УДК 517.956

©2018 р. Б.О. Яшан

Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, м. Чернівці

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Для лінійного параболічного рівняння досліджено задачу Діріхле з імпульсною дією за часовою змінною. Коефіцієнти рівняння мають степеневі особливості довільного порядку за часовою і просторовими змінними на деякій множині точок. Знайдено умови існування і єдиності розв'язку поставленої задачі в гельдерових просторах із степеневою вагою.

Ключові слова: крайова задача, імпульсна дія, параболічне рівняння, розв'язок задачі, інтерполяційні нерівності, оцінка розв'язку.

The Dirichlet problem with a pulse effect on a time variable for a linear parabolic equation is investigated. The coefficients of the equation have power characteristics of arbitrary order in time and space variables on a certain set of points. Conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem in Hölder spaces with power weight are found.

Keywords: the boundary value problem, pulse effect, parabolic equation, solution of the problem, interpolation inequalities, estimation of the solution.

В сучасних прикладних і теоретичних дослідженнях часто зустрічаються задачі з різними особливостями та виродженнями. Задачі для рівнянь з частинними похідними, коефіцієнти яких мають особливості, виникають в квантовій механіці, фізиці, техніці, теорії ядерних ланцюгових реакцій тощо.

Всебічне вивчення розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією наведено в монографіях [1,2,3]. Вивченню якісних властивостей розв'язків крайових задач для рівнянь з виродженням присвячено монографії [6,7]. Класичним розв'язкам крайових задач з імпульсною дією для параболічних рівнянь, коефіцієнти яких мають степеневі особливості за просторовими змінними, присвячені праці [8,9].Дослідженню нелокальних багатоточкових за часом крайових задач та задач з інтегральними умовами для параболічних рівнянь зі степеневим виродженням у коефіцієнтах рівняння присвячено праці [10,11].

У цій статті розглядається задача Діріхле для лінійного параболічного рівняння другого порядку із степеневими ососбливостями в коефіцієнтах рівняння за будь - якими змінними на деякій множині точок та імпульсними умовами за часовою змінною у визначені моменти часу. У гельдерових просторах зі степеневою вагою одержано існування, єдиність та встановлено оцінки розв'язку поставленої задачі.

Нехай область D є обмеженою з простору R^n з межею ∂D,
$\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \leq n-1$. Розглянемо задачу знаходження
функції $u(x,t)$ в області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$, яка при $t \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{1,2,...,N\}$, $t \neq \eta$, $\eta \neq t_\lambda$ $x \in D \setminus \overline{\Omega}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\Big]u(t,x) = f(t,x), \quad (1)$$

умови за змінною t

$$u(t_0,x) = \varphi_0(x), \quad (2)$$

$$u(t_\lambda + 0, x) - u(t_\lambda - 0, x) = b_\lambda(x)u(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(x) \quad (3)$$

і крайову умову

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} [u(t,x) - g(t,x)] = 0 \quad (4)$$

де $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N < t_{N+1}$, $t_0 < \eta < t_{N+1}$.

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) і крайової умови (4) у точці $P(t,x) = Q \setminus Q_{(0)}$ будуть характеризувати функції $s_1(\beta_i^{(1)},t)$, $s_2(\beta_i^{(2)},x)$: $s_1(\beta_i^{(1)},t) = |t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\eta| \le 1$, $s_1(\beta_i^{(1)},t) = 1$ при $|t-\eta| \ge 1$; $s_2(\beta_i^{(2)},x) = \rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x) \le 1$, $s_2(\beta_i^{(2)},x) = 1$ при $\rho(x) \ge 1$, $\rho(x) = \inf\limits_{z\in\overline{\Omega}} |x-z|$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty,\infty)$, $\nu \in \{1,2\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)})$, $\beta = (\beta^{(1)},\beta^{(2)})$, $Q_{(0)} = \underline{\{}(t,x)|t=\eta, x\in D\} \cup \{(t,x)|t\in[t_0,t_{N+1}), x \in \overline{\Omega}\}$.

Позначимо через $Q^{(k)} = [t_k,t_{k+1}) \times D$, $\Gamma^{(k)} = [t_k,t_{k+1}) \times \partial D$ $k \in \{0,1,\ldots N\}$, числа l, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\mu_j^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$ – дійсні числа, $q^{(\nu)} \ge 0$, $\gamma^{(\nu)} \ge 0$, $l \ge 0$, $\mu_j^{(\nu)} \ge 0$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\} = l-[l]$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $R_i(t^{(2)},x^{(2)})$ – довільні точки із $Q^{(k)}$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_i^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)}\ldots,x_n^{(1)})$.

Означимо простори в яких вивчається задача (1) – (4). Позначимо через $H^l(\gamma;\beta;q;Q)$ - множину функцій u, які мають неперервні похідні в $Q^{(k)}\backslash Q^{(0)}$ при $t \ne t_\lambda$ вигляду $\partial_t^s\partial_x^r$, $2s+|r| \le [l]$, для яких скінченна норма

$$||u;\gamma;\beta;0;Q||_0 = \sup_k\{\sup_{\overline{Q}^{(k)}} |u|\} \equiv ||u;Q||_0,$$

$$||u;\gamma;\beta;q;Q||_l =$$

$$= \sup_k \Big\{ \sum_{2s+|r|\le[l]} ||u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}||_{2s+|r|} +$$

$$+\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\rangle_l \Big\} \equiv$$

$$\equiv \sup_k \Big\{ \sum_{2s+|r|\le[l]} \sup_{P\in\overline{Q}^{(k)}} [s_1(q^{(1)}+$$

$$+(2s+|r|)\gamma^{(1)},t)\times$$

$$\times s_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},x)|\partial_t^s\partial_x^r u(P)|\times$$

$$\times \prod_{i=1}^n s_1(-r_i\beta_i^{(1)},t)s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x)\Big\} +$$

$$+\sup_k \sum_{2s+|r|=[l]} \Big\{ \sum_{k=1}^n [\sup_{(P_2R_\nu)\subset\overline{Q}^{(k)}}$$

$$[s_1(q^{(1)}+[l]\gamma^{(1)},t^{(2)})s_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},\widetilde{x})\times$$

$$\times \prod_{i=1}^n s_1(-r_i\beta_i^{(1)},t^{(2)})s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\widetilde{x})\times$$

$$\times|\partial_t^s\partial_x^r u(P_2) - \partial_t^s\partial_x^r u(R_\nu)||x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\{l\}}\times$$

$$\times s_1(\{l\}\beta_\nu^{(1)},t^{(2)})s_2(\{l\}(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\widetilde{x})]+$$

$$+ \sup_{(P_1P_2)\subset\overline{Q}^{(k)}} [s_1(q^{(1)}+l\gamma^{(1)},\widetilde{t})\times$$

$$\times s_2(q^{(2)}+(2s+\{l\})\gamma^{(2)},x^{(1)})\times$$

$$\times \prod_{i=1}^n s_1(-r_i\beta_i^{(1)},\widetilde{t})s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(1)})\times$$

$$\times|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2}\}}|\partial_t^s\partial_x^r u(P_1) - \partial_t^s\partial_x^r u(P_2)|\ ]\Big\},$$

де $|r| = r_1 + \cdots + r_n$, $s_1(q,\widetilde{t}) = \min(s_1(q,t^{(1)}),s_1(q,t^{(2)}))$, $s_2(q,\widetilde{x}) = \min(s_2(q,x^{(1)}),s_2(q,x^{(2)}))$.

Задачу (1) – (4) досліджуємо за таких умов:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $\forall(t,x) \in Q\backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{i=1}^n s_1(\beta_i^{(1)},t)s_1(\beta_j^{(1)},t)\times$$

$$\times s_2(\beta_i^{(2)},x)s_2(\beta_j^{(2)},x)A_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2,$$

π_1,π_2 – фіксовані додатні сталі та $s_1(\mu_i^{(1)},t)s_2(\mu_i^{(2)},x)A_i \in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $s_1(\mu_0^{(1)},t)s_2(\mu_0^{(2)},x)A_0 \in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $A_0 \ge -a$, $a > 0$, $s_1(\beta_i^{(1)},t)s_1(\beta_j^{(1)},t)\times$ $s_2(\beta_i^{(2)},x)s_2(\beta_j^{(2)},x)A_{ij} \in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $\Gamma = [t_0,t_{N+1}) \times \partial D$.

б) $f \in H^\alpha(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi_0 \in H^{2+\alpha}(\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;D)$, $\widetilde{\gamma} = (0,\gamma^{(2)})$, $\widetilde{\beta} = (0,\beta^{(2)})$, $\varphi_\lambda \in H^{2+\alpha}(\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q \cap (t=t_\lambda))$, $b_\lambda \in C^{2+\alpha}(Q \cap (t=t_\lambda))$, $g \in H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)})$, $g(t_\lambda+0,x) - g(t_\lambda-0,x) = b_\lambda(t_\lambda,x)g(t_\lambda-0,x) + \varphi_\lambda(t_\lambda-0,x)$ для $x \in \Gamma \cap (t=t_\lambda)$, $\gamma^{(\nu)} = \max\{\max\limits_i(1+\beta_i^{(\nu)}), \max\limits_i(\gamma^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\}$, $\nu \in \{1,2\}$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(4) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(4) *із простору* $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$||u;\gamma;\beta;0;Q||_{2+\alpha} \le c\Big\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}(1+$$
$$+\|b_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_0\times$$
$$\times(||\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})||_{2+\alpha}+$$
$$+||f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}||_\alpha+$$
$$+||g;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}||_{2+\alpha})+$$
$$+||\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)||_{2+\alpha}+$$
$$+||f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}||_\alpha+$$
$$+||g;\gamma;\beta;0;Q^{(N)}||_{2+\alpha}\Big\}. \qquad (5)$$

Для дослідження задачі (1)–(4) встановимо коректну розв'язність множини крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини
отриманих розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне
значення якої буде розв'язком задачі (1)–(4).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами

Нехай $Q_m^{(k)} = Q^{(k)} \cap \{(t,x) \in Q^{(k)} \mid s_1(1,t) \ge m_1^{-1}, s_2(1,x) \ge m_2^{-1}\}$, $m = (m_1,m_2)$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ – послідовності областей, які при $m_1 \longrightarrow \infty$, $m_2 \longrightarrow \infty$ збігаються до $Q^{(k)}$. Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій
$u_m(t,x)$, які при $t \ne t_\lambda$ задовольняють рівняння

$$(L_1u_m)(t,x) \equiv \Big(\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\Big)u_m = f_m(t,x), \quad (6)$$

умови за змінною t

$$u_m(t_0+0,x) = \varphi_m^{(0)}(x), \qquad (7)$$

$$u_m(t_\lambda+0,x) - u_m(t_\lambda-0,x) =$$
$$= b_\lambda(t_\lambda,x)u_m(t_\lambda-0,x) + \varphi_m^{(\lambda)}(t_\lambda,x) \qquad (8)$$

і крайову умову

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}[u_m(t,x) - g_m(t,x)] = 0 \qquad (9)$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, а також функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, g_m в областях $Q_m^{(k)}$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, f, φ_0, φ_λ, g, відповідно, а в областях $Q\backslash Q_m^{(k)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, і функцій f, φ_0, φ_λ, g, із областей $Q_m^{(k)}$ в області $Q\backslash Q_m^{(k)}$ із збереженням гладкості і норми *[12, стор. 82]*.

Для розв'язання задачі (6)–(9) правильною є така теорема.

Теорема 2. *Нехай в області* Q *виконані умови а), б) і* $u_m(t,x)$ *– класичний розв'язок задачі* (6)–(9). *Тоді для* $u_m(t,x)$ *правильною є така оцінка*

$$|u_m(t,x)| \le \sum_{k=1}^{N}\Big(\prod_{\lambda=k}^{N}(1+||b_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)||_0)\times$$
$$\times(||\varphi_m^{(k-1)};Q^{(k-1)}\cap(t=t_{k-1})||_0+$$
$$+||f_m a_0^{-1};Q^{(k-1)}||_0 + ||g_m;Q^{(k-1)}||_0)\Big)+$$
$$+||\varphi_m^{(N)};Q\cap(t=t_N)||_0+$$
$$+||f_m a_0^{-1};Q^{(N)}||_0 + ||g_m;Q^{(N)}||_0. \qquad (10)$$

Доведення. Нехай $\max\limits_{\overline{Q}^{(k)}} u_m(t,x) = u_m(M_1)$. Якщо $M_1 \in Q^{(k)}$, то в точці M_1 виконується співвідношення

$$\partial_t u_m(M_1) \ge 0,\ \partial_{x_i}u_m(M_1) = 0,$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(M_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(M_1) \le 0 \qquad (11)$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням (11) і рівняння (6) у точці M_1 справджується нерівність

$$u_m(M_1) \le \sup_{\overline{Q}^{(k)}}(fa_0^{-1}). \qquad (12)$$

Нехай $\min\limits_{\overline{Q}^{(k)}} u_m(t,x) = u_m(M_2)$. Якщо $M_2 \in Q^{(k)}$, то в точці M_2 виконується співвідношення

$$\partial_t u_m(M_2) \le 0,\ \partial_{x_i}u_m(M_2) = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(M_2)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(M_2) \geq 0 \qquad (13)$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням співвідношення (13) і рівняння (6) у точці M_2 маємо

$$u_m(M_2) \geq \inf_{\overline{Q}^{(k)}}(fa_0^{-1}). \qquad (14)$$

Якщо $M_1 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$ або $M_2 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$ та з умови (9) маємо

$$|u_m(M_1)| \leq \|g_m; Q^{(k)}\|. \qquad (15)$$

У випадку, коли $M_1 \in \overline{D}$ або $M_2 \in \overline{D}$, з умови (7) одержимо

$$|u_m| \leq \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \qquad (16)$$

Враховуючи нерівності (12),(14) – (16), при $k = 0$ одержимо

$$\|u_m; Q^{(0)}\| \leq ||f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}||_0 +$$
$$+ ||g_m; Q^{(0)}||_0 + ||\varphi_m^{(0)}; D||_0. \qquad (17)$$

Знайдемо оцінку розв'язку $u_m(t,x)$ в області $Q^{(1)}$. Повторюючи вищенаведені міркування і враховуючи умову (3), при $\lambda = 1$ матимемо

$$\|u_m; Q^{(1)}\|_0 \leq (1 + \|b_1; Q \cap (t = t_1)\|_0)\times$$
$$\times\|u_m; Q^{(0)}\| + \|\varphi_m^{(1)}; Q \cap (t = t_1)\|_0 +$$
$$+ \|f_m a_0^{-1}; Q^{(1)}\|_0 + \|g_m; Q^{(1)}\|_0 \leq$$
$$\leq (1 + \|b_1\|)(\|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|g_m; Q^{(0)}\|_0 +$$
$$+ \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0) + \|\varphi_m^{(1)}; Q \cap (t = t_1)\|_0 +$$
$$+ \|f_m a_0^{-1}; Q^{(1)}\|_0 + \|g_m; Q^{(1)}\|_0.$$

Продовжуючи аналогічні припущення, при $\lambda = 2$ в області $Q^{(2)}$ одержуємо нерівність

$$\|u_m; Q^{(2)}\|_0 \leq (1 + \|b_2; Q \cap (t = t_2)\|_0)\times$$
$$\times\|u_m; Q^{(1)}\| + \|\varphi_m^{(2)}; Q \cap (t = t_2)\|_0 +$$
$$+ \|f_m a_0^{-1}; Q^{(2)}\|_0 + \|g_m; Q^{(2)}\|_0 =$$
$$= (1 + \|b_2; Q \cap (t = t_2)\|_0)\times$$
$$\times(1 + \|b_1; Q \cap (t = t_1)\|_0) \times (\|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 +$$
$$+ \|g_m; Q^{(0)}\|_0 + \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0) +$$
$$+(1+\|b_2; Q\cap(t = t_2)\|)\times(\|\varphi_m^{(1)}; Q\cap(t = t_1)\|_0 +$$
$$+ \|f_m a_0^{-1}; Q^{(1)}\|_0 + \|g_m; Q^{(1)}\|_0) +$$
$$+ \|\varphi_m^{(2)}; Q \cap (t = t_2)\|_0 + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(2)}\|_0 +$$
$$+ \|g_m; Q^{(2)}\|_0.$$

Продовжуючи оцінювати розв'язок, при $\lambda = \{3, \ldots, N\}$ отримаємо нерівність (10).

Знайдемо оцінки похідних від розв'язків $u_m(t,x)$. У просторі $C^l(Q)$ введемо норму $||u_m; \gamma; \beta; q; Q||_l$, еквівалентну при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка виражається так само, як і $||u; \gamma; \beta; q; Q||_l$, тільки замість функцій $s_1(q^{(1)}, t)$, $s_2(q^{(2)}, x)$ покладемо відповідно $d_1(q^{(1)}, t)$, $d_2(q^{(2)}, x)$, де

$$d_1(q^{(1)}, t) = \begin{cases} \max(s_1(q^{(1)}, t), m_1^{-q^{(1)}}), \\ q^{(1)} \geq 0; \\ \min(s_1(q^{(1)}, t), m_1^{-q^{(1)}}), \\ q^{(1)} < 0 \end{cases}$$

$$d_2(q^{(2)}, x) = \begin{cases} \max(s_2(q^{(2)}, x), m_2^{-q^{(2)}}), \\ q^{(2)} \geq 0; \\ \min(s_2(q^{(2)}, x), m_2^{-q^{(2)}}), \\ q^{(2)} < 0. \end{cases}$$

Справедлива така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконані умови а), б), то для задачі* (6) – (9) *правильна оцінка*

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq$$
$$\leq c\Bigg\{ \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \prod_{\lambda=k}^{N} (1 + \|b_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))})\times$$
$$\times(\|\varphi_{k-1}; \widetilde{\gamma}; \widetilde{\beta}; 0; Q \cap (t = t_{k-1})\|_{2+\alpha} +$$
$$+ \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k-1)}\|_\alpha + \|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha})\Big\} +$$
$$+ \|\varphi_N; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_N)\|_{2+\alpha} +$$
$$+ \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\|_\alpha +$$
$$+ \|g; \gamma; \beta; 0; Q^{(N)}\|_{1+\alpha}\Bigg\}. \qquad (18)$$

Доведення. В задачі (6) – (9) в областях $Q^{(k)}$ зробимо заміну

$$u_m(t,x) = g_m(t,x) + v_m(t,x). \qquad (19)$$

Підставляючи (19) у (6) – (9), одержимо

$$(L_1 v_m)(t,x) = F_m(t,x), (t,x) \in Q^{(k)}, \quad (20)$$

$$v_m(t_k+0,x) = \Phi_m^{(k)}(t_k,x), \quad (21)$$
$$(t,x) \in Q \cap (t=t_k),$$

$$v_m|_{\Gamma^{(k)}} = 0, \quad (22)$$

де $F_m(t,x) = f_m(t,x) - (L_1 g_m)(t,x)$, $\Phi_m^{(0)}(t_0,x) = \varphi_m^{(0)}(x) - g_m(t_0+0,x)$ при $x \in D$,
$\Phi_m^{(k)}(t_k,x) = \varphi_m^{(k)}(t_k,x) - g(t_k+0,x) + (1+b_0)g(t_k-0,x)$, $k \in \{1,2,\ldots,N\}$, $\Gamma^{(k)} = [t_k,t_{k+1}] \times \partial D$.

Розв'язок крайової задачі (20) – (22) в областях $Q^{(k)}$ існує і єдиний у просторі $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$ [6, стор.364]. Знайдемо його оцінку. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [12], маємо

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \le (1+\varepsilon^\alpha)\times$$
$$\times\langle v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\rangle_{2+\alpha} + C(\varepsilon)\|v_m;Q^{(k)}\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число, $\varepsilon \in (0,1)$. Тому досить оцінити півнорму $\langle v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\rangle_{2+\alpha}$.

Із означення півнорми випливає існування в $Q^{(k)}$ точок P_1, P_2, R_i, для яких правильна одна із нерівностей

$$\frac{1}{2}\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \le E_\mu,\ \mu \in \{1,2\},$$

де

$$E_1 \equiv \sum_{2s+|r|=2} \Big\{ \sum_{\nu=1}^{n} d_1(2\gamma^{(1)},t^{(2)})\times$$
$$\times d_2(2s\gamma^{(2)},\widetilde{x}) \prod_{i=1}^{n} d_1(-r_i\beta_i^{(1)},t^{(2)})\times$$
$$\times d_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\widetilde{x})\times$$
$$\times|\partial_t^s\partial_x^r v_m(P_2) - \partial_t^s\partial_x^r v_m(R_\nu)||x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}|^{-\alpha}\times$$
$$\times d_1(\alpha\beta_\nu^{(1)},t^{(2)}) d_2(\alpha(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\widetilde{x}),$$

$$E_2 \equiv \sum_{2s+|r|=2} d_1((2+\alpha)\gamma^{(1)},\widetilde{t})\times$$
$$\times d_2((2s+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}) \prod_{i=1}^{n} d_1(-r_i\beta_i^{(1)},\widetilde{t})\times$$
$$\times d_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(1)})|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}}\times$$
$$\times|\partial_t^s\partial_x^r u(P_1) - \partial_t^s\partial_x^r u(P_2)|,\ 2s+|r|=2.$$

Якщо $|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}| \ge \frac{\varepsilon n^{-1}}{4} d_1(\gamma^{(1)},\widetilde{t})\times d_2(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)},\widetilde{x}) \equiv T_1$, ε_1 – довільне дійсне число із (0,1), то

$$E_1 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_2. \quad (23)$$

Якщо $|t^{(1)} - t^{(2)}| \ge \frac{\varepsilon_1^2}{16} d_1(2\gamma^{(1)},\widetilde{t})\times d_2(2\gamma^{(2)},\widetilde{x}) \equiv T_2$, то

$$E_2 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_2. \quad (24)$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (23), (24), знаходимо

$$E_\mu \le \varepsilon^\alpha\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}+$$
$$+c(\varepsilon)\|v_m;Q^{(k)}\|_0. \quad (25)$$

Нехай $|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}| \le T_1$ і $|t^{(1)} - t^{(2)}| \le T_2$. Будемо вважати $|x_\nu^{(1)} - \xi_\nu| \ge 4T_1$, $\xi \in \partial D$ і $d_2(\gamma^{(2)},\widetilde{x}) = \min(d_2(\gamma^{(2)},x^{(1)}), d_2(\gamma^{(2)},x^{(2)})) \equiv d_2(\gamma^{(2)},x^{(1)})$, $d_1(\gamma^{(2)},\widetilde{t}) = \min(d_1(\gamma^{(1)},t^{(1)}), d_1(\gamma^{(1)},t^{(2)})) = d_1(\gamma^{(1)},t^{(1)})$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)}) \in Q^{(k)}$, $k \in \{0,1,\ldots,N\}$.

В області $Q^{(k)}$ запишемо задачу (20) – (22) у вигляді

$$[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}]v_m =$$
$$= \sum_{ij=1}^{n}[a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\partial_{x_i}v_m - a_0(P)v_m +$$
$$+F_m(t,x) \equiv F_m^{(1)}(t,x,v_m^{(k)}) + F_m(t,x), \quad (26)$$

$$v_m(t_k+0,x) = \Phi_m^{(k)}(t_k,x), \quad (27)$$

$$v_m|_{\Gamma^{(k)}} = 0. \quad (28)$$

Нехай $\prod_\tau^{(k)}$ – область із $Q^{(k)}$, $\prod_\tau^{(k)} = \{(t,x) \in Q^{(k)}, ||x_\nu - x_\nu^{(1)}| \le \tau T_1, \nu \in \{1,\ldots,n\}, |t - t^{(1)}| \le \tau^2 T_2\}$. В задачі (26) – (28) зробимо заміну $v_m(t,x) = w_m(t,y)$, $x_\nu = d_1(\beta_\nu^{(1)},t^{(1)})$
$d_2(\beta_\nu^{(2)},x^{(1)})y_\nu$. Одержимо

$$(L_2 w_m)(t,y) \equiv \Big[\partial_t -$$

$$-\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})\times$$
$$\times d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)},x^{(1)})\times$$
$$\times\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Big]w_m = F_m^{(1)}(t,\widetilde{y};w_m)+F_m(t,\widetilde{y}) \quad (29)$$
$$w_m(t_k+0,\widetilde{y}) = \Phi_m^{(k)}(t_k,\widetilde{y}), \quad (30)$$
$$w_m|_{\Gamma^{(k)}} = 0, \quad (31)$$

де $\widetilde{y} = (d_1(-\beta_1^{(1)},t^{(1)})d_2(-\beta_1^{(2)},x^{(1)})x_1,$
$\ldots, d_1(-\beta_n^{(1)},t^{(1)})d_2(-\beta_n^{(2)},x^{(1)})x_n)$.

Позначимо через $y_\nu^{(1)} = d_1(-\beta_\nu^{(1)},t^{(1)})d_2(-\beta_\nu^{(2)},x^{(1)})x_\nu^{(1)}$, $V_\tau^{(k)} = \{(t,y),|t-t^{(1)}|\le\tau^2T_2,|y_\nu-y_\nu^{(1)}|\le\frac{\tau}{n}\sqrt{T_2}\}$ і візьмемо тричі диференційовану функцію $\psi(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\psi(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y)\in V_{1/2}^{(k)}, 0\le\eta(t,y)\le 1; \\ 0, & (t,y)\notin V_{3/4}^{(k)}, |\partial_t^s\partial_y^r\eta|\le \\ & \le c_{rs}d_1(-(2s+|r|)\gamma^{(1)},t^{(1)})\times \\ & \times d_2(-(2s+|r|)\gamma^{(2)},x^{(1)}). \end{cases}$$

Позначимо функцію $Z_m(t,y) = w_m(t,y)\psi(t,y)$, яка буде розв'язком крайової задачі

$$(L_2Z_m)(t,y) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})\times$$
$$\times d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)},x^{(1)})\times$$
$$\times[\partial_{y_i}w_m\partial_{y_j}\psi+\partial_{y_j}w_m\partial_{y_i}\psi+w_m\partial_{y_i}\partial_{y_j}\psi]-$$
$$-w_m\partial_t\psi+\psi[F_m^{(1)}(t,\widetilde{y},w_m)+F_m(t,\widetilde{y})]\equiv$$
$$\equiv F_m^{(2)}(t,\widetilde{y},w_m)+\psi F_m(t,\widetilde{y}), \quad (32)$$
$$Z_m(t_k+0,x) = \Phi_m^{(k)}(t_k,\widetilde{y})\psi(t_k,y), \quad (33)$$
$$Z_m\Big|_{\Gamma^{(k)}} = 0. \quad (34)$$

Враховуючи теорему 5.3 із [6, стор. 364], для розв'язку задачі (32) – (34) і довільних точок $(M_1,M_2)\subset V_{1/2}^{(k)}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)|\partial_t^s\partial_x^r w_m(M_1)-\partial_t^s\partial_x^r w_m(M_2)|\le$$
$$\le c\Big(\|F_m^{(2)}+\psi F_m\|_{C^\alpha(V_{3/4})}+$$
$$+\|\psi\Phi_m^{(k)}\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}\cap(t=t_k))}\Big), \quad (35)$$

$2s+|r|=2$, $d(M_1,M_2)$ – параболічна відстань між точками M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\psi(t,y)$, знаходимо

$$\|F_m^{(2)}+\psi F_m\|_{C^\alpha(V_{3/4}^{(k)})}\le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)})\times$$
$$\times d_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)})\times(\|w_m;V_{3/4}^{(k)}\|_0+$$
$$+\|w_m;\gamma;0;0;V_{3/4}^{(k)}\|_2+\|F_m^{(1)};\gamma;0;2\gamma;V_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$
$$+\|F_m;\gamma;0;2\gamma;V_{3/4}^{(k)}\|_\alpha), \quad (36)$$
$$\|\psi\Phi_m^{(k)}\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}\cap(t=t_k))}\le$$
$$\le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)})d_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)})\times$$
$$\times\|\Phi_m^{(k)};\gamma;0;V_{3/4}^{(k)}\|_{2+\alpha} \quad (37)$$

Із визначення простору $H^l(\gamma;\beta;q;Q)$ випливає виконання нерівностей

$$c_1\|w_m;\gamma;0;0;V_{3/4}^{(k)}\|_l\le\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_l\le$$
$$\le c_2\|w_m;\gamma;0;0;V_{3/4}^{(k)}\|_l.$$

Підставляючи (36), (37) у (35) і повертаючись до змінних (t,x), одержимо нерівність

$$E_\mu\le c_1(\|F_m^{(1)};\gamma;\beta;2\gamma;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$
$$+\|\Phi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;\Pi_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|v_m;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_0+\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$
$$+\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_\alpha). \quad (38)$$

За допомогою інтерполяційних нерівностей і оцінок норми кожного з доданків виразів $F_m^{(1)}$, $\Phi_m^{(k)}$ маємо

$$E_\mu\le(\varepsilon^\alpha(n+2)+\varepsilon_1Cn^2)\times$$
$$\times\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_{2+\alpha}+c_2(\|v_m;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_0+$$
$$+c_3(\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$
$$+\|\Phi_m^{(k)}\gamma;\beta;0;\Pi_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}) \quad (39)$$

Використовуючи нерівності (25), (39) і вибираючи ε_1, ε досить малими, одержимо оцінку

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}\le$$

$$\leq c\Bigg(\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(k)}\|_\alpha +$$

$$+\|\Phi_m^{(k)}\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}\Bigg). \quad (40)$$

Враховуючи значення виразу $F_m(t,x)$ і $\Phi_m^{(k)}(t_k,x)$, при $k=1,2,\ldots,N$ маємо

$$\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(k)}\|_\alpha \leq c(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha +$$
$$+\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}),$$
$$\|\Phi_m^{(0)}\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_0)\|_{2+\alpha} \leq$$
$$\leq \|\varphi_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha} + \|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(0)}\|_{2+\alpha},$$
$$\|\Phi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} \leq$$
$$\leq c(1+\|b_k;Q\cap(t=t_k)\|_0 \times$$
$$\times\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\|_{2+\alpha} +$$
$$+\|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} +$$
$$+\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}. \quad (41)$$

Оскільки

$$\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha \leq c\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha,$$
$$\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{1+\alpha} \leq c\|g;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{1+\alpha},$$
$$\|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} \leq$$
$$\leq c\|\varphi_k;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha},$$

то, враховуючи заміну (19), оцінку (10) і нерівності (40), (41) при $k=0,1,\ldots,N$ одержимо оцінку (18).

Доведення теореми 1. Права частина нерівності (18) не залежить від m. Крім того, послідовності $\{u_m^{(0)}\}\equiv\{u_m\}$, $\{u_m^{(1)}\}\equiv\{d_1(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},x)\partial_{x_i}u_m\}$, $\{u_m^{(2)}\}\equiv\{d_1(2\gamma^{(1)},t)d_2(2\gamma^{(2)},x)\partial_t u_m\}$, $\{u_m^{(3)}\}=\{d_1(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},x)d_1(\gamma^{(1)}-\beta_j^{(1)},t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_j^{(2)},x)$ $\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m\}$ рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в областях $Q^{(k)}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{u_{m(j)}^{(\mu)}\}$, рівномірно збіжні в $Q^{(k)}$ до $\{u_0^{(\mu)}\}$ при $m(j)\longrightarrow\infty$, $\mu\in\{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m(j)\longrightarrow\infty$ в задачі (6) – (9), одержимо, що $u(t,x)=u_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1) – (4), $u\in H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Samoilenko, A.M., Perestyuk, N.A. (1995). Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific.
2. Samoilenko, A.M., Perestyuk N.A. (1987). Differential equations with impulse influences. K.: High school.
3. Perestyuk, N.A., Plotnikov, V.A., Samoilenko, A.M., Skripnik N.V. (2007). Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. K.: Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine. (in Ukrainian)
4. Asanova, A.T. (2013). On a nonlocal boundary-value problem for system of impulsive hyperbolic equations: Ukrainian Mathematical Journal, 65 (3), 315–328. (in Ukrainian)
5. Bainov, D.D., Minchev, E., Myshkis, A. (1997). Periodic Boundary value problems for impulsive hyperbolic systems: Gommun. Appl. Anal., 1 (4), 1 – 14.
6. Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N. (1968). Linear and quasilinear equations of parabolic type. Transl. Math. Monogr., Vol. 23. - Providence, RI: AMS. xi+648 p.
7. Bitsadze, A. V. (1981). Some classes of equations in partial derivatives. Moscow: Science. (in Ukrainian)
8. I. D. Pukalskyi (2017). Boundary - value problems for parabolic equations with impulsive condition and degenerations: Journal of Mathematical Sciences. Vol. 223, N 1, 60–71.
9. Isaryuk, I.M., Pukalskyi, I.D. (2016). The boundary value problems with impulse conditions for parabolic equations with degenerations: Math. methods and physical-mechanical fields, 59 (3), 55–67. (in Ukrainian)
10. Isaryuk, Inna M., Pukalskyi, Ivan D. (2015). The boundary value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 207 (1), 26–38.
11. Pukalskyi, I.D., Isaryuk, I.M. (2015). Nonlocal parabolic boundary value problems with singularities: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 208 (3), 327–343.
12. Friedman, A. (1964). Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs: Prentice Hall.