УДК 517.53

©2018 р. Н.Б. Сокульська, В.С. Хорощак, А.Я. Христіянин

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Львівський національний університет імені Івана Франка

РІВНІСТЬ КАРЛЕМАНА ДЛЯ МУЛЬТИПЛІКАТИВНО ПЕРІОДИЧНОЇ МЕРОМОРФНОЇ ФУНКЦІЇ В ПРОКОЛЕНОМУ ЗАМИКАННІ ВЕРХНЬОЇ ПІВПЛОЩИНИ

Доведено рівність Карлемана для мультиплікативно періодичних мероморфних функцій в проколеному замиканні верхньої півплощини.

Ключові слова: розподіл значень мероморфних функцій, мультиплікативно періодична мероморфна функція, рівність Карлемана.

Carleman formula for multiplicatively periodic meromorphic functions in the punctured closure of the upper half-plane is proved.

Key words: distribution of value of meromorphic functions, multiplicatively periodic meromorphic function, Carleman formula.

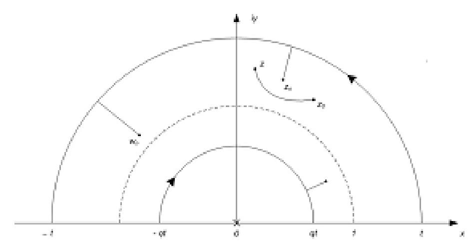
Рівність Карлемана [1] для мероморфних функцій є достатньо відомою в теорії розподілу значень мероморфних функцій і має настільки багато застосувань, що їй присвячені цілі монографії [2]. Різновиди формул такого типу для різноманітних областей отримувалися в різний час різними авторами.

Теорія мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ була розроблена О. Раузенбергером [3]. Ж. Валірон назвав такі функції локсодромними, адже у випадку недійсного q точки, у яких така функція приймає одне і те ж значення, лежать на логарифмічних спіралях. Образи цих спіралей на сфері Рімана перетинають кожен меридіан під одним і тим же кутом і називаються локсодромними кривими ($\lambda o\xi o\zeta$ - кривий, $\delta\rho o\mu o\zeta$ - шлях). В log-полярних координатах це прямі лінії. Теорія таких функцій тісно пов'язана з теорією еліптичних функцій: за допомогою локсодромних функцій спрощується побудова еліптичних. Зважаючи на можливість різноманітного застосування таких об'єктів, постало питання вивчення різних класів мультиплікативно періодичних відображень довільних однорідних просторів.

Зокрема, одна з останніх робіт в цьому напрямку присвячена вивченню властивостей мультиплікативно періодичних мероморфних функцій в проколеному замиканні верхньої півплощини [4].

В нашій роботі ми доводимо рівність типу Карлемана (формулу Карлемана) для таких функцій.

Нехай $\mathcal{H} = \{z : Im\ z > 0\}$ і $\mathcal{H}^* = \overline{\mathcal{H}}\backslash\{0\}$. Зафіксуємо q: $0 < q < 1$. Позначимо $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \le t\},\ t > 0$. Зауважимо, що $\bigcup\limits_{t>0}$



Мал. 1 Півкільце $\mathcal{A}_t$

Означення 1. *Функція f називається мероморфною в $\mathcal{H}^*$, якщо вона мероморфна в замиканні кожного півкільця $\mathcal{A}_t$, $t > 0$.*

Означення 2. *Мероморфна в $\mathcal{H}^*$ функція f називається мультиплікативно періодичною з мультиплікатором q, $0 < q < 1$, якщо для всіх $z \in \mathcal{H}^*$ виконується рівність*

$$f(qz) = f(z). \tag{1}$$

Клас таких функцій позначимо через $\mathcal{M}_q$.

Нехай f – мультиплікативно періодична мероморфна функція в $\mathcal{H}^*$. Припустимо, що f не має ані нулів, ані полюсів на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Нехай $z_0\in\mathcal{H}^*$, $f(z_0)\neq 0,\infty$, і $\log f(z)$ визначений співвідношенням

$$\log f(z)=\log f(z_0)+\int\limits_{z_0}^{z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta,$$

Наступна теорема є основним результатом даної роботи.

Теорема. *Нехай $f\in\mathcal{M}_q$, $f\neq const$ і $f(z)\neq 0,\infty$ на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Нехай $a\in\mathbb{C}$, $z_n=r_ne^{i\alpha_n}$ – a-точки функції f, а $w_n=\rho_ne^{i\beta_n}$ – полюси f в $\mathcal{A}_t=\{z\in\overline{\mathcal{H}}: qt<|z|\leq t\}$.*

Тоді

$$\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<r_n\leq t}\left(\frac{q^kt^{k-1}}{{r_n}^k}-\frac{{r_n}^k}{t^{k+1}}\right)\sin k\alpha_n dt=$$

$$=\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<\rho_n\leq t}\left(\frac{q^kt^{k-1}}{{\rho_n}^k}-\frac{{\rho_n}^k}{t^{k+1}}\right)\sin k\beta_n dt$$

для всіх $r>0$ при кожному $k\in\mathbb{Z}$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо спочатку випадок $a=0$, тобто коли a-точки є нулями функції f.

Нехай z_n – нулі функції f у півкільці $\mathcal{A}_t$. Застосовуючи теорему про лишки до функцій $z^k\frac{f'(z)}{f(z)}$ та $z^{-k}\frac{f'(z)}{f(z)}$ у півкільці $\mathcal{A}_t$, отримуємо

$$\int\limits_{\partial\mathcal{A}_t}z^k\frac{f'(z)}{f(z)}dz=$$

$$=2\pi i\left(\sum_{qt<|z_n|\leq t}{z_n}^k-\sum_{qt<|z_n|\leq t}{w_n}^k\right),\qquad(2)$$

і

$$\int\limits_{\partial\mathcal{A}_t}\frac{1}{z^k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=$$

$$=2\pi i\left(\sum_{qt<|z_n|\leq t}\frac{1}{{z_n}^k}-\sum_{qt<|z_n|\leq t}\frac{1}{{w_n}^k}\right).\qquad(3)$$

Оскільки межа півкільця складається з чотирьох частин:

$$\partial\mathcal{A}_t=\Gamma^-_{qt}\cup\Gamma_t\cup[qt,t]\cup[-t,-qt],$$

де Γ_{qt},Γ_t – півкільця з радіусами qt,t відповідно і з центрами в початку координат, то рівності (4), (5) набудуть вигляду

$$\int\limits_{\Gamma_t}z^k\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{-t}^{-qt}z^k\frac{f'(z)}{f(z)}dz+$$

$$+\int\limits_{\Gamma^-_{qt}}z^k\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{qt}^{t}z^k\frac{f'(z)}{f(z)}dz=$$

$$=2\pi i\left(\sum_{qt<|z_n|\leq t}{z_n}^k-\sum_{qt<|z_n|\leq t}{w_n}^k\right),\qquad(4)$$

та

$$\int\limits_{\Gamma_t}\frac{1}{z^k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{-t}^{-qt}\frac{1}{z^k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+$$

$$+\int\limits_{\Gamma^-_{qt}}\frac{1}{z^k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{qt}^{t}\frac{1}{z^k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=$$

$$=2\pi i\left(\sum_{qt<|z_n|\leq t}\frac{1}{{z_n}^k}-\sum_{qt<|z_n|\leq t}\frac{1}{{w_n}^k}\right).\qquad(5)$$

Параметризуючи криві, що є шляхами інтегрування, використовуючи рівність (1) та властивість $f'(qz)=\dfrac{1}{q}f'(z)$, що виконується для функцій з класу $\mathcal{M}_q$, з рівностей (4), (5) отримаємо

$$\int\limits_{0}^{\pi}it^{k+1}e^{i(k+1)\varphi}\frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}d\varphi-$$

$$-\int\limits_{0}^{\pi}it^{k+1}q^ke^{i(k+1)\varphi}\frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}d\varphi+$$

$$+\int\limits_{qt}^{t}z^k\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{-t}^{-qt}z^k\frac{f'(z)}{f(z)}dz=$$

$$= 2\pi i \left(\sum_{qt<|z_n|\le t} {z_n}^k - \sum_{qt<|z_n|\le t} {w_n}^k \right), \qquad (6)$$

та

$$i\int\limits_0^\pi \frac{1}{t^{k-1}e^{i(k-1)\varphi}}\frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}d\varphi-$$

$$-i\int\limits_0^\pi \frac{1}{q^k t^{k-1}e^{i(k-1)\varphi}}\frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}d\varphi+$$

$$+\int\limits_{qt}^{t} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\frac{d\tau}{\tau^k} + \int\limits_{-t}^{-qt} \frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{z^k} =$$

$$= 2\pi i \left(\sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{{z_n}^k} - \sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{{w_n}^k} \right)$$

відповідно.

Поділивши (6) на t^{k+1} та проінтегрувавши по t від qr до r, матимемо

$$2\pi i \int\limits_{qr}^{r} \left[\sum_{qt<|z_n|\le t} {z_n}^k - \sum_{qt<|w_n|\le t} {w_n}^k \right] \frac{dt}{t^{k+1}} =$$

$$= \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_{qt}^{t} z^k \frac{f'(z)}{f(z)}dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}} +$$

$$+ \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_{-t}^{-qt} z^k \frac{f'(z)}{f(z)}dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}} +$$

$$+ i(1-q^k) \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_0^\pi \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \right] dt.$$

Змінюючи порядок інтегрування за теоремою Фубіні, з останньої рівності отримуємо

$$2\pi i \int\limits_{qr}^{r} \left[\sum_{qt<|z_n|\le t} {z_n}^k - \sum_{qt<|w_n|\le t} {w_n}^k \right] \frac{dt}{t^{k+1}} =$$

$$= \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_{qt}^{t} z^k \frac{f'(z)}{f(z)}dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}} +$$

$$+ \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_{-t}^{-qt} z^k \frac{f'(z)}{f(z)}dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}} +$$

$$+ i(1-q^k) \int\limits_0^\pi e^{i(k+1)\varphi} \left[\int\limits_{qr}^{r} \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})} dt \right] d\varphi. \quad (7)$$

Позначимо

$$I_1 = \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_{qt}^{t} z^k \frac{f'(z)}{f(z)}dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}},$$

$$I_2 = \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_{-t}^{-qt} z^k \frac{f'(z)}{f(z)}dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}}. \qquad (8)$$

Застосовуючи означення (1) та позначення (8) до (7), отримаємо

$$2\pi i \int\limits_{qr}^{r} \left[\sum_{qt<|z_n|\le t} {z_n}^k - \sum_{qt<|w_n|\le t} {w_n}^k \right] \frac{dt}{t^{k+1}} =$$

$$= i(1-q^k) \int\limits_0^\pi \left[\log f(re^{i\varphi}) - \log f(qre^{i\varphi}) \right] e^{ik\varphi} d\varphi$$

$$+ I_1 + I_2. \qquad (9)$$

Аналогічними міркуваннями, застосованими до інтегралу $\int\limits_{\partial\mathcal{A}_t} \frac{1}{z^k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, показуємо, що виконується рівність

$$2\pi i q^k \int\limits_{qr}^{r} \left[\sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{{z_n}^k} - \sum_{qt<|w_n|\le t} \frac{1}{{w_n}^k} \right] t^{k-1} dt =$$

$$= i(q^k-1) \int\limits_0^\pi \left[\log f(re^{i\varphi}) - \log f(qre^{i\varphi}) \right] e^{-ik\varphi} d\varphi +$$

$$+ q^k I_3 + q^k I_4, \qquad (10)$$

де $I_3 = \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_{qt}^{t} \frac{1}{z^k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \right] t^{k-1} dt,$

$$I_4 = \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_{-t}^{-qt} \frac{1}{z^k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] t^{k-1} dt.$$

Додаючи співвідношення (9) та (10), отримуємо

$$2\pi i \int\limits_{qr}^{r} \left[\sum_{qt<|z_n|\le t} {z_n}^k - \sum_{qt<|w_n|\le t} {w_n}^k \right] \frac{dt}{t^{k+1}} +$$

$$+2\pi q^k i \int\limits_{qr}^{r} \left[\sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{{z_n}^k} - \sum_{qt<|w_n|\le t} \frac{1}{{w_n}^k} \right] t^{k-1} dt =$$

$$= 2(q^k - 1) \int\limits_{0}^{\pi} \left[\log f(re^{i\varphi}) - \log f(qre^{i\varphi}) \right] \sin k\varphi d\varphi +$$

$$+ I_1 + I_2 + q^k I_3 + q^k I_4. \qquad (11)$$

Оскільки $\log|f(re^{i\varphi})| - \log|f(qre^{i\varphi})| = 0$, то, взявши дійсні частини рівності (11), матимемо

$$2\pi \mathrm{Re} \left[i \int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<|z_n|\le t} {z_n}^k \frac{dt}{t^{k+1}} \right] -$$

$$-2\pi \mathrm{Re} \left[i \int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<|w_n|\le t} {w_n}^k \frac{dt}{t^{k+1}} \right] +$$

$$+2\pi \mathrm{Re} \left[iq^k \int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{{z_n}^k} t^{k-1} dt \right] -$$

$$-2\pi \mathrm{Re} \left[iq^k \int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<|w_n|\le t} \frac{1}{{w_n}^k} t^{k-1} dt \right] =$$

$$= \mathrm{Re} \left(I_1 + I_2 + q^k I_3 + q^k I_4 \right). \qquad (12)$$

Інтегруючи частинами у інтегралах I_1, I_2, I_3, I_4 та беручи дійсні частини, отримуємо наступні рівності

$$\mathrm{Re}\, I_1 = \int\limits_{qr}^{r} \frac{1}{t^{k+1}} (t^k \log|f(t)| - (qt)^k \log|f(qt)|) dt -$$

$$-k \int\limits_{qr}^{r} \frac{1}{t^{k+1}} \int\limits_{qt}^{t} z^{k-1} \log|f(z)| dz dt =$$

$$= (1 - q^k) \int\limits_{qr}^{r} \log|f(t)| \frac{dt}{t} +$$

$$+ \int\limits_{qr}^{r} \left(\int\limits_{qt}^{t} z^{k-1} \log|f(z)| dz \right) d\left(\frac{1}{t^k} \right).$$

В другому інтегралі останнього співвідношення застосуємо інтегрування частинами ще раз

$$(1 - q^k) \int\limits_{qr}^{r} \log|f(t)| \frac{dt}{t} +$$

$$+ \frac{1}{r^k} \int\limits_{qr}^{r} t^{k-1} \log|f(t)| dt -$$

$$- \frac{1}{(qr)^k} \int\limits_{q^2 r}^{qr} t^{k-1} \log|f(t)| dt -$$

$$- \int\limits_{qr}^{r} \frac{1}{t} \left[\log|f(t)| - q^k \log|f(qt)| \right] dt =$$

$$= \frac{1}{r^k} \int\limits_{qr}^{r} t^{k-1} \log|f(t)| dt -$$

$$- \frac{1}{(qr)^k} \int\limits_{q^2 r}^{qr} t^{k-1} \log|f(t)| dt.$$

Зробивши підстановку $r = q\tau$ в першому інтегралі, отримаємо $\mathrm{Re}\, I_1 = 0$. Аналогічним чином доводиться, що $\mathrm{Re}\, I_2 = 0$.

Знайдемо дійсну частину третього інтеграла,

$$\mathrm{Re}\, I_3 = \int\limits_{qr}^{r} t^{k-1} (k \int\limits_{qt}^{t} \frac{1}{z^{k+1}} \log|f(z)| dz) dt +$$

$$+ \int\limits_{qr}^{r} t^{k-1} \left[\frac{1}{t^k} \log|f(t)| - \frac{1}{(qt)^k} \log|f(qt)| \right] dt$$

Розкривши дужки, отримаємо, як і в попередньому випадку, два інтеграли. Проінтегрувавши частинами в першому та об'єднавши доданки в другому, отимаємо рівність

$$\left(1-\frac{1}{q^k}\right)\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|\frac{dt}{t}+$$

$$+r^k\int\limits_{qr}^{r}\frac{1}{t^{k+1}}\log|f(t)|dt-$$

$$-(rq)^k\int\limits_{q^2r}^{qr}\frac{1}{t^{k+1}}\log|f(t)|dt-$$

$$-\int\limits_{qr}^{r}(t^k\frac{\log|f(t)|}{t^{k+1}}-q\frac{\log|f(qt)|}{(qt)^{k+1}})dt=$$

$$=\left(1-\frac{1}{q^k}\right)\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|\frac{dt}{t}-$$

$$-\left(1-\frac{1}{q^k}\right)\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|\frac{dt}{t}+$$

$$+r^k\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|\frac{dt}{t^{k+1}}-(qr)^k\int\limits_{q^2r}^{qr}\log|f(t)|\frac{dt}{t^{k+1}}=0.$$

Зробивши, як і раніше, підстановку $r=q\tau$ в першому інтегралі, отримаємо $\operatorname{Re} I_3=0$. Схожим чином доводиться, що $\operatorname{Re} I_4=0$.

Зі співвідношення (12) отримуємо

$$2\pi\mathrm{Re}\left[i\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<|z_n|\le t}{z_n}^k\frac{dt}{t^{k+1}}\right]-$$

$$-2\pi\mathrm{Re}\left[i\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<|w_n|\le t}{w_n}^k\frac{dt}{t^{k+1}}\right]+$$

$$+2\pi\mathrm{Re}\left[iq^k\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<|z_n|\le t}\frac{1}{{z_n}^k}t^{k-1}dt\right]-$$

$$-2\pi\mathrm{Re}\left[iq^k\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<|w_n|\le t}\frac{1}{{w_n}^k}t^{k-1}dt\right]=0. \quad (13)$$

З урахуванням позначень $z_n=r_ne^{i\alpha_n}$ та $w_n=\rho_ne^{i\beta_n}$, результатом обчислення дійсної частини рівності (13) буде

$$\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<r_n\le t}\left(\frac{q^kt^{k-1}}{{r_n}^k}-\frac{{r_n}^k}{t^{k+1}}\right)\sin k\alpha_n dt-$$

$$-\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<\rho_n\le t}\left(\frac{q^kt^{k-1}}{{\rho_n}^k}-\frac{{\rho_n}^k}{t^{k+1}}\right)\sin k\beta_n dt=0.$$

Це доводить теорему у випадку $a=0$. Загальний випадок отримується застосуванням доведеного до функції $f(z)-a$. $\square$

Як наслідок, у випадку голоморфної функції f отримуємо наступний результат.

Наслідок. *Нехай функція f є голоморфною і мультиплікативно періодичною з мультиплікатором q, $0<q<1$, у $\mathcal{H}^*$, $f\ne const$ і $f(z)\ne 0,\infty$ на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Нехай, крім того, точки $z_n=r_ne^{i\alpha_n}$ є a-точками функції f, $a\in\mathbb{C}$. Тоді для всіх $r>0$ та кожного $k\in\mathbb{Z}$, справедливе співвідношення*

$$\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<r_n\le t}\left(\frac{q^kt^{k-1}}{{r_n}^k}-\frac{{r_n}^k}{t^{k+1}}\right)\sin k\alpha_n dt=0.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* (1970). Распределение значений мероморфных функций. Москва: Наука

2. *Айзенберг Л. А.* (1990). Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука.

3. *Rausenberger O.* (1884). Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variabeln. Leipzig: Druck und Ferlag von B.G.Teubner.

4. *Khoroshchak V. S., Sokulska N. B.* (2014) Multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane. Matematychni Studii, 42 (2), 143–148.