УДК 517.929.8

©2018 р. О.Д. Кичмаренко

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

УСЕРЕДНЕННЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З МАКСИМУМОМ

Розглядається система дискретних рівнянь, яка містить максимум стану на інтервалі передісторії. Для такої системи обґрунтовано застосування методу усереднення у випадку неперіодичної та періодичної правої частини. Доведено близкість розв'язків заданої та відповідної усередненої систем.

Ключові слова: дискретна система, різницеве рівняння, запізнення, максимум, метод усереднення.

The discrete system that described as difference equations with maximum is considered in our paper. The application of the averaging method in the case of nonperiodic and periodic righthand side is justified for such system. The proximity of solutions of the original system and the corresponding averaged system is proved.

Keywords: discrete system, difference equation, delay, maximum, averaging method.

1. Вступ

Стан будь-якої системи визначається сукупністю станів всіх її підсистем. Такі підсистеми поділяються на два типи: із скінченним числом станів і нескінченним. Підсистеми першого типу називають дискретними, а другого – неперервними. Далеко не кожний динамічний процес може бути представлений у вигляді неперервної системи. Наприклад, все, що ми знаємо в даний час про нервову систему тварин і людини, вказує на те, що вирішальну роль в її роботі відіграє взаємодія підсистем (нейронів) з дискретними станами. Для опису таких процесів використовуються системи різницевих рівнянь. Дискретні системи з'являються також, наприклад, при моделюванні процесів, які вимірюються через певні проміжки часу, або в яких присутній вплив імпульсного характеру.

В той же час поточний стан досліджуваної системи може залежати від стану в попередні проміжки часу, тобто, мати характер запізнення. Існує особливий тип систем із запізненням, в якому еволюційні рівняння мають залежність від максимуму досліджуваної функції на деякому попередньому проміжку часу, що вносить нові специфічні властивості системи. Наприклад, в теорії автоматичного керування різними технічними системами, часто виникає закон регулювання, який ґрунтується на максимумі значень деякого параметра в інтервалі передісторії. Тому дослідження дискретних систем з максимумом є актуальним.

Застосування асимптотичних методів, зокрема методу усереднення, для дослідження складних систем з малим параметром широко розповсюджене, протягом багатьох років здійснювалася розробка методу усереднення для систем різномінтної природи. Зокрема, обгрунтування методу усереднення для систем різницевих рівнянь було здійснене в роботах [1] і [2] за умови неперервності функцій, що знаходяться в правій частині рівнянь. Загальна схема усереднення систем дискретних рівнянь стандартного виду та задач керування такими системами приведена в работі [3]. Застосування методу усереднення до дискретних систем із запізненням та до відповідних задач керування представлене в роботі [4]. Застосування методу усереднення для неперервних систем з максимумом представлене в [5].

Дана стаття присвячена обгрунтуванню методу усереднення для дискретних систем із максимумом у випадку періодичної та неперіодичної правої частини.

Робота організована наступним чином: у другій секції ми даємо постановки задач, які розглядаються, необхідні означення та формулювання теорем, у третій секції наведено доведення теорем.

2. Постановки задач та основні результати

2.1. Усередненя неперіодичних дискретних систем з максимумом

Розглянемо дискретну систему з максимумом та з малим параметром:

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot f\left(i, x_i, \max_{s \in J_i^h} x_s\right), \quad x_j = \psi(j),\ j \in J_0^h = \{-h, -h+1, ..., 0\}, \tag{1}$$

де $x_i \in D \subset R^n$ – поточний стан системи, D – область у просторі R^n, індекс i визначає поточний момент дискретного часу, причому $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $J_i^h = \{i-h, i-h+1, ..., i\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$, $L = const$, $E(a)$ – ціла частина числа a, $f\left(i, x_i, \max_{s \in J_i^h} x_s\right) : I \times D \times D \to R^n$ – задана n-вимірна функція, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, h – задане ціле число, яке визначає величину інтервалу передісторії, причому $0 \le h < N$, $\psi(j) : J_0^h \to R^n$ – задана n-вимірна функція.

Означення. Розв'язком системи дискретних рівняннь (1) будемо назвати $\{x_i, i \in I\}$ – множину значеннь $x_i \in D$, які отримані за рекурентною формулою (1) у кожній точці дискретного часу $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$.

Враховуючи, що максимум $\max\limits_{s \in J_i^h} x_s$ визначений для довільного $i \in I$ та цілого $0 \le h < N$, розв'язок $\{x_i, i \in I\}$ системи дискретних рівняннь (1) існує, якщо задана функція $f\left(i, x_i, \max_{s \in J_i^h} x_s\right)$ визначена для всіх $x_i \in D$, $i \in I$ та цілого $0 \le h < N$.

Нехай в системі (1) існує середнє функції $f(i, w^1, w^2)$, тобто

$$f_0\left(w^1, w^2\right) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \cdot \sum_{j=q}^{q+p-1} f\left(j, w^1, w^2\right) \tag{2}$$

рівномірно відносно цілого $q \ge 0$ і $w^1, w^2 \in D$.

Системі (1) поставимо у відповідність наступну усереднену систему:

$$y_{i+1} = y_i + \varepsilon \cdot f_0\left(y_i, \max_{s \in J_i^h} y_s\right), \quad y_j = \psi(j),\ j \in J_0^h = \{-h, -h+1, ..., 0\}. \tag{3}$$

Дослідимо питання близкості розв'язку $\{x_i, i \in I\}$ системи (1) та розв'язку $\{y_i, i \in I\}$ системи (3) на скінченному асимптотично великому проміжку дискретного часу $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$.

Теорема 1. Нехай в $Q = \{i \in I; x_i \in D\}$ виконані наступні умови:

1) функція $f(i, w^1, w^2)$ рівномірно обмежена сталою M та задовільнює умову Ліпшиця по w^1, w^2 зі сталою λ;
2) $\psi(j)$ приймає скінченні значення на множині $\{j \in J_0^h\}$;
3) ріномірно відносно цілого $q \ge 0$ та w^1, $w^2 \in D$ існує ліміт (2);
4) розв'язок $\{y_i, i \in I\}$ усередненої системи (3) при $y_j = \psi(j) \in D' \subset D, j \in J_0^h$ разом зі своїм ρ-околом належить області D.

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ та $L > 0$ існує $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та будь-якого $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$ виконується нерівність

$$\|x_i - y_i\| \le \eta, \tag{4}$$

де $\{x_i, i \in I\}$ і $\{y_i, i \in I\}$ – розв'язки систем рівняннь (1) і (3) відповідно.

2.2. Усереднення періодичних дискретних систем з максимумом

Розглянемо систему

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot f\left(i, x_i, \max_{s \in J_i^h} x_s\right), \quad x_j = \psi(j),\ j \in J_0^h = \{-h, -h+1, ..., 0\}, \tag{5}$$

де функція $f\left(i, x_i, \max_{s \in J_i^h} x_s\right)$ є періодичною, тобто для будь-якого $i \in I$ виконується рівність

$$f\left(i+T, x_i, \max_{s \in J_i^h} x_s\right) = f\left(i, x_i, \max_{s \in J_i^h} x_s\right). \tag{6}$$

Тоді можемо побудувати середнє за періодом:

$$f_0\left(w^1,w^2\right)=\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}f\left(j,w^1,w^2\right). \qquad (7)$$

Системі (5) поставимо у відповідність наступну усереднену систему:

$$y_{i+1}=y_i+\varepsilon\cdot f_0\left(y_i,\max_{s\in J_i^h}y_s\right), \qquad (8)$$
$$y_j=\psi(j),\ j\in J_0^h=\{-h,-h+1,...,0\}.$$

Наступна теорема встановлює умови близькості розв'язку $\{x_i,i\in I\}$ системи (5) та розв'язку $\{y_i,i\in I\}$ системи (8) на скінченному асимптотично великому проміжку дискретного часу $i\in I=\{0,1,2,...,N\}$, $N=E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$.

Теорема 2. Нехай в $Q=\{i\in I;x_i\in D\}$ виконані умови 1), 2) та 4) теореми 1 та, окрім того, функція $f\left(i+T,x_i,\max_{s\in J_i^h}x_s\right)$ є періодичною по i, тобто задовольняє рівність (6).

Тоді для будь-якого $L>0$ існують такі $\varepsilon_0>0$ та $C>0$, що для будь-якого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ та будь-якого $i\in I=\{0,1,2,...,N\}$, $N=E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ виконується нерівність

$$\|x_i-y_i\|\le C\varepsilon, \qquad (9)$$

де $\{x_i,i\in I\}$ и $\{y_i,i\in I\}$ – розв'язок систем рівняннь (5) і (8) відповідно.

Запропоновані схеми усереднення можуть бути використані при дослідженні керованих дискретних систем з максимумом, зокрема при обгрунтуванні чисельно-асимптотичного методу розв'язання задачі оптимального керування дискретною системою з максимумом.

3. Доведення теорем

3.1. Доведення теореми 1

Доведення. Нехай $\{x_i,i\in I\}$ – розв'язок вихідної системи (1), а $\{y_i,i\in I\}$ – розв'язок усередненої системи (3) при $x_j=y_j=\psi(j)\in D'\subset D, j\in J_0^h=\{-h,-h+1,...,0\}$. Із умови 4) теореми маємо, що розв'язок усередненої системи разом з ρ-околом належить області D.

Виберемо довільне $\eta>0$, $\eta\le\rho$ та зафіксуємо його.

Систему (1) та усереднену систему (3) подамо у вигляді

$$x_{i+1}=\psi(0)+\varepsilon\sum_{j=0}^{i}f\left(j,x_j,\max_{s\in J_j^h}x_s\right), \qquad (10)$$

$$y_{i+1}=\psi(0)+\varepsilon\sum_{j=0}^{i}f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right) \qquad (11)$$

та оцінимо різницю між відповідними значеннями до моменту виходу x_i з області D:

$$\|x_{i+1}-y_{i+1}\|=$$
$$=\left\|\varepsilon\sum_{j=0}^{i}f\left(j,x_j,\max_{s\in J_j^h}x_s\right)-\right.$$
$$\left.-\varepsilon\sum_{j=0}^{i}f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right\|\le$$
$$\le\varepsilon\sum_{j=0}^{i}\left\|f\left(j,x_j,\max_{s\in J_j^h}x_s\right)-f\left(j,y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right\|+$$
$$+\varepsilon\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f\left(j,y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)-f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right]\right\| \qquad (12)$$

Враховуєчи умову 1) теореми нерівність (12) приймає вигляд:

$$\|x_{i+1}-y_{i+1}\|\le$$
$$\le\varepsilon\lambda\cdot\sum_{j=0}^{i}\left(\|x_j-y_j\|+\left\|\max_{s\in J_j^h}x_s-\max_{s\in J_j^h}y_s\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon\cdot\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f\left(j,y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right]\right\|\le2\varepsilon\lambda\cdot\sum_{j=0}^{i}\delta_j+$$
$$+\varepsilon\cdot\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f\left(j,y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right]\right\|, \qquad (13)$$

де

$$\delta_j = \max_{l \in J_j^h} \|x_l - y_l\|. \tag{14}$$

Нерівність (13) виконується для будь-якого $i \in \{0, 1, 2, ..., N-1\}$, тоді

$$\delta_N \leq 2\varepsilon\lambda \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \delta_j +$$

$$+\varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=0}^{i} \left[f\left(j, y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -f_0\left(y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right)\right]\right\|. \tag{15}$$

Для оцінки другого доданку у нерівності (15) виберемо позитивне ціле значення $p(\varepsilon)$, яке має наступні властивості:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p(\varepsilon) = +\infty, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot p(\varepsilon) = 0. \tag{16}$$

На множині $I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ зафіксуємо точки kp, які віддалені одна від одної на відстань $p = p(\varepsilon)$, при цьому отримаємо повільно мінливий час. Вибір значеннь k визначимо із умови

$$kp \leq \frac{L}{\varepsilon}, \tag{17}$$

тому

$$N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon p}\right), \tag{18}$$

$$k \in I_k = \{0, 1, 2, ..., N_k\}.$$

Виберемо довільний момент часу $i \in I$ та визначимо відповідне значення повільного часу $k \in I_k$ таке, що $i \in [kp, (k+1) \cdot p)$. Щоб оцінити другий доданок у (15), виділимо окремо суму на k-ому проміжку:

$$\left\| \sum_{j=0}^{i} \left[f\left(j, y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -f_0\left(y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{j=0}^{kp-1} \left[f\left(j, y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -f_0\left(y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| +$$

$$+\left\| \sum_{j=kp}^{i} \left[f\left(j, y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -f_0\left(y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right)\right]\right\|. \tag{19}$$

В нерівності (19) оцінимо спочатку другий доданок. Так як за умови 1) теореми функція $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ рівномірно обмежена, то обмеженим є її середє, яке отримане за формулою (2). Отже, при $i \in [kp, (k+1) \cdot p)$ маємо

$$\left\| \sum_{j=kp}^{i} \left[f\left(j, y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -f_0\left(y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=kp}^{i} \left\| f\left(j, y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right)\right\| +$$

$$+\sum_{j=kp}^{i} \left\| f_0\left(y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right)\right\| \leq 2pM. \tag{20}$$

Тепер перетворимо перший доданок у (19) наступним чином:

$$\left\| \sum_{j=0}^{kp-1} \left[f\left(j, y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -f_0\left(y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k-1} \left\| \sum_{j=lp}^{(l+1)p-1} \left[f\left(j, y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -f_0\left(y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k-1} \left\| \sum_{j=lp}^{(l+1)p-1} \left[f\left(j, y_j, \max_{s \in J_j^h} y_s\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -f\left(j, y_{lp}, \max_{s \in J_{lp}^h} y_s\right)\right]\right\| +$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left[f\left(j,y_{lp},\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_0\left(y_{lp},\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)\right]\right\|+$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left[f_0\left(y_{lp},\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right]\right\|\le$$

$$\le\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left\|f\left(j,y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(j,y_{lp},\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)\right\|+$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left[f\left(j,y_{lp},\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_0\left(y_{lp},\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)\right]\right\|+$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left\|f_0\left(y_{lp},\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)-\right.$$

$$\left.-f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right\|\le$$

$$\le 2\lambda\cdot\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left(\|y_j-y_{lp}\|+\right.$$

$$\left.+\left\|\max_{s\in J_j^h}y_s-\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right\|\right)+$$

$$+p\cdot\sum_{l=0}^{k-1}\left\|\frac{1}{p}\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left[f\left(j,y_{lp},\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_0\left(y_{lp},\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)\right]\right\|. \qquad (21)$$

Використовуючи умову 1) теореми та враховуючи, що $j\in(lp,(l+1)\cdot p]$, оцінимо складові першого доданку в (21).

$$\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left(\|y_j-y_{lp}\|+\left\|\max_{s\in J_j^h}y_s-\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right\|\right)\le$$

$$\le\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left(\varepsilon\sum_{r=lp}^{j-1}\left\|f_0(y_r,\max_{r\in J_r^h}y_s)\right\|+\varepsilon Mp\right)\le$$

$$\le\varepsilon M\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}(j-lp+p)=$$

$$=\varepsilon M\left(\frac{3}{2}p^2-\frac{1}{2}p\right)\le 2\varepsilon Mp^2. \qquad (22)$$

Оцінимо другий доданок у (21). Зважаючи на умову 3) теореми, існує спадаюча функція $\theta(p)$, яка задовольняє умову

$$\lim_{p\to\infty}\theta(p)=0$$

і така, що

$$\left\|\frac{1}{p}\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left[f\left(j,y_j,\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_0\left(y_j,\max_{s\in J_{lp}^h}y_s\right)\right]\right\|\le\theta(p). \qquad (23)$$

З нерівності (21), враховуючи отримані оцінки (22), (23), випливає оцінка першого доданку в (19):

$$\left\|\sum_{j=0}^{kp-1}\left[f\left(j,y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right]\right\|\le 4\lambda k\cdot\varepsilon Mp^2+pk\cdot\theta(p)\le$$

$$\le 4p\lambda LM+pk\cdot\theta(p) \qquad (24)$$

При цьому з нерівності (19), враховуючи (20), (24), отримаємо оцінку

$$\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f\left(j,y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)-\right.\right.$$

$$-f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\Bigg]\Bigg\| \le$$

$$4p\lambda LM + pk\cdot\theta(p) + 2pM. \qquad (25)$$

Тоді нерівність (15) має вигляд

$$\delta_N \le 2\varepsilon\lambda \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \delta_j + 4\varepsilon p\lambda LM + L\theta\,(p) + 2\varepsilon pM. \qquad (26)$$

Застосовуючи дискретний аналог леми Гронуола-Беллмана [6] до нерівності (26), отримаємо

$$\delta_N \le (4\varepsilon p\lambda LM + L\theta\,(p) + 2\varepsilon pM)\cdot e^{2\lambda L}. \qquad (27)$$

Із означення функції $\theta\,(p)$ та співвідношення (16) випливає, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(4\varepsilon p\lambda LM + L\theta\,(p) + 2\varepsilon pM) = 0. \qquad (28)$$

Це означає, що для довільно обраних $\eta > 0$ и $L > 0$ знайдеться таке $\varepsilon_0\,(\eta, L) > 0$, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ з нерівнсоті (27) випливає оцінка (4). Враховуючи спосіб вибору $\eta > 0 (\eta \le \rho)$ та умову 4) теореми, маємо, що до моменту $t = L\varepsilon^{-1}$ всі x_i будуть залишатися в області D. Теорема доведена.

3.2. Доведення теореми 2

Доведення. Нехай $\{x_i, i \in I\}$ – розв'язок початкової системи (5), а $\{y_i, i \in I\}$ – розв'язок усередненої системи (8) при $x_j = y_j = \psi(j) \in D' \subset D, j \in J_0^h = \{-h, -h+1, ..., 0\}$. Із умови 4) теореми маємо, що розв'язок усередненої системи разом з ρ-околом належить області D.

Виберемо довільне $\eta > 0$, $\eta \le \rho$ та зафіксиємо його. Систему (5) та усереднену систему (8) подамо у вигляді

$$x_{i+1} = \psi(0) + \varepsilon \sum_{j=0}^{i} f\left(j, x_j, \max_{s\in J_j^h} x_s\right), \qquad (29)$$

$$y_{i+1} = \psi(0) + \varepsilon \sum_{j=0}^{i} f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) \qquad (30)$$

та оцінимо різницю між відповідними значеннями:

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| = \Bigg\|\varepsilon\cdot\sum_{j=0}^{i} f\left(j, x_j, \max_{s\in J_j^h} x_s\right) -$$

$$-\varepsilon\cdot\sum_{j=0}^{i} f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\Bigg\| \le$$

$$\le \varepsilon\cdot\sum_{j=0}^{i}\Bigg\| f\left(j, x_j, \max_{s\in J_j^h} x_s\right) -$$

$$-f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\Bigg\| +$$

$$+\varepsilon\cdot\Bigg\|\sum_{j=0}^{i}\Bigg[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) -$$

$$-f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\Bigg]\Bigg\|. \qquad (31)$$

Враховуючи умову 1) теореми нерівність (31) приймає вигляд:

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \le \varepsilon\lambda\cdot\sum_{j=0}^{i}(\|x_j - y_j\| +$$

$$+\left\|\max_{s\in J_j^h} x_s - \max_{s\in J_j^h} y_s\right\|\Bigg) +$$

$$+\varepsilon\cdot\Bigg\|\sum_{j=0}^{i}\Bigg[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) -$$

$$-f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\Bigg]\Bigg\| \le$$

$$\le 2\varepsilon\lambda\cdot\sum_{j=0}^{i}\delta_j + \varepsilon\cdot\Bigg\|\sum_{j=0}^{i}\Bigg[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) -$$

$$-f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\Bigg]\Bigg\|, \qquad (32)$$

де

$$\delta_j = \max_{l\in J_j^h}\|x_l - y_l\|. \qquad (33)$$

Нерівність (32) виконується для будь-якого $i \in \{0, 1, 2, ..., N-1\}$, тоді

$$\delta_N \le 2\varepsilon\lambda\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\delta_j + \varepsilon\cdot\Bigg\|\sum_{j=0}^{i}\Bigg[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) -$$

$$-f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\Bigg]\Bigg\|. \qquad (34)$$

Оцінимо другий доданок у нерівності (34). Для цього множину $I = \{0,1,2,...,N\}$ пройдему з кроком T та зафіксуємо точки $kT, k \in I_k = \{0,1,2,...,n_k\}$, при цьому отримаємо повільно мінливий час. Вибір значеннь k визначимо із умови

$$kT \le \frac{L}{\varepsilon}, \tag{35}$$

тому

$$N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon T}\right), k \in I_k = \{0,1,2,...,N_k\}. \tag{36}$$

Виберемо довільний момент часу $i \in I$ та визначимо відповідне значення повільного часу $k \in I_k$ таке, що $i \in [kT, (k+1)\cdot T)$. Щоб оцінити другий доданок у (34), виділимо окремо суму на k-ом проміжку:

$$\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) - f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| \le \left\|\sum_{j=0}^{kT-1}\left[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) - f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| + \left\|\sum_{j=kT}^{i}\left[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) - f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\right]\right\|. \tag{37}$$

В нерівності (37) оцінимо спочатку другий доданок. Так як за умовою 1) теореми функція $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ рівномірно обмежена, то обмеженим є її середє, яке отримане за формулою (7). Отже, при $i \in [kT, (k+1)\cdot T)$ отримаємо

$$\left\|\sum_{j=kT}^{i}\left[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) - f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| \le \sum_{j=kT}^{i}\left\|f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\right\| + \sum_{j=kT}^{i}\left\|f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\right\| \le 2TM. \tag{38}$$

Тепер перетворимо перший доданок у (37) наступним чином:

$$\left\|\sum_{j=0}^{kT-1}\left[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) - f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| \le \sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}\left[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) - f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}\left[f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) - f\left(j, y_{lT}, \max_{s\in J_{lT}^h} y_s\right)\right]\right\| + \sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}\left[f\left(j, y_{lT}, \max_{s\in J_{lT}^h} y_s\right) - f_0\left(y_{lT}, \max_{s\in J_{lT}^h} y_s\right)\right]\right\| + \sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}\left[f_0\left(y_{lT}, \max_{s\in J_{lT}^h} y_s\right) - f_0\left(y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right)\right]\right\| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}\left\|f\left(j, y_j, \max_{s\in J_j^h} y_s\right) - f\left(j, y_{lT}, \max_{s\in J_{lT}^h} y_s\right)\right\| +$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}\left[f\left(j,y_{lT},\max_{s\in J_{lT}^h}y_s\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_0\left(y_{lT},\max_{s\in J_{lT}^h}y_s\right)\right]\right\|+$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}\left\|f_0\left(y_{lT},\max_{s\in J_{lT}^h}y_s\right)-\right.$$

$$\left.-f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right\|\leq$$

$$\leq 2\lambda\cdot\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}\left(\|y_j-y_{lT}\|+\right.$$

$$\left.+\left\|\max_{s\in J_j^h}y_s-\max_{s\in J_{lT}^h}y_s\right\|\right). \qquad (39)$$

Використовуючи умову 1) теореми та враховуючи, що $j\in(lT,(l+1)\cdot T]$, оцінимо складові першого доданку в (39).

$$\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}\left(\|y_j-y_{lT}\|+\left\|\max_{s\in J_j^h}y_s-\max_{s\in J_{lT}^h}y_s\right\|\right)\leq$$

$$\leq\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}\left(\varepsilon\sum_{r=lT}^{j-1}\left\|f_0(y_r,\max_{r\in J_r^h}y_s)\right\|+\varepsilon MT\right)\leq$$

$$\leq\varepsilon M\sum_{j=lT}^{(l+1)T-1}(j-lT+T)=$$

$$=\varepsilon M\left(\frac{3}{2}T^2-\frac{1}{2}T\right)\leq 2\varepsilon MT^2. \qquad (40)$$

З нерівності (39), враховуючи отриману оцінку (40), випливає оцінка першого доданку в (37):

$$\left\|\sum_{j=0}^{kT-1}\left[f\left(j,y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right]\right\|\leq$$

$$\leq 4\lambda k\cdot\varepsilon MT^2\leq 4T\lambda LM. \qquad (41)$$

При цьому з нерівності (37) враховуючи (38), (23) отримаємо оцінку

$$\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f\left(j,y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_0\left(y_j,\max_{s\in J_j^h}y_s\right)\right]\right\|\leq 4T\lambda LM+2TM. \quad (42)$$

Тоді нерівність (34) має вигляд

$$\delta_N\leq 2\varepsilon\lambda\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\delta_j+4\varepsilon T\lambda LM+2\varepsilon TM. \quad (43)$$

Застосовуючи дискретний аналог леми Гронуола-Беллмана [6] до нерівності (43), отримаємо

$$\delta_N\leq(4\varepsilon T\lambda LM+2\varepsilon TM)\cdot e^{2\lambda L}. \qquad (44)$$

Таким чином випливає, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(4\varepsilon T\lambda LM+2\varepsilon TM)=0. \qquad (45)$$

Це означає, що для довільно обраних $\eta>0$ и $L>0$ знайдеться таке $\varepsilon_0(\eta,L)>0$, що для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ и $i\in I=\{0,1,2,...,N\}$ з нерівнсоті (45) випливає оцінка (9). Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Белан Е.Л.* (1967). О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений. Украинский математический журнал, 19(3), 85–90.
2. *Мартынюк Д.И., Данилов В.И., Паньков В.Г.* (1996). Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем разностных уравнений. Украинский математический журнал, 48(4), 464 – 475.
3. *Плотников В.А., Плотникова Л.И., Яровой А.Т.* (2004). Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления. Нелинейные колебания, 7(2), 241 – 254.
4. *Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л.* (2016). Общая схема усреднения систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием. Нелинейные колебания, 19(3), 376 – 389.
5. *Плотніков В.О., Кічмаренко О. Д.* (2002). Усереднення диференціальних рівнянь з максимумом. Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. вип. 150. Математика, 78–82.
6. *Апарцин А.С.* (1999). Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние.