УДК 517.51

©2018 **В.К.Маслюченко, О.І. Філіпчук**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО РОЗРИВИ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА КРИВИХ У ПЛОЩИНІ ЗОРҐЕНФРЕЯ

Доведено, що для кожної неперервної функції $g : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, де $\mathbb{L}$ – пряма Зорґенфрея, існує таке нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$ зі значеннями в площині Бінґа, у якого множина $D(f)$ точок розриву збігається з графіком $\mathrm{Gr}g$.

Ключові слова: нарізно неперервні функції; множина точок розриву; площина Бінґа; площина Зорґенфрея.

It is proved that for each continuous function $g : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, where $\mathbb{L}$ is the Sorgenfrey line, there exists the separately continuous mapping $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$ with values in the Bing plane, such that it's set of discontinuity points $D(f)$ coinsides with the graph $\mathrm{Gr}g$ of g.

Keywords: separately continuous functons; discontinuity points; the Bing plane; the Sorgenfrey plane.

1. Вступ. В останнє тридцятиліття ведуться активні досліження нарізно неперервних функцій та їх аналогів зі значеннями в неметризовних просторах (див. [1] і вказану там літературу). У зв'язку з вивченням нарізно неперервних відображень зі значеннями в σ-метризовних просторах виникла задача про опис множини $D(f)$ точок розриву нарізно неперервних відображень $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$ площини Зорґенфрея у площину Бінґа. Дослідженню цього питання присвячені роботи [2-5]. Зокрема, було встановлено, що множина $L_c(f)$ точок локальної сталості нарізно неперервних відображень $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$ відкрита і всюди щільна в $\mathbb{L}^2$ і разом з тим, існують нарізно неперервні відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, у яких множина $D(f)$ точок розриву збігається з довільною горизонтальною прямою $\mathbb{L} \times \{b\}$ на площині $\mathbb{L}^2$.

Розглянемо довільне відображення $g : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ і його графік

$$\Gamma_g = \mathrm{Gr}g = \{(x, g(x)) : x \in \mathbb{L}\}.$$

Виникає питання: за яких умов на функцію g існує таке нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, що $D(f) = \Gamma_g$? Тут ми встановлюємо, що коли функція $g : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ неперервна, то $D(f) = \Gamma_g$ для деякого нарізно неперервного відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$. Разом з тим, невідомо, чи існує таке відображення для скрізь розривної функції $g_0 : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, $g_0(x) = -x$.

2. Допоміжні функції на $\mathbb{L}^2$. Нагадаємо, що *пряма Зорґенфрея* $\mathbb{L}$ – це числова пряма $\mathbb{R}$ з топологічною структурою, в якій околом точки x називається така множина U, що $[x, x + \varepsilon) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}$ для деякого $\varepsilon > 0$ [6, с. 47]. Квадрат $\mathbb{L}^2$ прямої Зорґенфрея з топологією добутку називається *площиною Зорґенфрея*. Невироджені напіввідкриті прямокутники $P = [a, b) \times [c, d)$ – це відкрито-замкнені множини в площині Зорґенфрея $\mathbb{L}^2$. У цьому пункті ми введемо певні функції φ, що пов'язані з прямокутником P, які будуть основою нашої побудови.

Нехай $P = [a, b) \times [c, d)$ – невироджений прямокутник в $\mathbb{L}^2$, Z – довільний топологічний простір, $z_0 \in Z$ і $\zeta = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність точок z_n простору Z, яка збігається в Z до точки z_0. Розглянемо для кожного номера $n = 1, 2, ...$ числа $b_n = a + \frac{b-a}{n}$ і прямокутники $P_n = [b_{n+1}, b_n) \times [c, d)$. Долучимо до них ще й вироджений прямокутник $P_0 = \{a\} \times [c, d)$. Ясно, що $P_n \cap P_m = \emptyset$ при $m \neq n$ і $P = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n$. Визначимо функцію $\varphi = \varphi_{P,\zeta,z_0} : \mathbb{L}^2 \to Z$, у якої $\varphi(p) = z_n$, якщо $p \in P_n$ для деякого $n = 0, 1, ...$, і $\varphi(p) = z_0$, якщо $p \in \mathbb{L}^2 \setminus P$.

Лема 1. *Функція $\varphi = \varphi_{P,\zeta,z_0} : \mathbb{L}^2 \to Z$ неперервна.*

Доведення. Множини P, $\mathbb{L}^2 \setminus P$ і P_n при $n = 1, 2, ...,$ – це відкрито-замкнені підмножини площини Зорґенфрея $\mathbb{L}^2$ і звуження функції φ на ці множини сталі. Тому в точках з цих множин функція φ неперервна. Залишається довести неперервність φ у точках з множини P_0.

Нехай $p_0 \in P_0$ і W – довільний окіл точки z_0 у просторі Z. Оскільки $z_n \to z_0$ у просторі Z, то існує такий номер N, що $z_n \in W$, як тільки $n \geq N$. Множина $O = [a, b_N) \times [c, d)$ – це окіл точки p_0 в $\mathbb{L}^2$. Зрозуміло, що $O = (\bigsqcup\limits_{n=N}^{\infty} P_n) \bigsqcup P_0$. Нехай $p \in O$. Тоді існує такий номер n, що $n = 0$ або $n \geq N$ і $p \in P_n$. При цьому $\varphi(p) = z_n$, де $n = 0$ або $n \geq N$, отже, $\varphi(p) \in W$. Таким чином, $\varphi(O) \subseteq W$, що і дає нам неперервність φ у точці p_0. $\square$

3. Криволінійні смуги в $\mathbb{L}^2$. Розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$, $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$.

Лема 2. *Нехай $g : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – неперервна функція і $\eta > 0$. Тоді множина $G = G_{g,\eta} = \{(x, y) \in \mathbb{L}^2 : g(x) < y < g(x) + \eta\}$ відкрита в $\mathbb{L}^2$ і $\mathrm{pr}_1(G) = \mathbb{L}$.*

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in G$. Тоді $g(x_0) < y_0 < g(x_0) + \eta$. Візьмемо таке $\varepsilon > 0$, що $g(x_0) + \varepsilon < y_0$ і $y_0 + \varepsilon < g(x_0) + \eta$. Оскільки функція g неперервна в точці x_0, то існує таке $\delta > 0$, що $g(x_0) \leq g(x) < g(x_0) + \varepsilon$, як тільки $x_0 \leq x < x_0 + \delta$. В такому разі для $x \in [x_0, x_0 + \delta)$ будемо мати, що

$$g(x) < g(x_0) + \varepsilon < y_0$$

і

$$g(x) + \eta \geq g(x_0) + \eta > y_0 + \varepsilon.$$

Розглянемо окіл $O = [x_0, x_0 + \delta) \times [y_0, y_0 + \varepsilon)$ точки p_0 в $\mathbb{L}^2$. Нехай $p = (x, y) \in O$. Тоді $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ і $y_0 \leq y < y_0 + \varepsilon$, отже, $g(x) < y_0 \leq y < y_0 + \varepsilon < g(x) + \eta$, а значить, $g(x) < y < g(x) + \eta$, тобто $p \in G$. Таким чином, $O \subseteq G$, що й доводить відкритість множини G.

Далі, ясно, що для кожної точки $x \in \mathbb{L}$ точка $p = (x, g(x) + \frac{\eta}{2})$ належить до G і $\mathrm{pr}_1(p) = x$, отже, $\mathrm{pr}_1(G) = \mathbb{L}$. $\square$

4. Площина Бінґа. Нагадаємо, що *площина Бінґа*[7] – це топологічний простір $\mathbb{B}$, що складається з точок добутку $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$, де $\mathbb{Q}$ – це множина раціональних чисел, а $\mathbb{Q}^+ = \{y \in \mathbb{Q} : y \geq 0\}$, топологічна структура на якому вводиться так: околами точки $p_0 = (x_0, y_0)$ з $\mathbb{B}$ будуть такі підмножини W множини $\mathbb{B}$, які для $y_0 = 0$ містять множину $W_\varepsilon(p_0) = U_\varepsilon(x_0) \times \{0\}$, де $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}, x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$ для деякого $\varepsilon > 0$, а при $y_0 > 0$ містять множину $W_\varepsilon(p_0) = \{p_0\} \cup W_\varepsilon(p_1) \cup W_\varepsilon(p_2)$, де $p_1 = (x_1, 0)$ і $p_2 = (x_2, 0)$ – такі точки, що трикутник $p_1 p p_2$ – рівносторонній (див. [6, с. 518], [8]). Відомо, що площина Бінґа $\mathbb{B}$ – це зліченний зв'язний гаусдорфовий і не регулярний простір з першою аксіомою зліченності.

Лема 3. *Існують точка $z_0 \in \mathbb{B}$, її окіл W в $\mathbb{B}$ і спадна послідовність околів W_n точки z_0 в $\mathbb{B}$, такі, що $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ – це база околів точки z_0 в $\mathbb{B}$, і $\overline{W}_n \not\subseteq W$ для кожного n.*

Доведення. Оскільки простір $\mathbb{B}$ не регулярний, то існують точка $z_0 \in \mathbb{B}$ і її окіл W в $\mathbb{B}$, такі, що W не містить жодного замкненого околу точки z_0 в $\mathbb{B}$. З того, що $\mathbb{B}$ задовольняє першу аксіому зліченності випливає, що точка z_0 має таку базу $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, що $W_n \supseteq W_{n+1}$ для кожного n. Оскільки $\overline{W}_n$ – це замкнений окіл точки z_0 в $\mathbb{B}$, то $\overline{W}_n \not\subseteq W$ для кожного n. $\square$

5. Основний результат. Тут ми узагальнимо побудову з [4, 5], розглянувши замість горизонтальної прямої $y = b$ графік неперервної функції $y = g(x)$.

Теорема 1. *Нехай $g : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – неперервна функція і $\Gamma_g = \{(x, g(x)) : x \in \mathbb{L}\}$ – її графік. Тоді існує таке нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, що $D(f) = \Gamma_g$.*

Доведення. За лемою 3 в $\mathbb{B}$ існує точка z_0, її окіл W і спадна послідовність околів W_n, що утворюють базу околів точки z_0 в $\mathbb{B}$, такі, що $\overline{W}_n \not\subseteq W$ для кожного n. Візьмемо для кожного n точку $z_n \in \overline{W}_n \setminus W$ і послідовність $\zeta_n = (z_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ точок $z_{n,k} \in W_n$, таку, що $z_{n,k} \to z_n$ при $k \to \infty$.

Нехай $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ – довільна перенумерація множини раціональних чисел у послідовність з різних чисел. Для кожного номера n утворимо множини

$$G_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{L}^2 : g(x) + \frac{1}{n+1} < y < \right.$$
$$\left. < g(x) + \frac{1}{n}\right\} = G_{g+\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n(n+1)}}.$$

За лемою 2 – це відкриті в $\mathbb{L}^2$ множини, для яких $\mathrm{pr}_1(G_n) = \mathbb{L}$. Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує такий прямокутник $P_n = [r_n, r_n + \delta_n) \times [s_n, s_n + \varepsilon_n)$, що $P_n \subseteq G_n$. Розглянемо функції $\varphi_n = \varphi_{P_n, \zeta_n, z_0} : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, які за лемою 1 будуть неперервними. Нехай $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ і $H = \mathbb{L}^2 \setminus S$. Визначимо функцію $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, покладаючи $f(p) = \varphi_n(p)$, якщо $p \in P_n$ при $n = 1, 2, ...$, і $f(p) = z_0$, якщо $p \in H$, і доведемо, що функція f шукана.

Легко перевірити, що множини $G^+ = \{(x,y) \in \mathbb{L}^2 : y > g(x)\}$ і $G^- = \{(x,y) \in \mathbb{L}^2 : y < g(x)\}$ відкриті в $\mathbb{L}^2$. Оскільки звуження $f|_{G^-}$ стале, то функція f неперервна у всіх точках з множини G^-. Покажемо, що функція f неперервна і у всіх точках з множини G^+. Нехай $p_0 \in G^+$. Якщо $p_0 \in P_n$ для деякого n, то P_n – це окіл точки p_0 і $f(p) = \varphi_n(p)$ на P_n. Тому неперервність f у точці p_0 випливає з неперервності функції φ_n. Нехай $p_0 \in H$. З побудови ясно, що $P_n \subseteq G_n$ для кожного n. При цьому послідовність множин P_n локально скінченна у множині G^+. Справді, для довільної точки $p \in G^+$ можливі два випадки: або $p \in S$, або $p \in H^+ = G^+ \cap H$. Якщо $p \in S$, то $p \in P_n$ для деякого n, P_n – це окіл точки p і $P_n \cap P_m = \varnothing$ при $n \neq m$, адже $P_n \subseteq G_n$, $P_m \subseteq G_m$ і $G_n \cap G_m = \varnothing$ при $n \neq m$. Нехай $p \in H^+$. Розглянемо множини

$$H_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{L}^2 : g(x) + \frac{1}{n+1} < y < \right.$$
$$\left. < g(x) + \frac{1}{n-1}\right\}, \quad \text{при} \quad n = 2, 3, ...$$
$$\text{і} \quad H_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{L}^2 : y > g(x) + \frac{1}{2}\right\}.$$

Ясно, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n = G^+ \supseteq H^+$. Тому існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $p \in H_n$. При $n = 1$ множина $H_1 \setminus P_1$ буде околом точки p, що не перетинається з множинами $P_2, P_3, ...$, а при $n > 1$ множина $H_n \setminus (P_{n-1} \cup P_n)$ буде околом точки p, що не перетинається з множинами P_m при довільних m. З того, що послідовність множин P_n локально скінченна в G^+ випливає, що множина S замкнена в G^+, а тоді множина $H^+ = G^+ \setminus S$ відкрита в G^+, а значить, і в $\mathbb{L}^2$. Оскільки звуження $f|_{H^+}$ стале, то функція f неперервна в точці p і в цьому випадку.

Доведемо, що f нарізно неперервне у кожній точці $p_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma_g$. Розглянемо спочатку функцію $f_{y_0} : \mathbb{L} \to \mathbb{B}$. З неперервності функції g у точці x_0 випливає, що існує таке $\delta > 0$, що $y_0 = g(x_0) \leq g(x)$, як тільки $x_0 \leq x < x_0 + \delta$. В такому разі $f_{y_0}(x) = f(x, y_0) = z_0$ при $x_0 \leq x < x_0 + \delta$, звідки випливає, що функція $f_{y_0} : \mathbb{L} \to \mathbb{B}$ неперервна у точці x_0.

Доведемо тепер неперервність функції $f^{x_0} : \mathbb{L} \to \mathbb{B}$. Нехай $x_0 = r_{n_0}$ для деякого n_0. Тоді на проміжку $[y_0, y_0 + \frac{1}{n_0})$ функція f^{x_0} може набувати лише значень $z_{n,k}$ з $n > n_0$ або z_0, звідки легко вивести, що $f^{x_0}(y) \to f^{x_0}(y_0) = z_0$ при $y \to y_0$ в $\mathbb{L}$, адже $z_{n,k} \in W_n$ і $z_0 \in W_n$ для довільних n і k. Так само міркуємо і при $x_0 \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{Q}$.

Нарешті встановимо, що f розривне у довільній точці $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{L}$. Розглянемо базисний окіл $O = [x_0, x_0 + \delta) \times [y_0, y_0 + \delta)$ цієї точки. З неперервності g у точці x_0 випливає, що існує таке $\delta_0 \in (0, \delta)$, що

$$y_0 \leq g(x) < y_0 + \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad x \in [x_0, x_0 + \delta_0).$$

Візьмемо такий номер N, що $\frac{1}{N} < \frac{\delta}{2}$. Множина $\mathbb{Q} \setminus \{r_1, ..., r_{N-1}\}$ щільна в $\mathbb{L}$, тому існує таке $n \geq N$, що $r_n \in [x_0, x_0 + \delta_0)$. Для будь-якого $y \in [s_n, s_n + \varepsilon_n)$ будемо мати, що точка $p_n = (r_n, y)$ належить до околу O, адже для неї $x_0 \leq r_n < x_0 + \delta_0 < x_0 + \delta$ і

$$y_0 \leq g(r_n) < g(r_n) + \frac{1}{n+1} < s_n \leq y <$$
$$< s_n + \varepsilon_n < g(r_n) + \frac{1}{n} < y_0 + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{N} < y_0 + \delta.$$

Але $f(p_n) = \varphi_n(p_n) = z_n \notin W$. Отже, $f(O) \not\subseteq W$, що і дає розривність f у точці p_0. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Maslyuchenko, V.; Myronyk, O.; Filipchuk, O.*(2017) Joint continuity of separately continuous mappings with values in completely regular spaces : Tatra Mt. Math. Publ., 68, 47-58. DOI: 10.1515/tmmp-2017-0004

2. *Маслюченко, В.; Філіпчук, О.* Про розриви нарізно неперервних відображень з не більш, ніж зліченною множиною значень : Укр. мат. журн.(у друці)

3. *Маслюченко, В.; Філіпчук, О.* (2016) Розриви нарізно неперервних відображень з не більш, ніж зліченною множиною значень : Матеріали міжнародної наукової конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвяченої 80-річчю від дня народження професора М.П. Ленюка (Чернівці, 28-30 жовтня 2016 року), 168-169.

4. *Банах, Т.; Маслюченко, В.; Філіпчук, О.* (2017) Приклади нарізно неперервних відображень з суцільними розривами на горизонталях : Мат. вісник НТШ, 14, 52-63.

5. *Maslyuchenko, V.; Banakh, T.; Filipchuk, O.* (2017) Separately continuous mappings with nonmetrizable range : The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (18-23 September, Lviv, Ukraine), 70.

6. *Энгелькинг, Р.* (1986) Общая топология. М : Мир.

7. *Bing, R.* (1953) A connected countable Hausdorff space : Proc. Amer. Math. Soc., 4, 474.

8. *Карлова, О., Маслюченко, В., Миронік, О.* (2012) Площина Бінґа і нарізно неперервні відображення : Мат. студії, 38(2), 188-193.