

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ОДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВІДХИЛЮВАЛЬНИМ АРГУМЕНТОМ

Побудовано математичну модель Сонячної системи, що враховує скінченну швидкість гравітації.

Ключові слова: математична модель Сонячної системи зі скінченною швидкістю гравітації.

A mathematical model of the solar system is constructed, which takes into account the finite speed of gravity.

Keywords: a mathematical model of the solar system with a finite velocity of gravity.

1. Вступ. Стаття присвячена застосуванню диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом до побудови математичних моделей руху системи n матеріальних точок (тіл) під дією закону всесвітнього тяжіння, зокрема, до побудови математичної моделі Сонячної системи. Для побудування таких моделей створено належні умови: перше – побудовано теорію диференціально-функціональних рівнянь (див., наприклад, [1]–[11]); друге – встановлено, що швидкість гравітації є скінченною [12,13].

Завдяки тому, що гравітаційний вплив одного тіла на інше не може відбуватися миттєво, а потрібний час, за який гравітаційне поле проходить відстань між цими тілами, то природним є те, що математичні моделі руху систем n матеріальних точок мають бути системами із післядією. Тому для вивчення динаміки таких систем найбільш прийнятним є математичний апарат, в основу якого покладено теорію диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом.

Із моменту відкриття І. Ньютоном (1643–1727) закону всесвітнього тяжіння, опублікованому в його знаменитих *Philosophiæ Naturalis Principia mathematica* в 1687 р., для математичного формулювання задач n тіл використовувалися системи звичайних диференціальних рівнянь, а не диференціальні рівняння з відхилювальним аргументом, оскільки вважалося, що швидкість гравітації дорівнює нескінченності і гравітацій-

не поле поширюється миттєво від джерела, як би далеко від нього не знаходиться.

Для двох окремих значень $n \in \{1, 2\}$ задача n тіл розв'язана повністю ще Ньютоном. Розв'язок задачі про рух одного тіла міститься уже в першому законі Ньютона (тіло рухається рівномірно і прямолінійно). Використовуючи звичайні диференціальні рівняння, Ньютон знайшов загальний розв'язок задачі двох тіл і надав йому геометричної форми (траєкторіями руху одного тіла відносно другого і відносно центра мас є конічні перерізи). Пізніше Л. Ейлер (1707–1783) надав розв'язку задачі двох тіл близьку до сучасної аналітичну форму.

На відміну від випадку двох тіл задача трьох тіл не допускає загального розв'язку.

Через свою важливість для різних наук про природу задача трьох тіл прикувала до себе увагу багатьох математиків і механіків. Ж. Лагранж, К. Якобі, А. Пуанкаре, Дж. Біркгоф та інші затратили на цю задачу багато років наполегливої праці, отримали багато вагомих результатів і розвинули нові методи, однак побудувати загальний розв'язок так і не вдалось.

Г. Брунс і А. Пуанкаре довели, що при $n = 3$ для задачі n тіл не можна знайти загальний розв'язок, який би виражався через алгебраїчні або через однозначні трансцендентні функції координат і швидкостей тіл.

Хоча загальний розв'язок задачі трьох тіл отримати не вдалось, давно відомі точ-

ні частині розв'язки цієї задачі. У 1772 р. Лагранж опублікував свій знаменитий мемуар "Про задачу трьох тіл", у якому вказав на існування двох класів рухів у задачі трьох тіл, що описуються нескладними математичними формулами (існування таких частиних розв'язків було відмічено Ейлером ще в 1767 р.).

Зазначимо, що важливі результати стосовно задач n тіл при $n \geq 2$ появлялись протягом ХІХ і ХХ століття і появляються зараз (див. [14]–[21]).

Використання в небесній механіці математичного апарату загальної теорії відносності дозволило дослідити цілий ряд релятивістських ефектів у русі небесних тіл [22–24].

Математичні труднощі дослідження задачі n тіл із використанням звичайних диференціальних рівнянь зростають із ростом числа тіл. Для довільного n задача не розв'язана до сих пір, хоча існує цілий ряд аналітичних і числових методів, орієнтованих на використання комп'ютерів, що можуть дати наближений розв'язок задачі. При сучасному стані математики загальний розв'язок задачі n тіл при $n \geq 3$ з використанням звичайних диференціальних рівнянь можна знайти тільки з допомогою нескінченних рядів.

Однак математичні моделі руху n тіл з урахуванням закону всесвітнього тяжіння і використанням звичайних диференціальних рівнянь не є точними, оскільки не враховують скінченну швидкість гравітації. Це не дозволяє використовувати їх на великих проміжках часу, оскільки такі моделі дають великі похибки. Точнішими є моделі, що враховують дію кожного тіла на інші тіла системи, зумовлені запізненнями гравітаційних полів, породжених кожним тілом. У таких моделях замість звичайних диференціальних рівнянь потрібно використовувати диференціальні рівняння із запізнювальним аргументом. Такі моделі наведемо у подальшому.

2. Класична модель Сонячної системи. У межах цього пункту будемо вважати,

що дія кожної матеріальної точки на іншу здійснюється миттєво. Розглянемо систему $n + 1$ матеріальних точок M_0, M_1, \dots, M_n з масами m_0, m_1, \dots, m_n відповідно. Рух цих точок будемо розглядати в прямокутній системі координат x, y, z з початком координат у точці O . Систему координат вважатимемо інерціальною. Потрібно побудувати математичну модель руху точок M_i , $i = \overline{0, n}$, використовуючи радіуси-вектори $\bar{r}_i(t)$, $i = \overline{0, n}$, цих точок як функції часу, якщо на кожну точку діють тільки сили всесвітнього тяжіння зі сторони інших точок системи. Положення точок M_i , $i = \overline{0, n}$, визначається їх радіусами-векторами

$$\bar{r}_i(t) = x_i(t)\bar{i} + y_i(t)\bar{j} + z_i(t)\bar{k}, \quad i = \overline{0, n},$$

де $x_i(t)$, $y_i(t)$ і $z_i(t)$ – координати точки M_i в момент часу t . Тоді рівняння руху точок системи визначаються за допомогою другого закону Ньютона та закону всесвітнього тяжіння і мають вигляд

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 \bar{r}_i(t)}{dt^2} = \\ = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)), \\ i = \overline{0, n}, \end{cases} \quad (1)$$

де G – гравітаційна стала, $|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|$ – евклідова довжина вектора $\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)$, $\frac{G m_i m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t))$ – сила, з якою точка M_j притягує точку M_i (за законом всесвітнього тяжіння). Напрямок цієї сили збігається з напрямком вектора $\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)$ [15, 16].

Зазначимо, що у випадку $n = 9$ систему рівнянь (1) можна використовувати для вивчення руху Сонця і планет, якщо не враховувати дію на них інших складових Сонячної системи (астероїдів, комет тощо), Галактики та скінченну швидкість гравітації.

Для визначення радіусів-векторів точок M_i , $i = \overline{0, n}$, потрібно знати початкові умови:

$$\begin{cases} \bar{r}_i^{(0)} = \bar{r}_i(t_0), \\ \frac{d\bar{r}_i^{(0)}}{dt} = \frac{d\bar{r}_i(t_0)}{dt}, \\ i = \overline{0, n}, \end{cases} \quad (2)$$

тобто значення радіусів-векторів і векторів швидкості всіх точок системи в початковий момент часу t_0 , або значення радіусів-векторів точок у моменти часу t_1 і t_2 ($t_1 \neq t_2$):

$$\begin{cases} \bar{r}_i^{(1)} = \bar{r}_i(t_1), \\ \bar{r}_i^{(2)} = \bar{r}_i(t_2), \\ i = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (3)$$

Зазначимо, що задачі знаходження розв'язків системи (1), що задовольняють умови (2) або (3), і вивчення їх властивостей є основними в небесній механіці.

Більш точною математичною моделлю Сонячної системи є наступна система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 \bar{r}_i(t)}{dt^2} = \\ = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)) + \bar{F}_i(t), \\ i = \overline{0, n}, \end{cases} \quad (4)$$

при $n = 9$, що крім дії на точки системи сил, породжених іншими точками, враховує ще інші сили $\bar{F}_i(t)$, породжені численною групою малих планет – астероїдами, кометами, пиловими супутниками планет тощо, а також Галактикою, та умови (2) або (3).

Далі будемо вважати, що в системі (4) m_0 – маса Сонця, а m_3 – маса Землі. Запишемо систему диференціальних рівнянь, що описує рух Сонця та Землі. Це є наступна система рівнянь

$$\begin{cases} m_0 \frac{d^2 \bar{r}_0(t)}{dt^2} = \\ = \frac{Gm_0 m_3}{|\bar{r}_3(t) - \bar{r}_0(t)|^3} (\bar{r}_3(t) - \bar{r}_0(t)) + \bar{F}_0^*(t), \\ m_3 \frac{d^2 \bar{r}_3(t)}{dt^2} = \\ = \frac{Gm_3 m_0}{|\bar{r}_0(t) - \bar{r}_3(t)|^3} (\bar{r}_0(t) - \bar{r}_3(t)) + \bar{F}_3^*(t), \end{cases} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} & \bar{F}_0^*(t) = \\ & = \sum_{j \notin \{0,3\}} \frac{Gm_0 m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_0(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_0(t)) + \bar{F}_0(t) \end{aligned}$$

і

$$\bar{F}_3^*(t) =$$

$$= \sum_{j \notin \{0,3\}} \frac{Gm_3 m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_3(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_3(t)) + \bar{F}_3(t). \quad (6)$$

Вважається, що сили $\bar{F}_0^*(t)$ і $\bar{F}_3^*(t)$ відомі.

У другому рівнянні системи (5), як видно з (6) та таблиці I, запозиченої з [25] (с. 114), сила $\bar{F}_3^*(t)$ є значно меншою, ніж сила, що визначається першим доданком правої частини цього рівняння. Це впливає з того, що маса Сонця m_0 у 332958 разів більша маси Землі m_3 , а маса найважчої планети Юпітер більша маси Землі в 318 разів.

Таблиця I

Назва планети	Велика піввісь a , в а.о.	Ексцентриситет, e	Маса, в одиницях маси Землі
Меркурій	0,387	0,206	0,055
Венера	0,723	0,007	0,815
Земля	1,000	0,017	1,000
Марс	1,524	0,093	0,107
Юпітер	5,203	0,048	318
Сатурн	9,539	0,056	95,2
Уран	19,19	0,047	14,6
Нептун	30,07	0,009	17,2
Плутон	39,52	0,253	0,002

Звідси на підставі методів теорії збурень впливає, що рух Сонця і Землі на малих проміжках часу мало відрізняється від руху, що описується простішою системою

$$\begin{cases} m_0 \frac{d^2 \bar{r}_0(t)}{dt^2} = \\ = \frac{Gm_0 m_3}{|\bar{r}_3(t) - \bar{r}_0(t)|^3} (\bar{r}_3(t) - \bar{r}_0(t)) + \bar{F}_0^*(t), \\ m_3 \frac{d^2 \bar{r}_3(t)}{dt^2} = \\ = \frac{Gm_3 m_0}{|\bar{r}_0(t) - \bar{r}_3(t)|^3} (\bar{r}_0(t) - \bar{r}_3(t)). \end{cases} \quad (7)$$

У цій системі відкинути силу $\bar{F}_0^*(t)$ не можна, оскільки на підставі таблиці I та закону всесвітнього тяжіння вплив Юпітера та Сатурна на Сонце більший, ніж вплив Землі на Сонце. Тому систему (5) не можна замінити ще простішою системою, ніж (7), а

саме, системою

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 \frac{d^2 \bar{r}_0(t)}{dt^2} = \\ = \frac{Gm_0 m_3}{|\bar{r}_3(t) - \bar{r}_0(t)|^3} (\bar{r}_3(t) - \bar{r}_0(t)), \\ m_3 \frac{d^2 \bar{r}_3(t)}{dt^2} = \\ = \frac{Gm_3 m_0}{|\bar{r}_0(t) - \bar{r}_3(t)|^3} (\bar{r}_0(t) - \bar{r}_3(t)). \end{array} \right. \quad (8)$$

Зазначимо, що дослідження системи (8) – це дослідження задачі двох тіл.

Із наведеного випливає, що навіть у випадку класичних моделей Сонячної системи, що є простішими реальних систем, дослідження таких моделей не є тривіальним.

3. Принцип запізнювання гравітаційного поля. У теорії Ньютона швидкість гравітації дорівнює нескінченності і гравітаційне поле поширюється миттєво від джерела, як би далеко від нього не знаходиться. З іншого боку теорія відносності Ейнштейна постулює, що швидкість гравітації має бути рівною швидкості світла. Розглянуті в п. 2 моделі руху системи матеріальних точок побудовані з використанням припущення, що дія однієї точки на іншу здійснюється з нескінченною швидкістю. Це є недоліком розглянутих моделей та математичних моделей, що досліджуються в класичній небесній механіці. Насправді, швидкість гравітації є скінченною. Копейкін С. М. і Фомалонт Е. показали, що швидкість гравітації збігається зі швидкістю світла [13]. Використання цієї властивості гравітації дає змогу суттєво покращити математичну модель руху системи матеріальних точок та математичну модель Сонячної системи.

Далі з'ясуємо вплив скінченної швидкості гравітації на вигляд математичних моделей, розглянутих у п. 2.

Щоб не ускладнювати викладення матеріалу, обмежимося розглядом системи двох матеріальних точок M_i і M_j з масами m_i і m_j , рух яких описується радіусами-векторами $\bar{r}_i(t)$ і $\bar{r}_j(t)$ відповідно (ми вважаємо, що $\bar{r}_j(t) \neq \bar{r}_i(t)$). Ці точки рухаються зі швид-

костями

$$\bar{v}_i(t) = \frac{d\bar{r}_i(t)}{dt} \quad \text{і} \quad \bar{v}_j(t) = \frac{d\bar{r}_j(t)}{dt}.$$

Нагадаємо, що використовується нерухома система координат із початком координат у точці O . Наведемо систему рівнянь, що описує рух точок M_i і M_j і враховує швидкість гравітації. Спочатку з'ясуємо, яка сила діє на точку M_i в момент часу t , вважаючи, що на точки M_i і M_j не діють інші сили, крім сили, з якою притягуються точки. Ця сила не збігається із силою

$$\bar{F}_{ji}(t) = \frac{Gm_i m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)) \quad (9)$$

як у теорії Ньютона, а збігається із силою

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ji}(t) &= \\ &= \frac{Gm_i m_j}{|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)), \end{aligned} \quad (10)$$

що враховує швидкість гравітації. Запізнення гравітації $\tau_{ji}(t)$ в (10) визначається за допомогою співвідношення

$$c\tau_{ji}(t) = |\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|, \quad (11)$$

де c – швидкість гравітації. Справді (див. рис. 1),

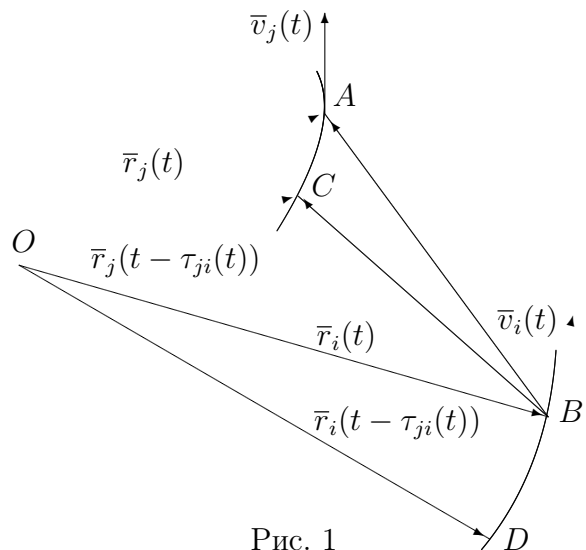


Рис. 1

Нехай точки M_j і M_i рухаються по відповідним траєкторіям, частини яких зображені на рис. 1, і в момент часу $t - \tau_{ji}(t)$, де $\tau_{ji}(t)$

задовольняє (11), знаходяться в точках C і D відповідно. За проміжок часу $[t - \tau_{ji}(t), t]$ точка M_j переміститься з точки C в точку A , а точка M_i – з точки D в точку B . Цього проміжку часу достатньо, щоб гравітаційне поле зі швидкістю c поширилося із точки C в точку B . Отже, в момент часу t на точку B діє не сила (9), а сила (10).

За допомогою аналогічних міркувань приходимо до висновку, що точка M_i притягує точку M_j із силою

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ij\tau}(t) &= \\ &= \frac{Gm_j m_i}{|\bar{r}_i(t - \tau_{ij}(t)) - \bar{r}_j(t)|^3} (\bar{r}_i(t - \tau_{ij}(t)) - \bar{r}_j(t)), \end{aligned}$$

де запізнення $\tau_{ij}(t)$ задовольняє співвідношення

$$c\tau_{ij}(t) = |\bar{r}_i(t - \tau_{ij}(t)) - \bar{r}_j(t)|, \quad (12)$$

аналогічне (11).

Ураховуючи знайдені сили, що діють на точки M_i і M_j в момент часу t , отримуємо на підставі другого закону Ньютона систему рівнянь, що описує рух цих точок. Ця система має вигляд

$$\left\{ \begin{aligned} m_i \frac{d^2 \bar{r}_i(t)}{dt^2} &= \\ &= \frac{Gm_i m_j}{|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|^3} \times \\ &\times (\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)), \\ m_j \frac{d^2 \bar{r}_j(t)}{dt^2} &= \\ &= \frac{Gm_j m_i}{|\bar{r}_i(t - \tau_{ij}(t)) - \bar{r}_j(t)|^3} \times \\ &\times (\bar{r}_i(t - \tau_{ij}(t)) - \bar{r}_j(t)). \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Очевидно, що в рівняннях системи (13) можна зробити скорочення на відмінні від 0 маси m_i і m_j відповідно.

Побудову системи (13) можна було б вважати завершеною, якби було обґрунтовано існування функцій $\tau_{ji}(t)$ і $\tau_{ij}(t)$, для яких виконуються співвідношення (11) і (12). Ця прогалина легко усувається за допомогою наступних нескладних міркувань.

Зафіксуємо довільний момент часу t і розглянемо випадок, коли для швидкостей

$\bar{v}_i(t)$ і $\bar{v}_j(t)$ руху точок M_i і M_j виконується співвідношення

$$\max\{|\bar{v}_i(s)|, |\bar{v}_j(s)|\} \leq v_0$$

для всіх моментів часу s із відрізка $[t - T, t]$ (тут v_0 і T – додатні скалярні величини, причому v_0 значно менше c) і

$$cT > v_0 T + |\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|. \quad (14)$$

Тоді для неперервної на відріжку $[0, T]$ функції

$$g(\tau) = c\tau - |\bar{r}_j(t - \tau) - \bar{r}_i(t)| \quad (15)$$

з урахуванням (14) виконуються співвідношення

$$g(0) < 0$$

і

$$\begin{aligned} g(T) &= cT - |\bar{r}_j(t - T) - \bar{r}_i(t)| \geq \\ &\geq cT - |\bar{r}_j(t - T) - \bar{r}_j(t)| - |\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)| \geq \\ &\geq cT - v_0 T - |\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)| > 0. \end{aligned}$$

Тому на підставі теореми Больцано-Коші [26] (с. 168) існує така точка $\tau^* \in (0, T)$, що

$$g(\tau^*) = 0,$$

тобто

$$c\tau^* = |\bar{r}_j(t - \tau^*) - \bar{r}_i(t)|.$$

Така точка на проміжку $(0, T)$ єдина, оскільки завдяки (15) на цьому проміжку

$$\begin{aligned} \frac{g(\tau)}{d\tau} &= c + \frac{(\bar{v}_j(t - \tau), \bar{r}_j(t - \tau) - \bar{r}_i(t))}{2|\bar{r}_j(t - \tau) - \bar{r}_i(t)|} \geq \\ &\geq c - \frac{|\bar{v}_j(t - \tau)|}{2} \geq c - \frac{v_0}{2} > 0. \end{aligned}$$

Очевидно, що τ^* залежить від t .

Отже, існування функції $\tau_{ji}(t)$ обґрунтовано.

Аналогічно обґрунтовується існування функції $\tau_{ij}(t)$.

Зазначимо, що завдяки теоремам про неявну функцію [26] (с. 449–453), застосовним до (11) і (12), функції $\tau_{ji}(t)$ і $\tau_{ij}(t)$ є диференційовними і, отже, неперервними.

Принцип запізнювання гравітаційного поля полягає в тому, що в момент часу t точка M_i (точка B) притягується не до точки M_j (точки A), а до точки C , що

збігається з M_j в момент часу $t - \tau_{ji}(t)$, де $\tau_{ji}(t)$ задовольняє (11). Сила, що діє на точку M_i , визначається формулою (10).

4. Модель Сонячної системи, що враховує швидкість гравітації. У подальшому будемо враховувати скінченну швидкість гравітації.

Завдяки розглянутому в п. 3 принципу запізнення гравітаційного поля рух системи матеріальних точок M_0, M_1, \dots, M_n з масами m_0, m_1, \dots, m_n по відношенню до інерціальної системи координат з початком координат у точці O описуватися наступною системою диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 \bar{r}_i(t)}{dt^2} = \\ = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|^3} \times \\ \times (\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)) + \bar{F}_i(t), \\ i = \overline{0, n}, \end{cases} \quad (16)$$

де функція $\tau_{ji}(t)$ задовольняє рівність (11), а $\bar{F}_i(t)$ – сила, що й у системі (4). Тут $\frac{G m_i m_j}{|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t))$ – сила тяжіння, зумовлена дією (притягуванням) точки M_i точкою M_j (на підставі закону всесвітнього тяжіння й урахування запізнення $\tau_{ji}(t)$ гравітації).

Теорія диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом викладена в [1]–[11].

Система (16), очевидно, описує рух точок M_0, M_1, \dots, M_n краще, ніж система (4), оскільки враховує швидкість гравітації.

Для описання руху матеріальних точок M_0, M_1, \dots, M_n також потрібно використувати для системи (16) додаткові умови, що є складнішими, ніж аналогічні умови (2) і (3) у випадку системи (1).

Розглянемо дві задачі, використовуючи функції

$$\tau_j(t) = \max_{i=\overline{0, n}, i \neq j} \tau_{ji}(t), \quad j = \overline{0, n}.$$

Задача 1. Зафіксуємо довільні момент часу t_0 і неперервні на відрізках $[t_0 -$

$\tau_i(t_0), t_0]$, $i = \overline{0, n}$, векторні функції $\bar{\varphi}_{0,i}(s)$ і $\bar{\varphi}_{1,i}(s)$, $i = \overline{0, n}$, відповідно. Потрібно знайти розв'язки $\bar{r}_i(t)$, $i = \overline{0, n}$, системи (16), що задовольняють початкові умови

$$\begin{cases} \bar{r}_i(s) = \bar{\varphi}_{0,i}(s), \\ \frac{d\bar{r}_i(s)}{ds} = \bar{\varphi}_{1,i}(s), \\ s \in [t_0 - \tau_i(t_0), t_0], \\ i = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (17)$$

Задача 2. Нехай t_1 і t_2 – довільні моменти часу, для яких $t_1 < t_2 - \tau_{ji}(t_2)$, для всіх $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n}$ і $i \neq j$. Розглянемо двічі неперервно диференційовні на відрізках $[t_1 - \tau_i(t_1), t_1]$ і $[t_2 - \tau_i(t_2), t_2]$, $i = \overline{0, n}$, векторні функції $\bar{\psi}_{1,i}(s)$ і $\bar{\psi}_{2,i}(s)$, $i = \overline{0, n}$, відповідно. Потрібно знайти розв'язки $\bar{r}_i(t)$, $i = \overline{0, n}$, системи (16), що задовольняють умови

$$\begin{cases} \bar{r}_i(s_1) = \bar{\psi}_{1,i}(s_1), \quad s_1 \in [t_1 - \tau_i(t_1), t_1], \\ \bar{r}_i(s_2) = \bar{\psi}_{2,i}(s_2), \quad s_2 \in [t_2 - \tau_i(t_2), t_2], \\ i = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (18)$$

При $n = 9$ систему (16) разом з умовами (17) або (18) можна розглядати як математичну модель Сонячної системи, що враховує швидкість гравітації.

Задачі знаходження розв'язків системи (16), що задовольняють умови (17) або (18), можна використовувати, наприклад, при виведенні на орбіти планет Сонячної системи штучних об'єктів або при визначенні орбіт небесних тіл Сонячної системи (наприклад, астероїдів) за даними їх позиційних спостережень.

Очевидно, що досліджувати систему (16) з умовами (17) або (18) важче, ніж систему (4) з умовами (2) або (3). Не зважаючи на це, завдяки наявності в системі (16) відхилень аргументу, причиною яких є запізнення гравітації, можна отримати нові властивості руху матеріальних точок цієї системи.

5. Оцінки для $\tau_{ji}(t)$ в (16). У системі рівнянь (16) залежні від часу t відхилення аргументу $\tau_{ji}(t)$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n}$, $i \neq j$, при $n = 9$ можуть набувати досить великих значень. Згідно з (11) і (12) відхилення $\tau_{ji}(t)$ залежить як від відстані між точками M_i і M_j , так і від швидкостей руху цих точок.

Наведемо нижні та верхні оцінки для $\tau_{01}(t), \tau_{02}(t), \dots, \tau_{09}(t)$, що відповідають планетам Сонячної системи, урахувавши дані таблиці I.

Завдяки принципу запізнення гравітаційного поля, (11) та еліптичності траєкторій планет Сонячної системи для $\tau_{0i}(t)$, $i = \overline{1, 9}$, виконуються співвідношення

$$(1 - e_i)a_i - v\tau_{0i}(t) \leq \tau_{0i}(t)c \leq (1 + e_i)a_i + v\tau_{0i}(t), \quad i = \overline{1, 9},$$

де v – швидкість руху Сонця, a_i і e_i – велика піввісь і ексцентриситет i -тої планети (точки M_i) відповідно (згідно з таблицею I). Звідси отримуємо, що для $i = \overline{1, 9}$

$$\frac{(1 - e_i)a_i}{c + v} \leq \tau_{0i}(t) \leq \frac{(1 + e_i)a_i}{c - v}.$$

На підставі цих нерівностей, даних таблиці I, а також того, що Сонце рухається навколо ядра Галактики зі швидкістю близько $v = 21700$ м/сек, $c = 299792458$ м/сек і астрономічна одиниця а.о. = 1495977870691 м, отримуємо оцінки для $\tau_{0i}(t)$, $i = \overline{1, 9}$ (див. таблицю II).

Таблиця II

Планета	Оцінки для $\tau_{0i}(t)$, в сек
Меркурій	$153, 32 < \tau_{01}(t) < 232, 92$
Венера	$358, 22 < \tau_{02}(t) < 363, 34$
Земля	$490, 48 < \tau_{03}(t) < 507, 34$
Марс	$689, 7 < \tau_{04}(t) < 831, 27$
Юпітер	$2471, 51 < \tau_{05}(t) < 2721, 15$
Сатурн	$4493, 12 < \tau_{06}(t) < 5026, 94$
Уран	$9125, 17 < \tau_{07}(t) < 10026, 7$
Нептун	$14868, 95 < \tau_{08}(t) < 15141, 22$
Плутон	$14730, 27 < \tau_{09}(t) < 24711, 79$

Аналогічні оцінки для $\tau_{ji}(t)$, $i, j = \overline{1, 9}$, $i \neq j$, можна було б навести й у випадку, коли $i \neq 0$. Зазначимо, що, наприклад,

$$\max_t \tau_{09}(t) < \max_t \tau_{39}(t).$$

Тут $\tau_{39}(t)$ – запізнення, з яким гравітаційне поле Плутона приходить до Землі в момент часу t .

Із таблиці II видно, що запізнення $\tau_{ji}(t)$, $i, j = \overline{0, 9}$, $i \neq j$, у системі (16) при $n = 9$ є достатньо великими. Знехтувати цими запізненнями (тобто замінити систему (16) системою (4)) при дослідженні динаміки Сонячної системи на великих проміжках часу не можна. Цей висновок впливає з властивостей розв’язків звичайних диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом та зв’язку між ними.

6. Можливі застосування побудованої моделі руху матеріальних точок. Звернемо увагу лише на деякі можливі застосування математичної моделі руху матеріальних точок, що враховує швидкість гравітації.

1. Цю модель можна використовувати для дослідження руху планет. Система диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом (16) точніше описує динаміку Сонячної системи, ніж система звичайних диференціальних рівнянь (4), що не враховує скінченну швидкість гравітації. При кількісному описуванні руху планет не обійтись без потужної обчислювальної техніки. При цьому потрібно разом із системою (16) та умовами (17) або (18) використовувати співвідношення (11) і (12) для знаходження $\tau_{ji}(t)$ і $\tau_{ij}(t)$. Потрібно також звертати увагу на точність даних про розміщення планет та їх швидкостей не в якийсь конкретний момент часу (як у класичній небесній механіці), а на проміжках часу (див. умови (17) і (18)), довжини яких можуть бути достатньо великими (наприклад, для Землі та Плутона згідно з таблицею II довжини цих проміжків дорівнюють близько 8, 32 хв. і 328, 68 хв. відповідно).

Побудовані математичні моделі з післядією дадуть змогу точніше описувати рух комет та передбачати такі явища як затемнення планет, парад планет і таке інше.

2. Наведені в п. 3–5 дослідження є важливими для спостережень за рухом астероїдів та передбачень про траєкторії їх руху, оскільки зіткнення астероїдів із планетами призводять до небажаних наслідків.

3. Побудовані системи рівнянь із післядією полегшать розв'язання проблем переміщення штучних об'єктів у межах Сонячної системи, оскільки дадуть змогу будувати точніші математичні моделі їх руху.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мышкис, А. Д.* (1951). Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.–Л.: Гостехиздат.
2. *Мышкис, А. Д., Эльсгольц, Л. Э.* (1967). Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом: УМН, 22(2), 21–57.
3. *Мышкис, А. Д.* (1977). О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом: УМН, 32(2), 173–202.
4. *Пинни, Э.* (1961). Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М: ИЛ.
5. *Беллман, Р., Кук, К. Л.* (1967). Дифференциально-разностные уравнения. М: Мир.
6. *Рубаник, В. П.* (1971). Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука.
7. *Эльсгольц, Л. Э., Норкин, С. Б.* (1971). Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука.
8. *Хейл, Дж.* (1984). Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1984.
9. *Царьков, Е. Ф.* (1986). Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне.
10. *Азбелев, Н. В., Максимов, В. П., Рахматуллина, Л. Ф.* (1991). Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука.
11. *Слюсарчук, В. Ю.* (2003). Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування.
12. *Fomalont, E. B., Koreikin, S. V.* (2003). The measurement of the light deflection from Jupiter: experimental results: Astrophys Journal, 598, 704–711.
13. *Копейкин, С. М., Фомалонт, Э.* (2004). Фундаментальный предел скорости гравитации и его измерение: Земля и Вселенная, 3.
14. *Мультон, Ф.* (1935). Введение в небесную механику. М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР.
15. *Пуанкаре, А.* (1965). Лекции по небесной механике. М.: Наука.
16. *Шази, Ж.* (2011). Теория относительности и небесная механика. Т. 1. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований.
17. *Дубошин, Г. Н.* (1978). Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука.
18. *Арнольд, В. И.* (1963). Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике: УМН, 18(6), 91–192.
19. *Брумберг, В. А.* (1972). Релятивистская небесная механика. М.: Наука.
20. *Маркеев, А. П.* (1978). Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука.
21. *Арнольд, В. И., Козлов, В. В., Нейштатт, А. Н.* (2002). Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС.
22. *Зелдович, Я. Б., Новиков, И. Д.* (1971). Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука.
23. *Рябушко, А. П.* (1979). Движение тел в общей теории относительности. Минск: Вышэйшая школа.
24. *Koreikin, S., Efroimsky, M., Kaplan, G.* (2011). Relativistic Celestial Mechanics of the Solar System. Wiley.
25. *Цесевич, В. П.* (1984). Что и как наблюдать на небе. М.: Наука.
26. *Фихтенгольц, Г. М.* (1966). Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. I. М.: Наука.