УДК 517.9

©2018 р. В.О. Чечетенко, О.С. Чуйко, С.М. Чуйко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ

МЕТОД НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА У ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Знайдено конструктивні умови існування розв'язку нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі. Для знаходження розв'язку нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі на основі модифікації метода Ньютона-Канторовича побудовано ітераційну схему із квадратичною збіжністю. Задля обгрунтування квадратичної збіжності модифікованого методу Ньютона-Канторовича у випадку недовизначеної системи запропоновано оригінальні умови збіжності.

Structural conditions for the existence of a nonlinear integral-differential boundary value problem are found. An iterative scheme with quadratic convergence is constructed to find the solution of a nonlinear integral-differential boundary value problem based on the modification of the Newton-Kantorovich method. In order to justify the quadratic convergence of the modified Newton-Kantorovich method in the case of an undefined system, the original conditions of convergence are proposed.

1. Постановка задачі. Досліджуємо задачу про побудову розв'язку [1, 2]

$$y(t) \in \mathbb{D}^2[a;b], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

нелінійної інтегрально-диференціальної системи

$$y'(t) = A(t)y(t)+\Phi(t) \int_a^b F(y(s), y'(s), s)\, ds+f(t), \tag{1}$$

підпорядкованого крайовій умові

$$\ell y(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^p. \tag{2}$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо в околі розв'язку

$$y_0(t) \in \mathbb{D}^2[a;b], \quad y_0'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

породжуючої нетерової $n \neq p$ крайової задачі

$$y_0'(t) = A(t)y_0(t) + f(t), \quad \ell y_0(\cdot) = \alpha. \tag{3}$$

Тут

$$A(t) \in \mathbb{L}^2_{n\times n}[a;b] := \mathbb{L}^2[a;b] \otimes \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\Phi(t) \in \mathbb{L}^2_{n\times m}[a;b],\ f(t) \in \mathbb{L}^2[a;b];$$

$\ell y(\cdot)\, :\ \mathbb{D}^2[a;b] \to \mathbb{R}^p$ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{D}^2[a;b]$ n-вимірних абсолютно неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Нелінійна вектор-функція $F(y(t), y'(t), t)$ двічі неперервно диференціовна в околі розв'язку $y_0(t)$ породжуючої крайової задачі (3) та його похідної $y_0'(t)$, а також неперервна за третім аргументом на відрізку $[a;b]$.

Поставлена задача продовжує дослідження лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі [2] на випадок нелінійної підінтегральної вектор-функції $F(y, y', t)$.

2. Модифікація метода Ньютона. Розглянемо задачу про побудову розв'язків нелінійного рівняння

$$\varphi(z) = 0. \tag{4}$$

Функцію

$$\varphi(z) :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad m \neq n$$

вважаємо двічі неперервно диференційовною по z у деякій області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Для знаходження розв'язку $\tilde z \in \mathbb{R}^n$ нелінійного рівняння (4) побудуємо модифікацію класичного методу Ньютона [3–5]. Припустимо, що знайдено наближення z_k, досить близьке до точного розв'язку $\tilde z \in \mathbb{R}^n$ рівняння (4). Розвинемо функцію $\varphi(z)$ в околі точного розв'язку

$$\varphi(\tilde{z}) = \varphi(z_k) + \varphi'(z_k, \varepsilon)(\tilde{z} - z_k) + R(\xi_k,\, \tilde{z} - z_k), \tag{5}$$

де

$$R(\xi_k,\, \tilde{z} - z_k) := \int_0^1 (1 - s)\, d^2\varphi(\xi_k\, ;\tilde{z} - z_k)\, ds;$$

тут ξ_k– точка, розташована між точками $\tilde{z}$ та z_k. У малому околі точного розв'язку має місце наближена рівність

$$\varphi(z_k) + \varphi'(z_k)(\tilde{z} - z_k) \approx 0,$$

тому для знаходження наступного наближення z_{k+1} до точного розв'язку природно покласти

$$\varphi(z_k) + \varphi'(z_k)(z_{k+1} - z_k) = 0, \tag{6}$$

звідки, за умови

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := \varphi'(z_k) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \tag{7}$$

знаходимо

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+\, \varphi(z_k). \tag{8}$$

Тут $P_{J_k^*}:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(J_k^*)$ — ортопроектор матриці $J_k^* \in \mathbb{R}^{n\times m}$, J_k^+ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) матриця [1]. Зазначимо, що умова (7) рівнозначна вимозі повноти рангу матриці J_k і виконується лише у випадку $m \le n$. Ітераційна схема (8) збігається до точного розв'язку $\tilde{z}$. Дійсно, припустимо, що в околі точного розв'язку $\tilde{z}$ мають місце нерівності

$$||J_k^+|| \le \sigma_1(k), \quad k \in \mathbb{N}$$

та

$$||d^2\varphi(\xi_k\, ;\tilde{z} - z_k)|| \le \sigma_2(k)\cdot ||\tilde{z} - z_k||^2.$$

Із рівностей (5) и (6) випливає, що

$$\varphi'(z_k, \varepsilon)(\tilde{z} - z_k) = -R(\xi_k,\, \tilde{z} - z_k),$$

отже

$$||\tilde{z} - z_{k+1}|| \le \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2}\cdot ||\tilde{z} - z_k||^2.$$

Припустимо, що існує константа

$$\theta := \sup_{k\in N}\left\{\frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2}\right\}.$$

За цієї умови має місце оцінка

$$|\tilde{z} - z_{k+1}| \le \theta\cdot|\tilde{z} - z_k|^2,$$

яка свідчить, що у випадку збіжності ітераційної схеми (8) до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (4), ця збіжність — квадратична. Знайдемо умову збіжності ітераційної схеми (8) до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (4); для цього зробимо наступні оцінки

$$|\tilde{z} - z_1| \le \theta\cdot|\tilde{z} - z_0|^2, \quad |\tilde{z} - z_2| \le \theta^{1+2}\cdot|\tilde{z} - z_0|^{2^2},$$

$$|\tilde{z} - z_3| \le \theta\cdot|\tilde{z} - z_2|^2 \le \theta^{1+2+2^2}\cdot|\tilde{z} - z_0|^{2^3},\ \ldots. ,$$

$$|\tilde{z} - z_k| \le \theta^{1+2+2^2+\ \ldots\ +2^{k-1}}\cdot|\tilde{z} - z_0|^{2^k},\ \ldots .$$

Таким чином, має місце нерівність [5]

$$|\tilde{z} - z_k| \le \theta^{\frac{2^k-1}{2-1}}\cdot|\tilde{z} - z_0|^{2^k} = \frac{1}{\theta}\cdot(\theta\cdot|\tilde{z} - z_0|)^{2^k},$$

яка свідчить про збіжність ітераційної схеми (8) до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (4) за умови

$$\theta\cdot|\tilde{z} - z_0| < 1. \tag{9}$$

На практиці останню нерівність можна замінити наступною:

$$\theta\cdot|z_k - z_0| < 1.$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Лема. *Припустимо, що для рівняння (4) виконуються наступні умови*

1. *Нелінійна вектор-функція $\varphi(z):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, двічі неперервно диференційовна по z в області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, в околі точки z_0 має корінь z^*.*

2. *В околі нульового наближення $z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ мають місце нерівності*

$$||J_k^+|| \le \sigma_1(k), ||d^2\varphi(\xi_k\, ;\tilde{z} - z_k)|| \le \sigma_2(k)\cdot||\tilde{z} - z_k||.$$

3. *Існує константа*

$$\theta := \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2}\right\}.$$

Тоді за умов (7) та (9) для знаходження розв'язку z^* рівняння (4) застосовна ітераційна схема (8), при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (4) квадратична.

Доведена лема узагальнює відповідні результати [4, 5] на випадок виродженої, або прямокутної матриці J_k і стане в нагоді у теорії нелінійних нетерових крайових задач [1, 6, 7].

3. Знаходження розв'язку інтегрально-диференціальної крайової задачі. Позначимо $X(t)$ нормальну ($X(a) = I_n$) фундаментальну матрицю однорідної частини породжуючої системи (3). Як відомо [1], у критичному випадку

$$P_{Q^*} \neq 0, \quad Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

породжуюча крайова задача (3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\Big\} = 0; \qquad (10)$$

при цьому r-параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (3)

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[f(s); \alpha](t) := X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\Big\} + \\ + K[f(s)](t).$$

Тут

$$K\Big[f(s)\Big](t) := X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)\,ds$$

— оператор Гріна задачі Коші $y_0(a) = c$ для породжуючої системи (3), $X_r(t)$ — $(n \times r)$ – вимірна матриця, утворена з r-лінійно-незалежних стовпців нормальної фундаментальної матриці $X(t)$; матриця $P_{Q_d^*} \in \mathbb{R}^{d\times p}$, утворена з d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{N}(Q^*).$$

У критичному випадку розв'язок крайової задачі (1), (1) шукаємо у вигляді

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t).$$

Для знаходження відхилення

$$x(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad x'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t, c_r)$ отримуємо крайову задачу

$$x'(t) = A(t)x(t) + \Phi(t)\int_a^b F(y(s), y'(s), s)\,ds, \qquad (11)$$

$$\ell x(\cdot) = 0. \qquad (12)$$

Відхилення

$$x(t) = X(t)v + \Psi(t)u$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t, c_r)$ визначають невідомі сталі

$$u := \int_a^b F(y(s), y'(s), s)\,ds \in \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^m$$

та матриця

$$\Psi(t) := K[\Phi(s)](t) \in \mathbb{D}^2_{n\times m}[a; b].$$

Шуканий розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u$$

інтегрально-диференціальної системи (1) задовольняє крайову умову (2) за умови

$$Q\,v + R\,u = 0, \quad R := \ell\,\Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{p\times m}. \qquad (13)$$

Позначимо $P_\rho \in \mathbb{R}^{(m+n)\times \rho}$ матрицю, утворену з ρ лінійно-незалежних стовпців ортопроектора P_0 матриці

$$[\,Q;\, R\,] \in \mathbb{R}^{p\times(m+n)}.$$

Умову (13) задовольняють вектори

$$v = P_1\,c_\rho, \quad u = P_2\,c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho;$$

тут

$$P_0 := \operatorname{col}\,(\,P_1,\, P_2\,), \quad P_1 \in \mathbb{R}^{n\times\rho}, \quad P_2 \in \mathbb{R}^{m\times\rho}.$$

Для знаходження вектора c_ρ, необхідного для визначення невідомих $u(c_\rho)$ та $v(c_\rho)$ отримуємо нелінійне рівняння (4); тут

$$\varphi(c_\rho) := \varphi(u(c_\rho), v(c_\rho)) := u(c_\rho) -$$

$$-\int_a^b F(X(s)v+\Psi(s)u, A(s)X(s)v+\Phi(s)u, s)\, ds.$$

Якщо для отриманого рівняння (4) справджуються умови попередньої леми, знаходимо невідомі $u(c_\rho)$ та $v(c_\rho)$. Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема. *У критичному випадку* ($P_{Q^*} \neq 0$) *породжуюча крайова задача (3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова (10); при цьому* r*-параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (3) має вигляд*

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u,$$

$$v = P_1\, c_\rho, \quad u = P_2\, c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) визначає вектор c_ρ*, який задовольняє нелінійне рівняння (4):* $\varphi(c_\rho) = 0$*, умови розв'язності якого визначає попередня лема. Для знаходження вектора* c_ρ *застосовна ітераційна схема (8), при цьому швидкість збіжності послідовності наближень до розв'язку рівняння (4) квадратична.*

У частинному випадку рівняння (4) — лінійне:

$$\varphi(c_\rho) := \mathcal{B}\, c_\rho + d, \quad \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times\rho},$$

умова розв'язності якого рівнозначна вимозі

$$P_{\mathcal{B}^*} = 0. \tag{14}$$

Тут $P_{\mathcal{B}^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(\mathcal{B}^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}^*$. За умови (14) розв'язок лінійного рівняння (4) має вигляд

$$c_\rho = P_J\, c_\mu - J^+ d, \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\rho;$$

тут $P_J : \mathbb{R}^\rho \to \mathbb{N}(J)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}$.

Приклад 1. *Вимогам доведеної теореми задовольняє задача про побудову* 2π*-періодичних розв'язків нелінійної інтегрально-диференціальної системи*

$$y' = A(t)y + \Phi(t)\int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s)\, ds + f(t); \tag{15}$$

тут

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos^3 t & 0 \\ \cos^3 t & 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$F(y(t), y'(t), t) := y(t)(1 - y^*(t)y'(t))\cos t.$$

Для породжуючої періодичної крайової задачі у разі системи (15)

$$P_Q = P_{Q^*} = I_2 \neq 0,$$

тому має місце критичний випадок, причому виконується умова розв'язності (10), при цьому двопараметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s)](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^2$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[f(s)](t) = \begin{pmatrix} \sin t + \sin 3t \\ \cos t - \cos 3t \end{pmatrix}$$

та нормальної фундаментальної матриці однорідної частини породжуючої системи (15)

$$X(t) = X_r(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$Q = 0, \quad R = -\frac{3\pi}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

отримуємо матриці

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Періодичний розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u,$$

$$v = P_1\, c_\rho, \quad u = P_2\, c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^3$$

нелінійної інтегрально-диференціальної системи (15) визначає вектор c_ρ, який задовольняє лінійне рівняння (4):

$$\varphi(c_\rho) := \mathcal{B}\, c_\rho + d;$$

тут

$$\mathcal{B} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8\pi & 0 & \pi \\ -\pi & 8 & -8\pi \end{pmatrix},$$

крім того

$$d(c_r) = \frac{\pi}{32} \begin{pmatrix} 1 - 32\, c_1 + 4\, c_2 \\ -4\,(2 + c_1 + 8\, c_2) \end{pmatrix}, \; c_r := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Останнє рівняння розв'язне у наслідок повноти рангу матриці $\mathcal{B}$. Покладемо $c_\mu := 0$. Шуканий 2π-періодичний розв'язок нелінійної інтегрально-диференціальної системи (15) має вигляд

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix};$$

тут

$$y_1(t) = \frac{3\;862\;708\, \cos t}{1\;383\;908\;045} + \frac{124\;805\, c_1 \cos t}{89\;428\;786} + \\ + \frac{12\;394\;757\, c_2 \cos t}{1\;110\;179\;952} + \frac{12\;053\;843 \sin t}{539\;822\;396} + \\ + \frac{12\;394\;757\, c_1 \sin t}{1\;110\;179\;952} + \frac{11\;712\;929\, c_2 \sin t}{131\;138\;704} + \frac{\sin 3t}{4},$$

$$y_2(t) = \frac{12\;053\;843 \cos t}{539\;822\;396} + \frac{12\;394\;757\, c_1 \cos t}{1\;110\;179\;952} + \\ + \frac{11\;712\;929\, c_2 \cos t}{131\;138\;704} - \frac{\cos 3t}{4} - \frac{3\;862\;708 \sin t}{1\;383\;908\;045} - \\ - \frac{124\;805\, c_1 \sin t}{89\;428\;786} - \frac{12\;394\;757\, c_2 \sin t}{1\;110\;179\;952}.$$

У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) крайова задача (1), (2) розв'язна для будь-яких неоднорідностей $f(t)$ та α.

Наслідок. *У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) r-параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (3) має вигляд*

$$y_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u,$$

$$v = P_1\, c_\rho, \quad u = P_2\, c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) визначає вектор c_ρ, який задовольняє нелінійне рівняння (4): $\varphi(c_\rho) = 0$, умови розв'язності якого визначає попередня лема. Для знаходження вектора c_ρ застосовна ітераційна схема (8), при цьому швидкість збіжності послідовності наближень до розв'язку рівняння (4) квадратична.

Приклад 2. *Вимогам доведеного наслідку задовольняє задача про побудову 2π-періодичних розв'язків скалярної інтегрально-диференціальної системи*

$$y' = y + \Phi(t) \int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s)\, ds + f(t); \tag{16}$$

тут

$$f(t) := \sin t, \quad \Phi(t) := \cos t,$$

крім того

$$F(y(t), y'(t), t) := (1 - y^2(t)) \left(1 - y'^2(t)\right).$$

Для породжуючої крайової задачі у разі системи (16) має місце некритичний випадок, при цьому єдиний розв'язок породжуючої задачі

$$y_0(t) = G[f(s)](t)$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[f(s)](t) = -\frac{\sin t + \cos t}{2}.$$

Періодичний розв'язок

$$y(t) = y_0(t) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u,$$

$$u = -2\, v, \quad v \in \mathbb{R}^1$$

нелінійної інтегрально-диференціальної системи (16) визначає константа v, яка задовольняє нелінійне рівняння (4):

$$\varphi(v) = -2v - \frac{17\,\pi}{16} + \frac{7\, v^2 \pi}{2} - \pi v^4.$$

Для знаходження константи v застосовна ітераційна схема (8), дійсно: за умови

$$v_0 := -\frac{1}{2}$$

отримуємо

$$J_0 = -2 - 3\pi \neq 0, \quad v_1 = -\frac{7\,\pi}{8 + 12\,\pi},$$

при цьому

$$J_1 = \\ = -\frac{256 + 1152\pi + 2512\pi^2 + 3216\pi^3 + 1421\pi^4}{16\,(2 + 3\pi)^3},$$

$$\sigma_1(1) \approx 0,0\;894\;281,$$

крім того

$$\varphi(v_1) \approx 0,0894\;281.$$

Аналогічно

$$\sigma_2(1) \approx 13,2612, \quad \theta_1 \approx 0,285\;343 < 1,$$

отже умову збіжності ітераційної схеми (8) до точного розв'язку рівняння (4) на першому кроці виконано. На другому кроці ітераційної схеми (8) отримуємо

$$v_2 = \frac{\pi}{w}(\,4352 + 26\;112\,\pi + \\ +69\;728\,\pi^2 + 91\;680\,\pi^3 + 39\;525\,\pi^4),$$

при цьому

$$J_2 \approx -11,1795 \neq 0, \quad \sigma_1(2) \approx 0,0894\;495.$$

крім того

$$\varphi(v_2) \approx 2,70\;456 \times 10^{-7}.$$

Тут

$$w := 16(2 + 3\,\pi)(256 + 1152\,\pi + 2512\,\pi^2 + \\ +3216\,\pi^3 + 1421\pi^4).$$

Аналогічно

$$\sigma_2(2) \approx 13,2685, \quad \theta_2 \approx 0,285\;449 < 1,$$

отже умову збіжності ітераційної схеми (8) до точного розв'язку рівняння (4) на першому кроці виконано. На третьому кроці ітераційної схеми (8) отримуємо

$$v_3 \approx -\frac{149\;078\;559}{309\;925\;526},$$

при цьому

$$\sigma_1(3) \approx 0,0894\;496, \quad \sigma_2(3) \approx 13,2685.$$

Оскільки

$$\theta_3 \approx 0,285\;449 < 1,$$

умову збіжності ітераційної схеми (8) до точного розв'язку рівняння (4) на третьому кроці виконано; крім того

$$\varphi(v_3) \approx 3,99\;680 \times 10^{-15}.$$

Таким чином, отримано наближення до періодичного розв'язку

$$y(t) \approx -\frac{160\;106\;464\cos t}{163\;205\;053} - \frac{20\;751\;201\sin t}{1\;092\;981\;631}$$

інтегрально-диференціальної системи (16). Для оцінки точності знайденого наближення до періодичного розв'язку інтегрально-диференціальної системи (16) визначимо нев'язку

$$\left|\left|y' - y - \Phi(t)\int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s)\,ds - f(t)\right|\right|_{C[0;2\pi]} \approx \\ \approx 3,44\;169 \times 10^{-15}.$$

Крім того, відзначимо періодичність отриманого наближення.

У випадку нерозв'язності нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) її можна регуляризовати аналогічно [13–15]. Зазначимо також, що запропонована у статті схема дослідження нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) може бути перенесена на інтегрально-диференціальної крайової задачі з запізненням [1, 16, 17].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV – 317 pp.
2. *Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, №11. – С. 1576 — 1579.

3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. — Киев.: Наук. думка, 1969. — 248 с.
4. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука. — 1977. — 744 с.
5. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. — М.: Мир. — 1988. — 440 с.
6. *Chuiko S.M.* Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — **38 (2)**. – P. 236 — 244.
7. *Chuiko S.* Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes. — 2016. — **17**, №1. — P. 139 — 150.
8. *Boichuk A.A., Holovats'ka I.A.* Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. – **203**. — №3, P. 306 — 321.
9. *Чуйко С.М.* О разрешимости матричной краевой задачи // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2017. — **132**. – С. 140 – 144.
10. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.
11. *Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — **53**. — №6. — P. 777 — 788.
12. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). — 2015. — **210**, №1. — P. 9 — 21.
13. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, – 1986. – 288 с.
14. *Чуйко С.М., Чуйко О.В.* Регуляризація періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу // Буковинский математичний журнал. — **1**. № 3 — 4, 2013. С. 158 — 161.
15. *Chuiko S.M.* On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — **220**, №5. — P. 591 — 602.
16. *Бігун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. — 2007. —- **59**, № 4. – С. 435 — 446.
17. *Chuiko S.M., Chuiko A.S.* On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — **14**. — 2012. № 3. P. 445 — 460.