УДК 517

©2018 р. І.В. Кальчук, Ю.І. Харкевич

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

ПРО НАБЛИЖЕННЯ В СЕРЕДНЬОМУ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ГЕЛЬДЕРА ЇХ УЗАГАЛЬНЕНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Отримано повні асимптотичні розклади точних верхніх меж відхилень узагальненого інтеграла Пуассона від функцій класу Гельдера в інтегральній метриці.

Ключові слова: наближення, клас Гельдера, узагальнений інтеграл Пуассона, асимптотичні розклади, константи Колмогорова-Нікольського.

We obtain complete asymptotic expansion of the exact upper bounds of a generalized Poisson integral of deviations from the Hölder class functions in the integral metric.

Keywords: approximation, Hölder class, generalized Poisson integral, asymptotic expansions, Kolmogorov-Nikolsky constants.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|;$$

L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю

$$\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$$

Множину функцій $f \in L$, які задовольняють умову

$$\|f(x+t) - f(x)\|_1 \leq |t|,$$

будемо позначати через H_1^1, а множину функцій $f \in C$, для яких виконується умова

$$\|f(x+t) - f(x)\|_C \leq |t|,$$

позначатимемо через H_1 . Класи H_1^1 та H_1 називають класами Гельдера.

Розглянемо крайову задачу (в одиничному крузі) для рівняння

$$\triangle u = 0, \tag{1}$$

де $\triangle$ — оператор Лапласа в полярних координатах. Тобто рівняння (1) запишеться у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, (0 \leq r < 1, -\pi \leq x \leq \pi). \tag{2}$$

Розв'язок рівняння (2), що задовольняє граничну умову

$$u(r,x)|_{r=1} = f(x), \ \ -\pi \leq x \leq \pi, \tag{3}$$

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, можемо записати у вигляді

$$A(r,f,x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt\Big\}dt, 0 \leq r < 1. \tag{4}$$

Функцію (4) прийнято називати інтегралом Абеля-Пуассона функції f (див., напр., [1, 2]), а величину

$$K_1(r,t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt =$$

$$= \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t + r^2)}$$

називають ядром Абеля-Пуассона.

Розглянемо тепер крайову задачу (в одиничному крузі) для рівняння

$$\Delta(\Delta u) = 0. \tag{5}$$

Розв'язок рівняння (5), що задовольняє граничні умови

$$u(r,x)|_{r=1} = f(x), \ \frac{\partial u(r,x)}{\partial r}\,|_{r=1} = 0,$$

$$-\pi \le x \le \pi,$$

можемо записати у вигляді

$$B(r,f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Big\{\frac{1}{2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{k}{2}(1-r^2)\right] r^k \cos kt\Big\} dt, 0 \le r < 1. \tag{6}$$

Функцію (6) прийнято називати бігармонічним інтегралом Пуассона функції f (див., напр., [3, 4]), а величину

$$K_2(r,t) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{k}{2}(1-r^2)\right] r^k \cos kt =$$

$$= \frac{(1-r^2)^2(1-r\cos t)}{2(1-2r\cos t+r^2)^2}$$

— бігармонічним ядром Пуассона.

В роботі будемо розглядати деяке узагальнення інтеграла Абеля-Пуассона і бігармонічного інтеграла Пуассона, а саме інтеграл виду

$$P_{s,q}(r,f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K(r,t)dt, \tag{7}$$

який прийнято називати узагальненим інтегралом Пуассона [5], де

$$K(r,t) = \frac{1}{2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+sk(1+r)(1-r)^q\right] r^k \cos kt \tag{8}$$

— ядро узагальненого інтеграла Пуассона і

$$0 \le s \le \frac{1}{2},\ q \ge 1,\ 0 \le r < 1,\ -\pi \le x \le \pi.$$

Відмітимо, що у випадку $s = 0$ з (7) отримаємо інтеграл Абеля-Пуассона $A(r)$, а у випадку $s = \frac{1}{2}$, $q = 1$, з (7) отримаємо бігармонійний інтеграл Пуассона $B(r)$.

Позначимо

$$\mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(r))_C := \sup_{f\in H^1} \|P_{s,q}(r,f,\cdot) - f(\cdot)\|_C, \tag{9}$$

$$\mathcal{E}(H_1^1; P_{s,q}(r))_1 := \sup_{f\in H_1^1} \|P_{s,q}(r,f,\cdot) - f(\cdot)\|_1. \tag{10}$$

Означення 1. [6, с. 198] *Задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величин (9) і (10), згідно з О.І. Степанцем, називатимемо задачею Колмогорова-Нікольського для узагальненого інтеграла Пуассона $P_{s,q}(r)$ відповідно на класах H^1 і H_1^1 в рівномірній та інтегральній метриках.*

Означення 2. [7] *Формальний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(r)$ називається повним асимптотичним розкладом або повною асимптотикою функції $f(r)$ при $r \to 1-$, якщо для всіх $n \in N$*

$$|g_{n+1}(r)| = o(|g_n(r)|)$$

і при будь-якому $m \in N$

$$f(r) = \sum_{n=0}^{m} g_n(r) + o(g_m(r)),\ r \to 1-.$$

Коротко будемо записувати цей факт наступним чином

$$f(r) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(r).$$

Апроксимативні властивості інтегралів Абеля-Пуассона та бігармонійних інтегралів Пуассона на класах Гельдера достатньо добре вивчені.

Перші резутати, пов'язані з дослідженням величин $\mathcal{E}(H^1; A(r))_C$ були отримані І. П. Натансоном [8]. Зокрема, ним була розв'язана задача Колмогорова-Нікольського на класах H^1 для інтеграла Абеля-Пуассона, а саме встановлена асимптотична рівність при $r \to 1-$

$$\mathcal{E}(H^1; A(r))_C = \frac{2}{\pi}(1-r)|\ln(1-r)| + O(1-r).$$

О. П. Тіман [9] отримав точні значення апроксимативних характеристик $\mathcal{E}(H^1; A(r))_C$:

$$\mathcal{E}(H^1; A(r))_C = \frac{2}{\pi}(1-r)\ln\frac{1}{1-r} + \varepsilon_r, 0 < r < 1,$$

$$\varepsilon_r = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{1-r}\left\{\frac{1}{1-t}\ln\frac{2-t}{t^t}+1\right\}dt.$$

В роботі Е. Л. Штарка [10] був знайдений повний асимптотичний розклад для верхньої межі відхилення функції з класу H^1 від інтегралів Пуассона виду

$$\mathcal{E}(H^1; A(r))_C \cong \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-r)^k \ln\frac{1}{1-r}+\right.$$

$$\left.+\gamma_k(1-r)^k\right\}, r\to 1-,$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+\ln 2-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{2^{-i}}{i}\right).$$

В.А.Баскаков [1] записав аналогічний асимптотичний розклад, але за степенями $\frac{1}{\delta}$ $\left(\delta=-\frac{1}{\ln r}\right)$ при $\delta\to\infty$:

$$\mathcal{E}(H^1; A(\delta))_C = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}\ln\delta+$$

$$+\frac{1}{\delta}\left[\frac{2\ln\pi}{\pi}+\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^2}dt\right]+$$

$$+\frac{2}{\pi\delta}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_\pi}{t^{2(k+1)}}dt-\frac{1}{2k\pi^{2k}}\right]\frac{1}{\delta^{2k}}.$$

Апроксимативні властивості інтегралів Пуассона на інших фунціональних класах вивчались у роботах [11–12].

Що ж стосується питання апроксимативних властивостей бігармонічних інтегралів Пуассона, то тут потрібно відмітити, що С. Канієв [3] знайшов асимптотичну рівність при $r\to 1-$

$$\mathcal{E}(H^1; B(r))_C = \frac{2}{\pi}(1-r)+\frac{\varepsilon_r}{\pi},$$

$$\varepsilon_r = o(1-r).$$

Пізніше, P. Pych [13] уточнила результат С.Канієва, знайшовши більш точний порядок залишкового члена:

$$\mathcal{E}(H^1; B(r))_C = \frac{2}{\pi}(1-r)+$$

$$+O\left((1-r)^2\ln\frac{1}{1-r}\right), r\to 1- .$$

Л.П.Фалалеев [14] знайшов повний асимптотичний розклад при $r\to 1-$:

$$\mathcal{E}(H^1; B(r))_C = \frac{2}{\pi}\left\{(1-r)+(1-r^2)\ln\frac{1}{1-r}+\right.$$

$$+\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)(1-r)^2+$$

$$\left.+\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{k}(1-r)^k\ln\frac{1}{1-r}+\nu_k(1-r)^k\right)\right\}.$$

де

$$\nu_k = \frac{1}{k}\left(\ln 2+\frac{1}{k}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i2^i}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-2}}-\frac{1}{(k-1)2^{k-1}}\right).$$

Зазначимо також, що апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на різних функціональних класах вивчались у роботах [15–20].

Головною метою даної роботи є знаходження повного асимптотичного розкладу для величини (10) при $r\to 1-$, які дозволять виписувати константи Колмогорова-Нікольського довільного порядку малості.

Теорема. *При $r\to 1-$ має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathcal{E}(H_1^1; P_{s,q}(r))_1 = \frac{2s}{\pi}(1-r)^q\left(\ln\frac{1}{4}+\right.$$

$$+(1+\ln 2)(1-r)+(1-r)\ln\frac{1}{1-r}+$$

$$\left.+\ln(1-r)^2-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-r)^k}{k(k-1)2^{k-1}}\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-r)^k\ln\frac{1}{1-r}+\gamma_k(1-r)^k\right\}, \tag{11}$$

де $\gamma_k=\frac{1}{k}\left(\ln 2+\frac{1}{k}-\sum\limits_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right), k=1,2,...$

Доведення. Для доведення теореми покажемо, що матиме місце рівність

$$\mathcal{E}\left(H_1^1; P_{s,q}(r)\right)_1 = \mathcal{E}\left(H^1; P_{s,q}(r)\right)_C. \tag{12}$$

Оскільки $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K(r,t)dt=1$, то

$$P_{s,q}(r,f,x)-f(x)=$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(t+x)-f(x))\, K(r,t)dt. \qquad (13)$$

Звідси, в силу того, що $f \in H^1$, а $K(r,t)>0, t\in[-\pi,\pi]$, отримуємо

$$\mathcal{E}\left(H^1; P_{s,q}(r)\right)_C \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|\, K(r,t)dt. \qquad (14)$$

З іншого боку, функція f_1^*, яка є 2π-періодичним продовженням функції $f_1(t)=|t|, t\in[-\pi,\pi)$, належить до множини H^1 і

$$\mathcal{E}\left(H^1; P_{s,q}(r)\right)_C \ge \|P_{s,q}(r,f_1^*,\cdot)-f_1^*(\cdot)\|_C \ge$$

$$\ge |P_{s,q}(r,f_1^*,0)-f_1^*(0)| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|\, K(r,t)dt. \qquad (15)$$

Об'єднуючи (14) і (15), маємо

$$\mathcal{E}\left(H^1; P_{s,q}(r)\right)_C = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|\, K(r,t)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} tK(r,t)dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} t\Big(\frac{1}{2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(1+sk(1+r)(1-r)^q)r^k\cos kt\Big)dt.$$

Оскільки функції

$$(1+sk(1+r)(1-r)^q)r^k\cos kt$$

непереререрві при $t\in[0,\pi]$, $0\le r<1$, $k=1,2,\ldots$, та ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+sk(1+r)(1-r)^q)r^k\cos kt$$

є рівномірно збіжний, то його можна почленно інтегрувати, тому

$$\mathcal{E}\left(H^1; P_{s,q}(r)\right)_C =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} tdt + \sum_{k=1}^{\infty}(1+sk(1+r)(1-r)^q)r^k\times$$

$$\times \int\limits_{0}^{\pi} t\cos ktdt\Big) = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\pi^2}{8}-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+s(2k+1)(1+r)(1-r)^q)r^{2k+1}}{(2k+1)^2}\Big) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-(1+s(2k+1)(1+r)(1-r)^q)r^{2k+1}}{(2k+1)^2}. \qquad (16)$$

Отже, зрозуміло, що для встановлення співвідношення (12) достатньо показати, що $\mathcal{E}\left(H_1^1; P_{s,q}(r)\right)_1$ співпадає з правою частиною (16).

Оскільки функція $(f(x+t)-f(x))K(r,t)$ вимірна на множині $[-\pi;\pi]\times[-\pi;\pi]$ та

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-\pi}^{\pi} |(f(x+t)-f(x))\, K(r,t)|\, dt < +\infty,$$

то використовуючи наслідок до теореми Фубіні (див., наприклад, [21, с. 331]) після підстановки правої частини рівності (13) в (10), а також, враховуючи, що для $f\in H_1^1$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|dx \le |t|,$$

при $0\le r<1,\ -\pi\le x<\pi$, отримаємо

$$\mathcal{E}\left(H_1^1; P_{s,q}(r)\right)_1 \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} tK(r,t)dt =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-(1+s(2k+1)(1+r)(1-r)^q)r^{2k+1}}{(2k+1)^2}. \qquad (17)$$

З іншого боку, згідно леми з роботи [22, с. 63],

$$\mathcal{E}\left(H_1^1; P_{s,q}(r)\right)_1 \ge$$

$$\ge \sup_{f\in T^1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-P_{s,q}(r,f,x)|\, dx \ge$$

$$\ge \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-(1+s(2k+1)(1+r)(1-r)^q)r^{2k+1}}{(2k+1)^2}, \qquad (18)$$

де T^n — клас усіх тригонометричних поліномів g, для яких має місце співвідношення $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|g^{(n)}(x)\right| dx \le 1$.

Із нерівностей (17) та (18) отримуємо

$$\mathcal{E}\left(H_1^1; P_{s,q}(r)\right)_1 =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-(1+s(2k+1)(1+r)(1-r)^q)r^{2k+1}}{(2k+1)^2}. \tag{19}$$

Із (16) та (16) слідує справедливість рівності (12).

Враховуючи далі теорему з роботи [5], рівність (12), а також той факт, що клас квазігладких функцій H^2 співпадає з класом H^1, отримаємо розклад (11). Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Baskakov, V. A.* (1975). Some properties of operators of Abel-Poisson type: Mathematical Notes, 17(2), 101-107. DOI: 10.1007/BF01161864

2. *Zhyhallo, K.M., Kharkevych, Yu.I.* (2009). Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals: Ukr. Math. J., 61(1), 86-98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y

3. *Каниев, С.* (1963). Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений: Доклады АН СССР, 153(5), 995-998.

4. *Kharkevych, Yu.I., Kal'chuk, I.V.* (2007). Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals: Ukr. Math. J., 59(8), 1224-1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4

5. *Kharkevych, Yu.I.* (2017). On Approximation of the Quasi-Smooth Functions by Their Poisson Type Integrals: Journal of Automation and Information Sciences, 49(10), 74-81. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80

6. *Степанец, А. И.* (2002). Методы теории приближения. Ч. I. Киев: Ин-т математики НАН Украины.

7. *Жигалло, К. М., Харкевич, Ю. І.* (2002). Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона: Укр. мат. журн., 54(1), 43-52.

8. *Натансон, И.П.* (1950). О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона: Докл. АН СССР, 72(1), 11-14.

9. *Тиман, А.Ф.* (1950). Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона: Докл. АН СССР, 74(1), 17-20.

10. *Stark, E.L.* (1973). The complete asymptotic expansion for the measure of approximation of Abel-Poisson's singular integral for $Lip1$: Mathematical Notes, 13(1), 14-18. DOI: 10.1007/BF01093622

11. *Жигалло, К. М., Харкевич, Ю. І.* (2009). Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля-Пуассона: Укр. мат. журн, 61(1), 73-82.

12. *Zhyhallo, T.V., Kharkevych, Yu.I.* (2005). Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators: Ukr. Math. J., 51(8), 1297-1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z

13. *Pych, P.* (1968). On biharmonic function in unit disc: Ann. pol. math., 20(3), 203-213.

14. *Фалалеев, Л.П.* (1976). Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip_1 1$ от одного сингулярного интеграла. Теоремы вложения и их приложения: Материалы всесоюз. симп., Алма-Ата: Наука, 163-167.

15. *Zhyhallo, K.M., Kharkevych, Yu.I.* (2000). On the approximation of function of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals: Ukr. Math. J., 52(7), 1113-1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550

16. *Kharkevych, Yu.I., Zhyhallo, T.V.* (2008). Approximation of function from class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric: Ukr. Math. J., 60(5), 769-798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9

17. *Харкевич, Ю.І., Кальчук, І.В.* (2007). Асимптотика величин наближення в середньому класів диференційовних функцій за допомогою бігармонійних інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій: Укр. мат. журн., 59(8), 1105-1115.

18. *Жигалло, К.М., Харкевич, Ю.І.* (2009). Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонічними інтегралами Пуассона: Укр. мат. журн., 61(3), 333-345.

19. *Жигалло, К.М., Харкевич, Ю.І.* (2011). Наближення функцій із класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ бігармонічними інтегралами Пуассона: Укр. мат. журн., 63(7), 939-959.

20. *Kal'chuk, I.V., Kharkevych, Yu.I.* (2017). Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^r_\beta H^\alpha$: Ukr. Math. J., 68(11), 1727-1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9

21. *Натансон, І.П.* (1950). Основи теорії функцій дійсної змінної. Київ: "Радянська школа".

22. *Pych, P.* (1967). Approximation of functions in L- and C-metrics: Ann. Soc. Math. Pol., 1(11), 61-76.