - A - \beta_{\alpha_n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}}{q_{\alpha_n}} + A. \quad (3)$$

Останню рівність можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \omega_n(x) &= \frac{1}{q_{\alpha_n}} x + b(x), \\ \text{де } b(x) &= A - \frac{A + \beta_{\alpha_n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}}{q_{\alpha_n}}. \end{aligned}$$

Розглянемо циліндри n -го рангу і Q_s - раціональні точки, тобто точки виду $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^{Q_s} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1] (s-1)}^{Q_s} = x^*$, $\alpha_n \neq 0$.

Тоді різниця

$$\begin{aligned} \omega_n(x^*) - \omega_n(x) &= \\ &= \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} (s-1)}^{Q_s} - \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} (0)}^{Q_s} = \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Тобто, функція $\omega_n(x)$ має розриви першого роду.

З вище сказаного впливає наступне твердження.

Теорема 2. Функція $\omega_n(x)$:

1) є кусково-лінійною на циліндричних інтервалах n -го рангу і

$$\omega_n(x) = \frac{1}{q_{\alpha_n}} x + b(x),$$

$$\text{де } b(x) = A - \frac{A + \beta_{\alpha_n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}}{q_{\alpha_n}},$$

$$A = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \dots + \beta_{\alpha_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} q_{\alpha_i};$$

2) має $(s-1) \cdot s^{n-1}$ розривів першого роду в точках $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} 1}^{Q_s}$, $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} 2}^{Q_s}$, \dots , $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [s-1]}^{Q_s}$, де $c_i \in A_s$, зі стрибком $\prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}$ на відповідному циліндричному інтервалі.

Лема 1. Функція φ_{in} , означена на $[0;1]$ рівністю

$$\varphi_{in}(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} i \alpha_{n+1} \dots}^{Q_s},$$

має вираз

$$\varphi_{in}(x) = x + \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \right) [\beta_i - \beta_{\alpha_n} + \omega_1^n(q_i - q_{\alpha_n})]. \quad (4)$$

Доведення. Використовуючи вирази

$$\varphi_{in}(x) = A + \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \right) [\beta_i + q_i \omega_1^n],$$

$$x = A + \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \right) [\beta_{\alpha_n} + q_{\alpha_n} \omega_1^n],$$

знайдемо різницю

$$\begin{aligned} \varphi_{in}(x) - x &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \right) \times \\ &\times [[\beta_i - \beta_{\alpha_n} + \omega_1^n(q_i - q_{\alpha_n})]]. \end{aligned}$$

Звідки й отримуємо (4).

Наслідок 1. Функція φ_{in} є кусково-лінійною, причому лінійною на кожному з i циліндричних відрізків $(n-1)$ -го рангу.

3. Оператор вклеювання цифри Q_s – зображення дійсного числа

Нехай задано: елемент i алфавіту $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ та натуральне число n .

У просторі послідовностей $L^{(s)}$ розглядається оператор $\hat{\delta}_{in}$, який послідовності $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots)$ ставить у відповідність (відображає) послідовність $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, i, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots)$.

Після домовленості не використовувати Q_s – зображення дійсних чисел із $[0; 1)$ з періодом $(s-1)$ оператор $\hat{\delta}_{in}$ породжує функцію

$$\delta_{in}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}i\alpha_n\alpha_{n+1}\dots}^{Q_s}$$

Оператор $\hat{\delta}_{in}$ і функцію δ_{in} називатимемо оператором вклеювання цифри Q_s – зображення дійсного числа.

Очевидно, що δ_{in} має s^{n-1} інваріантних точок і це точки виду: $\Delta_{c_1c_2\dots c_{n-1}i}^{Q_s}$. Також очевидно, що мають місце співвідношення

$$\omega_n(\delta_{in}(x)) = x \text{ і } \delta_{\alpha_n(x)}(\omega_n(x)) = x.$$

Лема 2. Функція $\delta_{i1}(x)$ має вираз

$$\delta_{i1}(x) = \beta_i + q_i x,$$

є лінійною і набуває значень з $[\beta_i; \beta_{i+1})$.

Доведення. Дійсно,

$$\delta_{i1}(x) = \beta_i + \beta_{\alpha_1(x)}q_i + \dots + \beta_{\alpha_n(x)}q_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}(x) + \dots =$$

$$= \beta_i + q_i(\beta_{\alpha_1(x)} + \beta_{\alpha_2(x)}q_{\alpha_1(x)} + \dots) = \beta_i + q_i x.$$

Оскільки x пробігає проміжок $[0; 1)$, то оператор $\delta_{i1}(x)$ набуває значень з $[\beta_i; \beta_{i+1})$.

Наслідок 2. Оператор $\delta_{i1}(x)$ є стиску-ючим відображенням з коефіцієнтом q_i .

Теорема 3. При $n > 1$ функція $\delta_{in}(x)$:

1) є кусково-лінійною, причому лінійною на циліндричних інтервалах $(n-1)$ -го рангу

$$\delta_{in}(x) = x + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} -$$

$$-(1 - q_i) \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_{\alpha_n} + \beta_{\alpha_{n+1}}q_{\alpha_n} + \dots),$$

або

$$\delta_{in}(x) = q_i x + C(1 - q_i) + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j},$$

$$\delta_{in}(x) = C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + q_i \omega^{(n-1)}(x) \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j},$$

де $C = \beta_{\alpha_1} + \dots + \beta_{\alpha_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j}$;

2) має $(s-1) \cdot s^{n-2}$ розривів першого роду в точках виду $x = \Delta_{c_1c_2\dots c_{n-2}1(0)}^{Q_s}, \dots, x = \Delta_{c_1c_2\dots c_{n-2}[s-1](0)}^{Q_s}$, де $c_i \in A_s$, зі стрибком

$$\prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} (\beta_{\alpha_{n-1}} - \beta_{[k_{n-1}-1]} + \beta_i (q_{\alpha_{n-1}} - q_{[k_{n-1}-1]}) - q_{[k_{n-1}-1]} q_i)$$

на відповідному циліндричному інтервалі.

Доведення. Знайдемо вираз функції

$$\delta_{in}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}i\alpha_n\dots}^{Q_s} =$$

$$= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + \dots + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} +$$

$$+ \beta_{\alpha_n} q_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \beta_{\alpha_{n+1}} q_i \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j} + \dots =$$

$$= \underbrace{\left(\beta_{\alpha_1} + \dots + \beta_{\alpha_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} \right)}_C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} +$$

$$+ q_i \underbrace{\left(\beta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \beta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j} + \dots \right)}_D =$$

$$= C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + q_i D.$$

Очевидно, що $x = C + D$. Тому

$$\begin{aligned} \delta_{in}(x) &= C + D + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + q_i D - D = \\ &= x + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} - D(1 - q_i). \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \delta_{in}(x) &= C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \\ &+ q_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_{\alpha_n} + \beta_{\alpha_{n+1}} q_{\alpha_n} + \dots) = \\ &= C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + q_i \omega^{(n-1)}(x) \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}. \end{aligned}$$

Використовуючи вираз для оператора лівостороннього зсуву цифр $(n-1)$ раз, отримаємо

$$\begin{aligned} \delta_{in}(x) &= C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + q_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \frac{x - C}{\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}} = \\ &= q_i x + C(1 - q_i) + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}. \end{aligned}$$

З останнього виразу очевидно, що оператор $\delta_{in}(x)$ при $n > 1$ є кусково-лінійною функцією.

Нехай $\alpha_{n-1} \neq 0$. Розглянемо дві точки $x_1 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} \alpha_{n-1}(0)}^{Q_s}$ і $x_2 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} [\alpha_{n-1}-1](s-1)}^{Q_s}$ та їх образи $\delta_{in}(x_1)$ і $\delta_{in}(x_2)$. Тоді

$$\begin{aligned} \delta_{in}(x_1) - \delta_{in}(x_2) &= \\ &= \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} i(0)}^{Q_s} - \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} [\alpha_{n-1}-1] i(2)}^{Q_s} = \\ &= \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} (\beta_{\alpha_{n-1}} + \beta_i q_{\alpha_{n-1}} + \beta_0 q_{\alpha_{n-1}} q_i + \dots) - \\ &- \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} (\beta_{[\alpha_{n-1}-1]} + \beta_i q_{[\alpha_{n-1}-1]} + \dots) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} (\beta_{\alpha_{n-1}} - \beta_{[\alpha_{n-1}-1]}) + \\ &+ \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} (\beta_i (q_{\alpha_{n-1}} - q_{[\alpha_{n-1}-1]}) - q_{[\alpha_{n-1}-1]} q_i). \end{aligned}$$

Отже, на цилінричних інтервалах $(n-1)$ -го рангу в Q_s - раціональних точках функція $\delta_{in}(x)$ є розривною.

Якщо оператором $\delta_{in}(x)$ вклеювання цифр Q_s - зображення дійсного числа подіяти k разів, то отримаємо

$$\begin{aligned} \delta_{in}^{(k)}(x) &= \delta_{in}(\delta_{in}(\dots(x))) = \\ &= \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \underbrace{i \dots i}_k \alpha_n \alpha_{n+1} \dots}^{Q_s} \\ \delta_{in}^{(k)}(x) &= \underbrace{\left(\beta_{\alpha_1} + \dots + \beta_{\alpha_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} \right)}_C + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_i + \beta_i q_i + \dots + \beta_i q_i^{k-1}) + \\ &+ q_i^k \underbrace{\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_{\alpha_n} + \beta_{\alpha_{n+1}} q_{\alpha_n} + \dots)}_D = \end{aligned}$$

$$= x - D(1 - q_i^k) + \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_i + \beta_i q_i + \dots + \beta_i q_i^{k-1}).$$

Крім того,

$$\delta_{in}^{(k)}(x) = C + \omega_1^{(n-1)}(x) q_i^k \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_i + \beta_i q_i + \dots + \beta_i q_i^{k-1})$$

або

$$\delta_{in}^{(k)}(x) = q_i^k x + C(1 - q_i^k) +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_i + \beta_i q_i + \dots + \beta_i q_i^{k-1}).$$

4. Використання оператора ліво-стороннього зсуву у метричних задачах

Нехай $u = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{Q_s}$ — Q_s -зображення числа u , $\omega_1^n(u) = \Delta_{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots \alpha_{n+k}}^{Q_s}$. Розглянемо множини

$$D_n(x) = \{u : u \in [0; 1], \omega_1^n(u) < x\}.$$

Нехай $\lambda[D_n(x)]$ міра Лебега множини $D_n(x)$. Знайдемо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda[D_n(x)]$.

Аналогічну задачу поставив Гаусс для ланцюгових дробів, а повністю її розв'язав у 1928 році Р.О. Кузьмін. Дана задача виявилася не такою простою із-за геометрії ланцюгових дробів, у нашому ж випадку вона розв'язується значно простіше.

Розв'язок аналогу задачі Гаусса-Кузьміна для Q_s -зображення чисел дає наступна лема.

Теорема 4. *Міра Лебега множини $D_n(x)$ рівна x , тобто*

$$\lambda[D_n(x)] = x.$$

Доведення. При $n = 0$ множина $D_0(x)$ складається з точок $u < x$ і очевидно, що $\lambda[D_0(x)] = x$. Належність $u \in D_0(x)$ означає, що нескінченний набір знаків $(\alpha_1(u), \alpha_2(u), \dots, \alpha_k(u), \dots)$ володіє певною властивістю, яка легко виписується у вигляді співвідношень між знаками Q_s -зображень чисел u та x .

Очевидно, що при $u \in D_0(x)$, тобто $u < x$, то

$$v_i = \Delta_{i\alpha_1(u)\alpha_2(u)\dots\alpha_n(u)}^{Q_s} \in D_1(x), i \in A_s.$$

Більше того, при $v_i \in D_1(x)$ маємо

$$\Delta_{\alpha_2(v)\alpha_3(v)\dots\alpha_k(v)}^{Q_s} = \omega_1^1(v) \in D_0(x).$$

Тому

$$D_1(x) = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{s-1},$$

де $D_0(x) \stackrel{q_i}{\sim} E_i$, $i = 0, 1, \dots, s-1$ а отже,

$$\lambda[D_1(x)] = \sum_{i=0}^{s-1} q_i \lambda[E_i] =$$

$$= (q_0 + q_1 + \dots + q_{s-1}) \lambda[D_0(x)] = x.$$

Аналогічно міркуючи,

$$D_2(x) = \bigcup_{i_2=0}^{s-1} \bigcup_{i_1=0}^{s-1} [E_{i_1 i_2}],$$

де $D_0(x) \stackrel{q_{i_1} q_{i_2}}{\sim} E_{i_1 i_2}$, тоді

$$\lambda[D_2(x)] = \sum_{i_2=0}^{s-1} \sum_{i_1=0}^{s-1} q_{i_1} q_{i_2} \lambda[D_0(x)] = x.$$

Аналогічно для довільного $n \in N$, отримаємо

$$D_n(x) = \bigcup_{i_n=0}^{s-1} \dots \bigcup_{i_1=0}^{s-1} [E_{i_1 i_2 \dots i_n}],$$

де $D_0(x) \stackrel{t}{\sim} E_{i_1 i_2 \dots i_n}$ та $t = \prod_{j=1}^n q_{i_j}$.

Тоді

$$\lambda[D_n(x)] = \lambda[D_0(x)] \sum_{i_n=0}^{s-1} \dots \sum_{i_1=0}^{s-1} \prod_{j=1}^n q_{i_j}.$$

Оскільки $\prod_{j=1}^n q_{\alpha_j}$ визначає довжину від-

різка n -го рангу, тобто $|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{Q_s}| = \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j}$.

А підсумовування добутків ведеться по всеможливих наборах $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_k \in \{0, 1, \dots, s-1\}$, тобто по всеможливих відрізках n -го рангу, то згідно із заданням Q_s -зображення,

$\sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \alpha_k \in \{0, 1, \dots, s-1\}}} \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j} = 1$. Таким

чином

$$\lambda[D_n(x)] = \lambda[D_0(x)] = x.$$

Лема 3. Розв'язком рівняння

$$\omega_k(x) = \delta_{in}(x)$$

є множина точок

$$W = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-1}(i)}^{Q_s}, \text{ де } \alpha_j, i \in A_s,$$

причому $t = n$ при $k \geq n$ або $t = k$ при $k < n$.

Доведення. Згідно з означеннями вказаних функцій, рівність $\omega_k(x) = \delta_{in}(x)$ перепишеться у вигляді

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-2}\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots}^{Q_s} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}i\alpha_n\alpha_{n+1}\dots}^{Q_s}$$

Якщо $k < n$, то очевидно, що множиною розв'язків даного рівняння будуть всі числа у яких починаючи з k -го номеру всі Q_s -цифри дорівнюють i , тобто

$$W = \{x : x = \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}(i)}^{Q_s}, \text{ де } \alpha_j, i \in A_s\}.$$

Якщо ж $k \geq n$, тоді

$$W = \{x : x = \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}(i)}^{Q_s}, \text{ де } \alpha_j, i \in A_s\}.$$

REFERENCES

1. *Eggleston, H.G.* (1951). Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory: The Journal of the Proc. London Math. Soc., 54, 42-93.
2. *Melnichuk, Yu. V.* (1991). Fast converging series representations of real numbers and their implementations in digital processing: The Journal of the Computational number theory, 27-29.
3. *Schweiger, F.* (1995). Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. New York, NY: Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press.
4. *Karvatskyi, D., Vasylenko, N.* (2012). Mathematical structures in the spaces of generalized Fibonacci sequences: Scientific journal NPU of N. P. Drahomanov. Series 1. Physics and mathematics, 13(1), 118-127.
5. *Klymchuk, S., Makarchuk, O., Pratsovytyi, M.* (2014). Frequency of a digit in the representation of a number and the asymptotic mean value of the digits: Ukrainian Mathematical Journal, 66(3), 302-310.
6. *Osaulyenko, R.* (2016). A group of continuous transformations of a segment $[0; 1]$ that preserves the frequency of digits Q_s -representation of a number: Collected Works of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 13(3), 191-204.
7. *Pratsovytyi, M.* (1998). Fractal approach in studies of singular distributions. Kyiv: View of the NPU named after M. P. Dragomanov.
8. *Pratsovytyi, M.* (2013). The geometry of real numbers in their codings means the infinite alphabet as the basis of topological, metric, fractal, and probabilistic theories: Scientific journal NPU of N. P. Drahomanov. Series 1. Physics and mathematics, 14, 189-216.

9. *Pratsovytyi, M., Zamrii, I.* (2013). Inversor of digits of Q_3 -representation of a fractional part of a real number as a solution of a system of three functional equations: Scientific journal NPU of N. P. Drahomanov. Series 1. Physics and mathematics, 15, 156-167.

10. *Pratsovytyi, M., Chuikov, A.* (2016). The simplest functions are related to the operator of the left-shift continued fractional elements of representation of numbers: Collected Works of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 13(3), 158-173.

11. *Turbin, A., Pratsovytyi, M.* (1992). Fractal sets, functions, distributions. Kyiv: Naukova dumka.

12. *Khinchyn, A.* (1978). The continued fractional. Moscow: Nauka.