УДК 517.946

©2018 р. М.І. Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО Й ТЕЛЕГРАФНОГО РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Досліджується функція Гріна задачі Коші для псевдодиференціального рівняння (ПДР) з негладким символом і фрактального рівняння порядку $\alpha \in (1,2)$, яка використовується для встановлення коректності цієї задачі в просторах Діні.

Ключові слова: функція Гріна, псевдодиференціальне рівняння, простори Діні.

The Green's function of the Cauchy problem is investigated for a pseudo-differential equation with a non-smooth symbol and a fractal equation of order $\alpha \in (1,2)$. This function is used to establish the correctness of the abovementioned problem in Dini spaces.

Keywords: The Green's function, pseudo-differential equation, Dini spaces.

Вступ

Задачі для різних рівнянь з дробовими похідними були предметом досліджень багатьох вітчизняних і зарубіжних математиків, починаючи від Л. Ейлера, Ж. Ліувілля, Б. Рімана, Ж. Адамара тощо.

Цим рівнянням і параболічним псевдодиференціальним рівнянням присвячені праці С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена і А.Н. Кочубея [4], Н.О. Вірченко і В.Я. Рибака [3], В.В. Городецького і В.А. Літовченка [2], дисертації Я.М. Дріня і А.О. Лопушанського [6] та інших.

У статтях автора [7] запропоновано новий підхід до вивчення функції Гріна і фундаментального розв'язку параболічного рівняння з дробовими похідними. Як продовження дослідження, тут вивчається функція Гріна задачі Коші для ПДР та телеграфного рівняння з дробовою похідною, яке описує процес коливання сили струму і напруги в електричному контурі.

§1. Функція Гріна задачі Коші для псевдодиференціального рівняння

У області $\Pi = (0,\infty) \times E_n$ розглянемо задачу Коші

$$\mathfrak{D}_t^\alpha u = = \mathrm{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left[\left(-a(\sigma) + \sum_{k_0\gamma+v<\alpha\gamma} a_{k_0v}(\sigma)u_t^{(k_0)}\right) \times \times \mathrm{F}_{x\to\sigma}u(t,x)\right] + f(t,x), \qquad (1)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(t,x) = \varphi_k(x), \qquad (2)$$

$k = \overline{0, m-1}, m \in \mathbb{N}$.

Тут $\mathrm{F}_{x\to\sigma}$, $\mathrm{F}^{-1}_{\sigma\to x}$ – оператори Фур'є, $\mathfrak{D}_t^\alpha$ – похідна Капуто,

$$\mathrm{F}_{x\to\sigma}u(t,x) = \int\limits_{\mathrm{E}_n} e^{i\sigma x}u(t,x)dx \equiv \tilde{u}(t,\sigma), \quad (3)$$

$$\mathfrak{D}_t^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{u_t^{(j)}(0,x)}{\Gamma(j-\alpha+1)}t^{j-\alpha}, \qquad (4)$$

$(m-1 < \alpha < m)$, $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ – дробова похідна Рімана–Ліувілля.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int\limits_0^t \frac{u(\tau,x)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad (5)$$

$n = [\alpha] + 1$.

Поряд з перетворенням Фур'є (3) введено перетворення Лапласа

$$\mathrm{L}_t u(t,x) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}u(t,x)dt = \tilde{u}(p,x). \qquad (6)$$

Якщо $\alpha \in (0,1)$ і до задачі (1), (2) застосувати оператор LF, то для функції

$w(p,0) = \mathrm{LF}u(t,x)$ отримаємо співвідношення [3, с. 25]

$$p^{\alpha}w = -a(\sigma)w + \sum_{k_0\gamma+\nu<\alpha\gamma} a_{k_0\nu}(\sigma)p^{k_0}w +$$

$$+p^{\alpha-1}\tilde{\varphi}(\sigma) + \tilde{\tilde{f}}(p,\sigma).$$

Звідки знаходимо

$$w(p,\sigma) = \frac{\sum\limits_{k_0\gamma+\nu<\alpha\gamma} a_{k_0\nu}(\sigma)p^{k_0}}{p^{\alpha}+a_{\gamma}(\sigma)} w(p,\sigma) +$$

$$+\frac{p^{\alpha-1}\tilde{\varphi}(\sigma)}{p^{\alpha}+a(\sigma)} + \frac{\tilde{f}(p,\sigma)}{p^{\alpha}+a(\sigma)}. \qquad (7)$$

Розглянемо згортку сумовних функцій $f(t,x)$ і $g(t,x)$

$$(f \times \times g)(t,x) =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathrm{E}_n} f(t-\tau, x-y)g(\tau,y)dy \qquad (8)$$

і скористаємось теоремою про перетворення Фур'є–Лапласа згортки:

$$\mathrm{LF}(f\times\times g) = \mathrm{LF}f \cdot \mathrm{LF}g(t,x). \qquad (9)$$

Застосовуючи до обох частин формули (7) оператор $(\mathrm{LF})^{-1}$ і для співмножників у цій формулі використаємо останнє співвідношення (9), беручи до уваги, що $u(t,x) = (\mathrm{LF})^{-1}w$, будемо мати

$$u(t,x) = \sum_{k_0\gamma+\nu<\alpha\gamma} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathrm{E}_n} G_{k_0\gamma}(t-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times u(\tau,\xi)d\xi + \mathcal{F}(t,x). \qquad (10)$$

Тут позначено

$$G_{k_0\gamma}(t,x) = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{F}^{-1}\left(\frac{a_{k_0\nu}(\sigma)p^{k_0}}{p^{\alpha}+a(\sigma)}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}i} \times$$

$$\times \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}dp \int\limits_{\mathrm{E}_n} e^{i\sigma x}\frac{a_{k_0\nu}(\sigma)p^{k_0}}{p^{\alpha}+a(\sigma)}d\sigma, \qquad (11)$$

$$\mathcal{F}(t,x) = \int\limits_{\mathrm{E}_n} G_1(t, x-\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathrm{E}_n} G_2(t-\tau, x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \qquad (12)$$

$$G_1(t,x) = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{F}^{-1}\left\{\frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}+a(\sigma)}\right\},$$

$$G_2(t,x) = \mathrm{L}_p^{-1}\mathrm{F}_{\sigma}^{-1}\left(p^{\alpha}+a(\sigma)\right)^{-1}. \qquad (13)$$

Отже, для розв'язку $u(t,x)$ ми отримали інтегральне рівняння (10). Оцінимо його ядро і функції G_1, G_2. Скористаємось зображенням

$$G_2(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}dp \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} e^{-p^{\alpha}\tau}d\tau \int\limits_{\mathrm{E}_n} e^{i\sigma x - a(\sigma)\tau}d\sigma =$$

$$= \mathrm{L}^{-1}\left(\int\limits_0^{\infty} e^{-p^{\alpha}\tau}G_0(\tau,x)d\tau\right). \qquad (14)$$

Виконаємо в інтегралах заміни $pt = z$, $\sigma = \tau^{-\frac{1}{\gamma\xi}}$, $\tau = t^{\alpha}\beta$. Якщо $a(\sigma) = \sum\limits_{|k|\leq\gamma=2b} c_k\sigma^k$ – многочлен, який відповідає правій частині параболічного рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial\tau} = \sum\limits_{|k|\leq\gamma=2b} c_k\mathfrak{D}^k u$, то отримуємо

$$\mathfrak{D}_2^k G_2(t,x) = \frac{1}{2\pi i}t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}-1+\alpha} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathrm{Re}z=u} e^z dz \int\limits_0^{\infty} e^{-z^{\alpha}\beta}\mathfrak{D}_x^k G_0(\alpha\beta, x)d\beta. \qquad (15)$$

Для $G_2(t,x)$ в [7] виведено експоненціальну оцінку

$$|\mathfrak{D}_x^k G_2(t,x)| \leq c_k t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}-1+\alpha} \times$$

$$\times e^{-\left(|x|t^{-\frac{\alpha}{2b}}\right)^q}\Psi_{n+|k|-\gamma}(\hat{x}), \qquad (16)$$

$\Psi_m(x) = 1$, $m<0$; $\Psi_0(x) = \ln|x|+1$, $\Psi_m(x) = |x|^{-m}$, $n>0$; $\hat{x} = xt^{-\frac{\alpha}{2b}}$, $\Psi_m(x) \equiv 1$, якщо $|x|\geq 1$.

Нехай $a(\sigma) \in C^N(\mathrm{E}_n/0)$, $\mathrm{Re}a(\sigma) \geq a_0|\sigma|^{\gamma}$, причому

$$|\mathfrak{D}^k a(\sigma)| \leq c_N|\sigma\sigma|^{\gamma-|k|}, \ \sigma\neq 0, \gamma>0. \qquad (17)$$

Якщо в інтегралі $G_0(t,x)$ із (14) $a(\sigma)$ однорідна, то внаслідок заміни $\sigma = t^{-\frac{1}{\gamma}}\xi$ маємо

$$\mathfrak{D}_x^k G_0(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n} t^{-\frac{n+|k|}{\gamma}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathrm{E}_n} e^{i\hat{x}\xi}(i\xi)^k e^{-a(\xi)} d\xi. \qquad (18)$$

Останній інтеграл оцінюється за лемою 1 [5, с. 915], а саме, якщо в (17) $N \geq 2n + |k| + [\gamma]$, то

$$|\mathfrak{D}^k G_0(t,x)| \leq c_k t^{-\frac{n+|k|}{\gamma}} (1 + |\tilde{x}|)^{-(n+|k|+\gamma)},$$

або

$$|\mathfrak{D}_x^k G_0(t,x)| \leq c_k t \left(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{-(n+|k|+\sigma)} \leq$$

$$\leq c_k \left(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{-(n+|k|)}; \qquad (19)$$

для $|k| \leq N - 2n - [\gamma]$, $\tilde{x} = t^{-\frac{1}{\gamma}}x$, $\hat{x} = t^{-\frac{\alpha}{\gamma}}x$.

У інтегралі по змінній z формули (15) перейдемо до інтегрування по контуру $C_a = \{z, z = a + ive^{i\mathrm{sign} v\varphi_0}, |v|_\infty\}$, що виходить з точки $a + io$ і утворює з прямою $\mathrm{Re}z = a$ кути φ_0 при $v \geq 0$ і $(-\varphi_0)$ при $v \leq 0$, $|\varphi_0| < \varepsilon$. На такому контурі $|e^z| = e^{a-|v|\sin\varphi_0}$ для $\alpha \in (0,1)$ $\mathrm{Re}z^\alpha \geq (a\cos\varphi_0)^\alpha = b_0 > 0$ [7, с. 105].

Тому маємо

$$|\mathfrak{D}_x^k G_2(t,x)| \leq c_k t^{\alpha-1} \int\limits_0^\infty e^{a-v\sin\varphi_0} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{-b_0\beta} |\mathfrak{D}_x^k G_0(t^\alpha\beta, x)| d\beta. \qquad (20)$$

Очевидно, що інтеграл по змінній v збіжний. Інтеграл по β позначимо через H_k і оцінимо за допомогою останньої нерівності в (19). Будемо мати

$$H_k \leq c_k \int\limits_0^\infty e^{-b_0\beta}[(t^\alpha\beta)^{\frac{1}{\gamma}} + |x|]^{-(n+|k|)} d\beta =$$

$$= t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} \int\limits_0^\infty e^{-b_0\beta}[\beta^{\frac{1}{\gamma}} + |\hat{x}|]^{-(n+|k|)} d\beta.$$

Якщо $n + |k| < \gamma$, то для $x \in \mathrm{E}_n$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{-b_0\beta} |\mathfrak{D}_x^k G_0(t^\alpha\beta, x)| d\beta. \qquad (21)$$

У випадку $n + |k| \geq \gamma$ введемо нову змінну $\beta = |\hat{x}|^\gamma \xi^\gamma$. В результаті отримаємо

$$H_k \leq c_k t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} \int\limits_0^\infty e^{-b_0|\hat{x}\xi|^\gamma} (1+\xi)^{-(n+|k|)} \times$$

$$\times \xi^{\gamma-1} d\xi |\hat{x}|^{(n+|k|-\gamma)}.$$

Останній інтеграл в межах $(0,1)$ оцінюється B-функцією $B(1,\gamma)$, а в межах $(1,\infty)$ так: якщо $n + |k| = \gamma$, то

$$\int\limits_0^\infty e^{-b_0|\hat{x}\xi|^\gamma} (1+\xi)^{-\gamma} \xi^{\gamma-1} d\xi \leq$$

$$\leq \int\limits_{|\hat{x}|}^\infty e^{-b_0\beta^\gamma} \beta^{-1} d\beta \leq c_0 \left(|\ln|\hat{x}|| + 1\right). \qquad (22)$$

Якщо $n + |k| > \gamma$, будемо мати

$$H_k \leq c t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} |\hat{x}|^{-(n+|k|-\gamma)} \int\limits_1^\infty \xi^{-(n+|k|-\gamma)-1} =$$

$$= c_k t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} |\hat{x}|^{-(n+|k|-\gamma)}. \qquad (23)$$

Зауважимо, що з допомогою другої нерівності в (19) також отримуємо оцінку

$$H_k \leq c \int\limits_0^\infty e^{-b_0\beta} t^\alpha \beta \left[(t^\alpha\beta)^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right]^{-(n+|k|+\gamma)} d\beta \leq$$

$$\leq c t^\alpha |x|^{-(n+k+\gamma)} \int\limits_0^\infty e^{-b_0}\beta d\beta =$$

$$= c t^\alpha |x|^{-(n+|k|+\gamma)}, \qquad (24)$$

яка уточнює порядок спадання $\mathfrak{D}^k G_2(t,x)$ при $|x| \to \infty$. З нерівностей для H_k дістаємо оцінку похідних

$$|\mathfrak{D}_x^k G_2(t,x)| \leq$$

$$\leq c_k t^{-1+\alpha-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} \Psi_{n+|k|-|\gamma|}(\hat{x}), \qquad (25)$$

а для $\mathfrak{D}^k G_1(t,x)$ маємо нерівності

$$|\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)| = t^{1-\alpha}|\mathfrak{D}^k G_2(t,x)| \leq$$
$$\leq c_k t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)}\Psi_{n+|k|-|\gamma|}(\hat{x}). \qquad (26)$$

Функції $G_{k_0 v}(t,x)$ із (11) запишемо аналогічно як $\mathfrak{D}^k G_2(t,x)$ за формулою (15)

$$\mathfrak{D}^k G_{k_0 v}(t,x) = \int\limits_{c_a} e^z z^{k_0} dz \int\limits_0^\infty e^{-z^\alpha \beta} d\beta \times$$
$$\times \int e^{i\hat{x}\xi - a(\sigma)} a_{k_0 v} \xi^v (i\xi)^k d\xi t^{-\frac{n+|k|+\gamma-\varepsilon_{k_0 v}}{\gamma}},$$
$$\varepsilon_{k_0 v} = \alpha\gamma + k_0\gamma - v > 0.$$

Користуючись міркуваннями, за допомогою яких оцінювались похідні $\mathfrak{D}^k G_2(t,x)$, отримаємо

$$|\mathfrak{D}_x^k G_{k_0 v}(t,x)| \leq c_k t^{-\frac{n+|k|+\gamma-\varepsilon_{k_0 v}}{\gamma}} \times$$
$$\times (1+|\hat{x}|)^{-(n+|k|+\gamma+v)}. \qquad (27)$$

Внаслідок цієї нерівності ядро $K(t,x) \equiv \sum\limits_{k_0\gamma+v<\alpha\gamma} G_{k_0 v}(t,x)$ інтегрального рівняння (10) допускає оцінку

$$|K(t,x)| \leq c\left(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{-(n+\gamma-\varepsilon_0)}, \qquad (28)$$

де $\varepsilon_0 = \min\limits_{v,k_0}(\alpha\gamma - k_0\gamma - v)$, $\varepsilon_{k_0 v} > 0$, $k_0 < \alpha$, $v < \gamma$. Тому інтегральне рівняння (10) з квазісингулярним ядром [5], [7]. Його розв'язок можна знайти за допомогою резольвенти

$$u(t,x) = F(t,x) +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathrm{E}_n} \mathrm{R}(t-\tau, x-\xi) F(\tau,\xi) d\xi. \qquad (29)$$

Враховуючи зображення $F(t,x)$ за формулою (12) при підстановці в (29) заміною порядку інтегрування приходимо до співвідношення

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathrm{E}_n} Z_1(t, x-\xi)\varphi(\xi) d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int Z_2(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \qquad (30)$$

де

$$Z_i(t,x) = G_i(t,x) + \int\limits_0^t d\tau \int G_i(t-\tau, x-\xi) \times$$
$$\times \mathrm{R}(t,\xi) d\xi, \ (i=1,2). \qquad (31)$$

Теорема 1 (про функцію Гріна). *Якщо в рівнянні* (1) $a(\sigma)$ *однорідна функція степеня* γ *і належить класу* $C^{(N)}$ *при* $\sigma \neq 0$, *похідні задовольняють нерівність* (17) $\alpha \in (0,1)$, $k_0 < \alpha$, *то компоненти функції Гріна визначаються формулами* (31) *і для похідних правильні нерівності*

$$|\mathfrak{D}_x^k Z_2(t,x)| \leq$$
$$\leq c_k \begin{cases} t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)}, \ n+|k| < \gamma, \\ t^{-1}(\ln|\hat{x}|+1), \ n+|k| = \hat{\gamma}, \\ t^{-1}|x|^{-(n+|k|-\gamma)}, \ n+|k| > \gamma, \\ t^{2\alpha-1}|x|^{-(n+|k|+\gamma)}, \ |x| \geq t^{-\frac{\alpha}{\gamma}}. \end{cases} \qquad (32)$$

Похідні $\mathfrak{D}_x^k Z_1(t,x)$ справджують нерівності (32), тільки їх праві частини домножаються на $t^{1-\alpha}$. Якщо $\varphi, f \in C^{(\omega)}$, то

$$|\mathfrak{D}_x^\gamma u(t,x)| \leq$$
$$\leq c\left(t^{-\alpha}\omega_\varphi(t^{\frac{\alpha}{\gamma}})|\varphi|_{\omega_\varphi} + |f|_{\omega_f} F(t^{\frac{\alpha}{\gamma}})\right). \qquad (33)$$

§2. Задача Коші для телеграфного рівняння

Згідно закону Ома в електричних проводах сила струму і напруга задовольняють лелеграфне рівняння [1, с. 31]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = CLu''_{tt} + (CR+LG)u_t + GRu, \qquad (34)$$

де (C, L, G, R) – відомі фізичні величини. Цьому рівнянню відповідає псевдодиференціальне рівняння з дробовою похідною Капуто порядку $\alpha \in (1,2)$:

$$\mathfrak{D}_t^\alpha u = \mathrm{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left[-|\sigma|^2 v + a_1 v'_t + a_0 v\right] + f(t,x),$$
$$v(t,\sigma) = \mathrm{F}u(t,x). \qquad (35)$$

Задамо початкові умови

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+0} u(t,x) &= \varphi_1(x), \\ \lim_{t\to 0} u'_t(t,x) &= \varphi_2(x). \end{aligned} \qquad (36)$$

Якщо до рівняння (35) Застосувати оператор Лапласа і позначити $w(t,\sigma) \equiv \mathrm{LF}u(t,x)$, то задачі Коші (35), (36) відповідає неоднорідне рівняння [3, с. 14, 39]

$$\left(p^{\alpha}+|\sigma|^2\right)w=(a_1p+a_0)w+(p^{\alpha-1}-a_1)\tilde{\varphi}_1+$$
$$+p^{\alpha-2}\tilde{\varphi}_2(\sigma)+\tilde{\tilde{f}}. \qquad (37)$$

Звідси, як в попередньому пункті, знаходимо, що функція $u(t,x)$ повинна бути розвёязком інтегрального рівняння

$$u(t,x)=\int_0^t d\tau\int_{\mathrm{E}_n}G_{10}(t-\tau,x-\xi)u(\tau,\xi)d\xi+$$
$$+F(t,x), \qquad (38)$$

де

$$G_{10}(t,x)=\mathrm{L}_p^{-1}\mathrm{F}_\sigma^{-1}\left(\frac{a_1p+a_0}{p^{\alpha}+|\sigma|^2}\right)=$$
$$=\frac{t^{-2+\alpha-\frac{\alpha n}{2}}}{(2\pi)^{-n+1}i}\int_{\mathrm{C}_a}e^z\int_{\mathrm{E}_n}e^{i\xi\hat{x}}\frac{a_1z+a_0t}{z+|\xi|^2}d\xi dz,$$

$\hat{x}=t^{-\frac{\alpha}{2}}x$, $p=zt^{-1}$, $\sigma=\xi t^{-\frac{\alpha}{2}}$.

Якщо $n=1$, то

$$\mathrm{F}_\sigma^{-1}(p^{\alpha}+\sigma^2)^{-1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma x}(p^{\alpha}+\sigma^2)^{-1}d\sigma=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}|x|}}{2p^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Також маємо зображення при $n\geq 1$ зображення ($z\to p$, $\xi\to\sigma$):

$$\mathrm{F}^{-1}(p^{\alpha}+|\sigma|^2)^{-1}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}\beta}}{p^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{(2\pi)^n}\times$$
$$\times\int_{\mathrm{E}_n}e^{i\sigma\hat{x}-|\sigma|^2\beta p^{-\frac{\alpha}{2}}}d\sigma d\beta. \qquad (39)$$

За допомогою теореми Коші для аналітичних функцій вираховуємо інтеграл

$$I_j(\hat{x},\beta,p)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma_j\hat{x}_j-\sigma_j^2\beta p^{-\frac{\alpha}{2}}}d\sigma_j=$$
$$=\sqrt{\pi}\beta^{-\frac{1}{2}}p^{\frac{\alpha}{4}}e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}\frac{x_j^2}{4\beta}}.$$

Тому знаходимо

$$\mathrm{F}^{-1}\left(p^{\alpha}+|\sigma|^2\right)^{-1}=c_np^{\frac{\alpha}{4}}\int_0^{\infty}\beta^{-\frac{n}{2}}e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}\left(\beta+\frac{|\hat{x}|^2}{4\beta}\right)}d\beta.$$

Користуючись нерівністю (18) із [7, с. 104], $\beta+\frac{|\hat{x}|^2}{4\beta}\geq|x|$ для $\alpha\in(1,2)$ $\mathrm{Re}p^{\frac{\alpha}{4}}\geq b_0$, $p\in C_a$ отримуємо

$$|\mathrm{F}_\sigma^{-1}\left(p^{\alpha}+|\sigma|^2\right)^{-1}|\leq$$
$$\leq c_ne^{-\frac{1}{2}\mathrm{Re}p^{\frac{\alpha}{2}}|\hat{x}|}\left\{\begin{array}{l}1,\ n=1,\\ |\ln|\hat{x}||+1,\ n=2,\\ |\hat{x}|-(n-2),\ n>2.\end{array}\right\}=$$
$$=\Psi_{n-2}|\hat{x}|e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Re}p^{\frac{\alpha}{2}}|\hat{x}|}.$$

Виконуючи інтегрування по контуру C_a в інтегралі Лапласа для $G_{10}(t,x)$, приходимо до нерівності

$$|G_{10}(t,x)|\leq ct^{-2+\alpha-\frac{\alpha n}{2}}\times$$
$$\times\Psi_{n-2}|\hat{x}|e^{-c_1\left(|x|t^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2}. \qquad (40)$$

Для похідних $\mathfrak{D}_x^kG_{10}(t,x)$ правильна нерівність (40) із заміною в оцінці n на $n+|k|$. Ядро $G_{10}(t,x)$ сумовне, причому $\int_0^t d\tau\int|G_{10}(\tau,\xi)|d\xi\leq ct^{\alpha-1}$. З нерівності (40) для випадку $n>2$ випливає оцінка

$$|G_{10}(t,x)|\leq ct^{-\alpha_1}|x|^{-(n-\alpha_2)}e^{-c|\hat{x}|^2}, \qquad (41)$$

де $\alpha_1=2-\dfrac{\alpha}{2}\mu$, $\alpha_2=2-\mu$, $0<\mu<2$, $\alpha\mu>2$, $\alpha\in(1,2)$, $0<\alpha_1<1$, $\alpha_2>0$. Тому рівняння (38) з квазірегулярним ядром і існує резольвента

$$R(t,x)=G_{01}(t,x)+$$
$$+\sum_{v=1}^{\infty}\int_0^t d\tau\int G_{01}(t-\tau,x-\xi)K_v(\tau,\xi)d\xi, \quad (42)$$

де $K_v(t,x)$ повторні ядра для $G_{10}(t,x)$, яка задовольняє нерівність (40).

Неоднорідність $F(t,x)$ в рівнянні (38) є сумою інтегралів

$$F(t,x)=\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathrm{E}_n} G_j(t,x-\xi)\varphi_j(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathrm{E}_n} G_\alpha(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (43)$$

де $G_j(t,x)$, як видно з рівняння (37), мають вигляд

$$G_j(t,x)=\mathrm{L}_p^{-1}\mathrm{F}_\sigma^{-1}\left[\frac{p^{\alpha-j+\delta_j}}{p^\alpha+|\sigma|^2}\right],\ (j=1,2,\alpha),$$

$\delta_1=-a_1$, $\delta_2=0$, $\delta_\alpha=0$.

Внаслідок заміни $p=t^{-1}z$, $\sigma=\xi t^{-\frac{\alpha}{2}}$ отримуємо

$$G_j(t,x)=c_n t^{-1+\alpha-(\alpha-j)-\frac{n\alpha}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathrm{Re}z=a} e^z dz\int\limits_{\mathrm{E}_n} e^{i\hat{x}\xi}\frac{z^{\alpha-j}+\delta_j t^{\alpha-j}}{z^\alpha+\xi^\alpha}d\xi.$$

Оцінюючи за формулою (39) інтеграл по змінній ξ, аналогічно як для $G_{10}(t,x)$, будемо мати

$$|\mathfrak{D}_x^k G_j(t,x)|\le c_k t^{-1+j-\alpha\frac{n+|k|}{2}}\times$$

$$\times\Psi_{n+k-2}(\tilde{x})e^{-c|\hat{x}|^q}(1+\delta_j t^{\alpha-j}), \quad (44)$$

тобто при $n>2$ і $|x|<t^{\frac{\alpha}{2}}$

$$|\mathfrak{D}_x^k G_j(t,x)|\le$$

$$\le c_k t^{-1-\alpha+j}|x|^{-(n+|k|-2)}e^{-c|\hat{x}|^q}. \quad (45)$$

Ці нерівності забезпечують сумовність похідних $\mathfrak{D}_x^k F(t,x)$, $|k|\le 2$, якщо $\varphi_1\in C^{(1)}(\mathrm{E}_n)$, $\varphi_2\in C(\mathrm{E}_n)$ і $f\in C^{(\omega)}[(0,\tau)\times\mathrm{E}_n]$.

Дійсно, з допомогою нерівності (44) знаходимо для молодших похідних потенціалів

$$|\mathfrak{D}_x^k G_j\times\varphi_j|\le c|\varphi_j|_c t^{-1+j-\frac{|k|}{2}\alpha}, (j=1,2,|k|\le 1).$$

Але $\mathfrak{D}_x^2 G_1\times\varphi_1$ за цією нерівністю несумовна на $[0,\tau]$, бо $\alpha>1$. Тому скористаємось зображенням і умовою $\varphi\in C^{(1)}$

$$\mathfrak{D}_x^2 G_1\times\varphi_1=\int\limits_{\mathrm{E}_n}\mathfrak{D}_x^2 G(t,x-\xi)\varphi_1(\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{E}_n}\mathfrak{D}_x G_1(t,x-\xi)\varphi'(\xi)d\xi.$$

Оцінюючи інтеграл за нерівністю (44), отримуємо

$$|\mathfrak{D}^2 G_1\times\varphi_1|\le c|\varphi_1|_{c^{(1)}}\int\limits_{\mathrm{E}_n}|x-\xi|^{-(n-1)}\times$$

$$\times e^{-c|x-\hat{\xi}|^q}d\xi t^{-\frac{\alpha}{2}}=c|\varphi_1|_1 t^{\frac{\alpha}{2}}\int\limits_{\mathrm{E}_n}|z|^{-(n-1)}\times$$

$$\times e^{-c|z|^q}dz t^{-\alpha}=ct^{-\frac{\alpha}{2}}|\varphi_1|_1.$$

Якщо $j=\alpha$ і $\Phi(t)=\int\limits_0^t\frac{F(\tau)}{\tau}d\tau<\infty$, $F(t)=\int\limits_0^t\frac{\omega(\tau)}{\tau}d\tau$, то

$$|\mathfrak{D}_x^2 G_\alpha\times\times f|=\left|\int\limits_0^t d\tau\int\mathfrak{D}^2 G_\alpha(t-\tau,x-\xi)\times\right.$$

$$\left.\times[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]d\tau\right|\le c|f|_\omega\int\limits_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\times$$

$$\times\int\limits_{|x-\xi|\le(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n}d\xi+c|f|_\omega\int\limits_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\times$$

$$\times\int\limits_{|x-\xi|>(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n}e^{-c|x-\hat{\xi}|^q}d\xi\equiv H_1+H_2,$$

де $|f|_\omega=\sup\limits_{\Pi}|f(t,x)|+\sup\limits_{\Pi}\dfrac{|\Delta f(t,x)|}{\omega(|\Delta x|)}$.

В інтегралах H_1 і H_2 перейдемо до сферичних координат

$$H_1\le\int\limits_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho=\Phi\left(t^{\frac{\alpha}{2}}\right)=$$

$$=\int\limits_0^{t^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{F(\tau)}{\tau}d\tau.$$

За властивістю модуля неперервності $\omega(t)t^{-1}<2\omega(\tau)\tau^{-1}$

$$H_2\le 2\int\limits_0^t\frac{\omega\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\right)}{(t-\tau)^{1+\frac{\alpha}{2}}}d\tau\int\limits_0^\infty e^{-\left(\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^q}d\tau=$$

$$= 2\int\limits_0^{t^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau = 2F(t^{\frac{\alpha}{2}}).$$

З нерівностей для потенціалів з ядрами G_j випливає оцінка

$$|\mathfrak{D}_x^k F(t,x)| \leq \tag{46}$$

$$\leq c \begin{cases} |\varphi_1|_c + |\varphi_2|_c + |f|_c, \ k = 0, \\ |\varphi_1|_c t^{-\frac{\alpha}{2}} + |\varphi_2|_c t^{1-\frac{\alpha}{2}} + |f|_c, \ k = 1, \\ |\varphi_1|_c t^{-\frac{\alpha}{2}} + |\varphi_2|_c t^{1-\alpha 2} + |f|_\omega, \ |k| = 2. \end{cases}$$

Очевидно, що $\mathfrak{D}_x^k F(t,x)$ мають інтегровану особливість при $t = 0$, $\alpha < 2$. Розв'язок інтегрального рівняння (38) за допомогою резольвенти (42) визначається формулою

$$u(t,x) = F(t,x)| + \int\limits_0^t d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\mathrm{E}_n} R(t-\tau, x-\xi) F(\tau,\xi) d\xi. \tag{47}$$

Якщо в цю формулу підставити $F(t,x)$ із (43) і врахувати, що в згортках $G_j \times \varphi_j = \int\limits_{\mathrm{E}_n} G_j(t, x-\xi)\varphi_j(\xi) d\xi$ ядра $G_j(t,x)$ залежать від різниці $(x-\xi)$, то після заміни порядку інтегрування отримаємо зображення розв'язку

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathrm{E}_n} Z_i(t, x-\xi)\varphi_j(\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathrm{E}_n} Z_\xi(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \tag{48}$$

де вжито позначення для $i = 1, 2, \alpha$

$$Z_i(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathrm{E}_n} G_i(t-\tau, x-\xi) R(\tau,\xi) d\xi + G_i(t,x). \tag{49}$$

Наслідком приведених міркувань є така теорема.

Теорема 2 (про коректність). *Якщо в рівнянні* (35) *порядок похідної* $\alpha \in (1,2)$, *то в задачі* (35), (36) *компоненти функції Гріна визначаються формулами* (49) *і для їх похідних правильні оцінки* (44). *Розв'язок задачі Коші* (35), (36) *з початковими функціями* $\varphi_1 \in C^{(1)}(\mathrm{E}_n)$, $\varphi_2 \in C(\mathrm{E}_n)$ *і* $f \in C^{(\omega)}[(0,\tau) \times \mathrm{E}_n]$ *зображається формулою* (48) *і для нього справджуються нерівності* (46).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тихонов, А.Н., Самарский, А.А. (1953). Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат.

2. Городецький, В.В., Літовченко, В.А. (1992). Задача Коші для псевдодиференціального рівняння у просторі узагальнених функцій типу S': Доп. АН України, 10, 6-9.

3. Вірченко, Н.О., Рибак, В.Я. (2007). Основи дробового інтегро-диференціювання : Навч. посібник. Київ.

4. Eidelman, S.D., Ivasyshen, S.D., Koshubei, A.N. (2004). Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type: Operator Theory: Adv. and Appe, 152, 390.

5. Кочубей, А.Н. (1988). Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы: Изв. АН СССР. Сер. матем., 52 (5), 909–932.

6. Лопушанський, А.О. (2018). Лінійні та нелінійні операторно-диференціальні рівняння на комплексних інтерполяційних шкалах: Автореф. докт. дисерт, Львів.

7. Матійчук, М.І. (2016). Про зв'язок між фундаментальними розв'язками параболічних рівнянь і рівнянь з дробовими похідними: Буковинський математичний журнал. Чернів. нац. ун-т, 4(3-4), 101-114.

8. Матійчук, М.І. (2018). Про функцію Гріна псевдодиференціального рівняння з дробовою похідною: Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 22-25 травня 2018 р.). Матеріали конференції.