

## ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Знайдено умови обмеженості розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі як функції часової змінної в околі точки  $t = 0$ .

Ключові слова: нелокальна багатоточкова за часом задача, узагальнені простори типу  $S$ , узагальнені функції.

The condition of the restriction of the solution of a nonlocal problem multipoint in time as a function of the time variable at the point  $t = 0$  is found.

Keywords: a nonlocal multipoint by time problem, generalized spaces of type  $S$ , generalized functions.

У праці [1] встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором Бесселя нескінченного порядку в класі початкових умов, який складається з узагальнених функцій нескінченного порядку. Розв'язок  $u(t, x)$  такої задачі дається у вигляді згортки фундаментального розв'язку з узагальненою початковою функцією, при цьому  $u(t, \cdot)$  є елементом основного простору при кожному  $t \in (0, T]$ . У той же час, як це впливає з властивостей фундаментального розв'язку, функція  $u(t, x)$ , як функція  $t$  при деяких значеннях аргумента  $x$ , є необмеженою функцією в околі точки  $t = 0$ :  $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) = +\infty$  (див.

приклад далі). Природньо постає задача: виділити клас  $X'$  узагальнених функцій (початкових функцій) та множини  $M \subset \mathbb{R}$  зміни аргумента  $x$  такі, що  $\sup_{t \in (0, T]} |u(t, x)| \leq c$ ,

$c = c(M) > 0$ . У даній роботі знайдено клас параболічних сингулярних рівнянь та клас фінітних узагальнених функцій, для яких поставлена задача має позитивне рішення.

**1. Простори типу  $S$  та  $S'$ .** І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилор в [2] запропонували метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}$  функцій, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності і які задаються за допомогою нерівностей  $|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{kn}$ ,  $\{k, n\} \subset$

$\mathbb{Z}_+$ , де  $\{c_{kn}\}$  – подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином, то маємо простір  $S \equiv S(\mathbb{R})$  Л. Шварца швидко спадних на  $\mathbb{R}$  функцій. Якщо  $c_{kn} = l_k m_n$ , то маємо простори, які називаються в [2] узагальненими просторами типу  $S$ . У випадку, коли  $l_k = k^{k\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $m_n = n^{n\beta}$ ,  $\beta > 0$ ; відповідні простори називаються просторами типу  $S$  і позначаються символами  $S_\alpha$ ,  $S^\beta$ ,  $S_\alpha^\beta$ . Означимо деякі з них.

Для довільних  $\alpha, \beta > 0$  покладемо

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \mid \exists c > 0 \exists A > 0 \exists B > 0$$

$$\forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta}\}.$$

Введені простори можна охарактеризувати так [2]. Простори  $S_\alpha^\beta$  нетривіальні при  $\alpha + \beta \geq 1$  і утворюють щільні в  $L_2(\mathbb{R})$  множини.  $S_\alpha^\beta$  складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}$  функцій, які задовольняють нерівності  $|\varphi^{(n)}(x)| \leq c B^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Простір  $S_\alpha^1$  складається з функцій  $\varphi$ , які допускають аналітичне продовження в деяку смугу  $|Im z| < \delta$ ,  $\delta > 0$ ,  $z = x + iy$ , залежну від  $\varphi$  і задовольняють нерівність  $|\varphi(x + iy)| \leq c \exp(-a|x|^{1/\alpha})$ ,  $c > 0$ ,  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Якщо  $0 < \beta < 1$  і  $\alpha \geq \beta$ , то  $S_\alpha^\beta$  складається з тих і лише тих функцій  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,

які аналітично продовжуються в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\},$$

$c, a, b > 0$ .

Топологічна структура в просторі  $S_\alpha^\beta$  визначається так. Символом  $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ ,  $A, B > 0$  позначимо сукупність функцій  $\varphi \in S_\alpha^\beta$ , які задовольняють умову:

$$\forall \delta > 0 \forall \rho > 0 \exists c_{\delta\rho} > 0 : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta},$$

$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}},$$

$\{\delta, \rho\} \subset \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ .

Якщо  $A_1 < A_2$ ,  $B_1 < B_2$ , то  $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$  неперервно вкладається в  $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$  і  $S_\alpha^\beta = \bigcup_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ .

Із результатів, наведених в [2] випливає, що послідовність  $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_\alpha^\beta$  збігається до нуля в цьому просторі, якщо функції  $\varphi_\nu$  та їхні похідні довільного порядку збігаються до нуля рівномірно на кожному відрізьку  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  і при цьому виконуються нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta}, \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими  $c, A, B > 0$  не залежними від  $\nu$ .

Функція  $g$  називається мультиплікатором в просторі  $S_\alpha^\beta$ , якщо  $g\psi \in S_\alpha^\beta$  для довільної функції  $\psi \in S_\alpha^\beta$  і відображення  $\psi \rightarrow g\psi$  є лінійним і неперервним оператором в  $S_\alpha^\beta$ . Мультиплікатором у просторі  $S_\alpha^\beta$  є кожна функція  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ , яка задовольняє умову  $\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall m \in \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R} :$

$$|g^{(m)}(x)| \leq c_\varepsilon \varepsilon^m m^{m\beta} \exp\{\varepsilon|x|^{1/\alpha}\}.$$

Зауважимо, що кожна функція з відповідного простору  $S_\alpha^\beta$  задовольняє вказану умову і тому в просторах  $S_\alpha^\beta$  операція множення

функцій є визначеною і неперервною. При  $\beta > 1$  простір  $S_\alpha^\beta$  містить фінітні функції.

Простори типу  $S$  є також досконалими [2], тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні.

Символом  $\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$  позначимо сукупність усіх парних функцій з простору  $S_\alpha^\beta$ . Оскільки  $\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$  утворює підпростір  $S_\alpha^\beta$ , то в  $\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$  природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором, а його елементи – основними функціями. У просторі  $\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$  визначені й неперервні оператори множення на  $x^2, \frac{d^2}{dx^2}, \frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ , а також оператор Бесселя  $B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x} \frac{d}{dx}$ ,  $\nu > -\frac{1}{2}$  – фіксований параметр.

Із результатів, отриманих в [3] випливає, що якщо парна нескінченно диференційовна на  $\mathbb{R}$  функція задовольняє умову

$$\exists c, A, B > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+ : |x^{2k} \varphi^{(2q)}(x)| \leq c A^k B^q k^{2k\alpha} q^{2q\beta} \quad (A)$$

(сталі  $c, A, B > 0$  залежать від функції  $\varphi$ ), то

$$\exists c_1, A_1, B_1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+ : |x^{2k} B_\nu^q \varphi(x)| \leq c_1 A_1^k B_1^q k^{2k\alpha} q^{2q\beta} \quad (B)$$

і навпаки. Отже, кожна функція  $\varphi \in \overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$  задовольняє умову (A) та умову (B).

Прикладом мультиплікатора у просторі  $\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$  може служити нормована функція Бесселя  $j_\nu$ ,  $\nu > -1/2$ , яка є розв'язком задачі Коші  $B_\nu u + \lambda u = 0$ ,  $u(0) = 1$ ,  $u'(0) = 0$ . У просторах  $\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$  визначені пряме та обернене перетворення Бесселя [3]

$$\psi(\sigma) = F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) = \int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\sigma \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(x) = F_{B_\nu}^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$$x \in \mathbb{R}, c_\nu = 2^{-2\nu} \Gamma^{-2}(\nu + 1),$$

при цьому має місце формула  $F_{B_\nu} \left[ \overset{\circ}{S}_\alpha^\beta \right] = \overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$  [3], оператор  $F_{B_\nu}$  є неперервним.

Символом  $T_x^\xi$  позначимо оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [4]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \omega}) \cdot \sin^{2\nu} \omega d\omega, \varphi \in \mathring{S}_\alpha^\beta,$$

$b_\nu = \Gamma(\nu + 1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu + 1/2))$ . Операція узагальненого зсуву  $\varphi \rightarrow T_x^\xi \varphi$  визначена і є диференційовною (навіть нескінченно диференційовною) в просторі  $\mathring{S}_\alpha^\beta$  у тому розумінні, що граничні співвідношення  $\frac{1}{\Delta\xi} [T_x^{\xi+\Delta\xi} \varphi - T_x^\xi \varphi] \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} T_x^\xi \varphi$ ,  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , справджуються в просторі  $\mathring{S}_\alpha^\beta$  [5].

Згортка двох функцій з простору  $\mathring{S}_\alpha^\beta$  визначається формулою

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi,$$

при цьому  $\varphi * \psi \in \mathring{S}_\alpha^\beta$ ,  $F_{B_\nu}[\varphi * \psi] = F_{B_\nu}[\varphi] \cdot F_{B_\nu}[\psi]$ ,  $\forall \{\varphi, \psi\} \subset \mathring{S}_\alpha^\beta$  (див. [5]).

Символом  $(\mathring{S}_\alpha^\beta)'$  позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на відповідному просторі основних функцій зі слабкою збіжністю. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції  $\varphi \in \mathring{S}_\alpha^\beta$  визначається формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(x) \varphi(x) x^{2\nu+1} dx.$$

Кожна локально інтегровна з вагою  $x^{2\nu+1}$  парна функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  породжує регулярну узагальнену функцію  $F_f \in (\mathring{S}_\alpha^\beta)'$ :  $\langle F_f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(x) \varphi(x) x^{2\nu+1} dx$ ,  $\forall \varphi \in \mathring{S}_\alpha^\beta$ .

Оскільки в просторі  $\mathring{S}_\alpha^\beta$  визначена операція узагальненого зсуву аргумента, то згортку узагальненої функції  $f \in (\mathring{S}_\alpha^\beta)'$  з основною

функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \rangle = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(\xi) \rangle, \varphi \in \mathring{S}_\alpha^\beta$$

(індекс  $\xi$  у  $f_\xi$  означає, що функціонал  $f$  діє на основну функцію  $T_x^\xi \varphi(\xi)$  як функцію аргумента  $\xi$ ).

Нехай  $f \in (\mathring{S}_\alpha^\beta)'$ . Якщо  $f * \varphi \in \mathring{S}_\alpha^\beta$ ,  $\forall \varphi \in \mathring{S}_\alpha^\beta$  і із співвідношення  $\varphi_\nu \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$  за топологією простору  $\mathring{S}_\alpha^\beta$  випливає, що  $f * \varphi_\nu \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$  за топологією простору  $\mathring{S}_\alpha^\beta$ , то функціонал  $f$  називається згортувачем у просторі  $\mathring{S}_\alpha^\beta$ . Символом  $(\mathring{S}_{\alpha,*}^\beta)'$  позначатимемо сукупність узагальнених функцій  $f \in (\mathring{S}_\alpha^\beta)'$ , які є згортувачами у просторі  $\mathring{S}_\alpha^\beta$ .

Перетворення Бесселя узагальненої функції  $f \in (\mathring{S}_\alpha^\beta)'$  визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_{B_\nu}[f], \varphi \rangle = \langle f, F_{B_\nu}[\varphi] \rangle, \forall \varphi \in \mathring{S}_\alpha^\beta.$$

Отже, перетворення Бесселя узагальненої функції  $f$ , заданої на  $\mathring{S}_\alpha^\beta$ , є узагальненою функцією на просторі  $\mathring{S}_\alpha^\beta$ . Якщо узагальнена функція  $f \in (\mathring{S}_\alpha^\beta)'$  – згортувач у просторі  $\mathring{S}_\alpha^\beta$ , то для довільної функції  $\varphi \in \mathring{S}_\alpha^\beta$  правильною є формула [5]:  $F_{B_\nu}[f * \varphi] = F_{B_\nu}[f] F_{B_\nu}[\varphi]$ , при цьому  $F_{B_\nu}[f]$  – мультиплікатор у просторі  $\mathring{S}_\alpha^\beta$ .

**2. Нелокальна за часом задача.** Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = (-1)^{b-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^b u(t, x),$$

$$(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

де  $b \in \mathbb{N}$ ,  $\nu \in \{3/2, 5/2, 7/2, \dots\}$  – фіксовані параметри. Для (1) поставимо задачу: знайти розв'язок  $u \in C^1((0, T], \mathring{S}_\alpha^\beta)$  рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} u(t, \cdot) = f,$$

$$f \in (\mathring{S}_{\alpha,*}^\beta)', \quad (2)$$

де  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, T]$ ,  $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$  – фіксовані числа, причому  $\mu > m \sum_{k=1}^m \mu_k$ ,  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$ . Співвідношення (2) розглядається в просторі  $(\dot{S}_\alpha^\beta)'$ , тобто (2) трактується в тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

$\forall \varphi \in \dot{S}_\alpha^\beta$  (конкретні значення параметрів  $\alpha, \beta > 0$  вкажемо пізніше). Зазначимо, що задачу (1), (2) можна розуміти як узагальнення задачі Коші, коли початкова умова  $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$  замінюється умовою (2) (якщо  $\mu = 1$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = 0$ , то, маємо, очевидно, задачу Коші). Задача (1), (2) відноситься до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними (див. [6-12]).

Із результатів, наведених в [1] випливає, що символом оператора  $A_\psi = (-1)^{b-1} B_\nu^b$  в (1) є функція  $\psi(\sigma) = -\sigma^{2b}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ ; задача (1), (2) коректно розв'язна (у вказаному сенсі) за умови, що  $f \in (\dot{W}_\Omega^M)'$ ,  $M(x) = x^p/p$ ,  $\Omega(y) = y^q/q$ ,  $p = 2b$ ,  $1/p + 1/q = 1$ . Простір  $W_\Omega^M$  відноситься до просторів типу  $W$ , введених в [13], при цьому  $\dot{W}_{y^q/q}^{x^p/p} = \dot{S}_{1/q}^{1/p} = \dot{S}_{1-1/p}^{1/p}$ . Розв'язок задачі (1), (2) дається формулою  $u(t, x) = f * G(t, x) = \langle f_\xi, T_\xi^x G(t, \xi) \rangle$ , де  $G(t, \xi) = F_{B_\nu}^{-1}[Q(t, \sigma)](\xi)$ ,  $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)$ ,  $Q_1(t, \sigma) = \exp\{-t\sigma^{2b}\}$ ,  
 $Q_2(\sigma) = \left( \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k \sigma^{2b}\} \right)^{-1}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ .  
 $Q(t, \cdot) \in \dot{W}_{x^p/p}^{y^q/q} = \dot{S}_{1/p}^{1-1/p}$ ,  $p = 2b$ ,  
 $G(t, \cdot) \in \dot{W}_{y^q/q}^{x^p/p} = \dot{S}_{1-1/p}^{1/p}$ ,  $t \in (0, T]$ ,  
 $Q_1(t, \cdot) \in \dot{S}_{1/p}^{1-1/p}$  при кожному  $t > 0$ .

Проаналізувавши доведення теореми 3 з [2, с. 259], безпосередньо переконаємося в тому, що для функції  $Q_1(t, \sigma)$  та її похідних (за змінною  $\sigma$ ) справджуються оцінки

$$|D_\sigma^q Q_1(t, \sigma)| \leq c B^q t^{q/(2b)} q^{q(1-1/(2b))} \exp\{-t\sigma^{2b}\},$$

$$q \in \mathbb{Z}_+, t \in (0, 1), \quad (3)$$

де сталі  $c, B, > 0$  не залежать від  $t$ . Оці-

нимо, далі, похідні функції  $Q_2(\sigma)$ . Оскільки  $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$ , то  $\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k \sigma^{2b}\} \leq \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k < 1$ . Скориставшись поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$\begin{aligned} Q_2(\sigma) &= \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left( \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k \sigma^{2b}\} \right)^r = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} \cdot \\ &\cdot (\mu_1 \exp\{-t_1 \sigma^{2b}\})^{r_1} \dots (\mu_m \exp\{-t_m \sigma^{2b}\})^{r_m} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m} \cdot \\ &\cdot \exp\{-\omega \sigma^{2b}\}, \end{aligned}$$

де  $\omega = t_1 r_1 + \dots + t_m r_m$ . Тоді

$$\begin{aligned} D_\sigma^q Q_2(\sigma) &= \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} \cdot \\ &\cdot \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m} D_\sigma^q e^{-\omega \sigma^{2b}}. \end{aligned}$$

З урахуванням (3)

$$|D_\sigma^q e^{-\omega \sigma^{2b}}| \leq c_1 B_1^q q^{q(1-1/(2b))} e^{-\omega \sigma^{2b}}, c_1, B_1 > 0.$$

Зауважимо, що  $\omega < t_m r$ ,  $\omega > t_1 r$ . Оскільки  $0 < t_1 < 1$ , а  $r \geq 1$ , то  $\omega > t_1^2$ . Отже, правильною є нерівність

$$|D_\sigma^q e^{-\omega \sigma^{2b}}| \leq c_1 B_2^q q^{q(1-1/(2b))} r^q \exp\{-t_1^2 \sigma^{2b}\},$$

$q \in \mathbb{N}$ ,  $B_2 = B_1 t_m^{1/(2b)}$ . Тоді

$$\begin{aligned} |D_\sigma^q Q_2(\sigma)| &\leq c_1 \mu^{-1} B_2^q q^{q(1-1/(2b))} \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-r} \mu_0^r r^q \cdot \\ &\cdot \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} \exp\{-t_1^2 \sigma^{2b}\}, \end{aligned}$$

де  $\mu_0 = \max\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ . Скориставшись формулою

$$\sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} = m^r,$$

знайдемо, що

$$|D_\sigma^q Q_2(\sigma)| \leq c_1 \mu^{-1} B_2^q q^{q(1-1/(2b))} \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-r} \mu_0^r r^q \cdot \exp\{-t_1^2 \sigma^{2b}\}.$$

Оскільки  $\tilde{\mu} = \mu^{-1} \mu_0 m < 1$ , то звідси випливає збіжність ряду  $\sum_{r=1}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^q = \alpha < +\infty$ . Отже,

$$|D_\sigma^q Q_2(\sigma)| \leq c_2 B_2^q q^{q(1-1/(2b))} \exp\{-t_1^2 \sigma^{2b}\},$$

$$c_2 = c_1 \mu^{-1} \alpha, q \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Зауважимо, що сама функція  $Q_2$  є обмеженою на  $\mathbb{R}$ :  $|Q_2(\sigma)| = Q_2(\sigma) \leq (\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k)^{-1}$ .

Із оцінок (4) та обмеженості функції  $Q_2$  на  $\mathbb{R}$  випливає, що  $Q_2$  – мультиплікатор у просторі  $S_{1/(2b)}^{1-1/(2b)}$ . Введемо позначення:  $\nu = n + 1/2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  і скористаємося зображенням бesselевих функцій півцілого порядку [14]:  $J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \frac{n\pi}{2}) P_n(\frac{1}{x}) + \cos(x - \frac{n\pi}{2}) Q_n(\frac{1}{x}) \right\}$ ,  $x > 0$ , де  $P_n(\frac{1}{x})$  – многочлен степеня  $n$  відносно  $\frac{1}{x}$ ,  $Q_n(\frac{1}{x})$  – многочлен степеня  $n - 1$ ; при цьому  $P_n(0) = 1$ ,  $Q_n(0) = 0$ . Наприклад,

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{x} \cos(x - \frac{\pi}{2}) \right\},$$

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ (1 - \frac{3}{x^2}) \sin(x - \pi) + \frac{3}{x} \cos(x - \pi) \right\}.$$

Оскільки нормована функція Бесселя  $j_\nu$  пов'язана з функцією Бесселя  $J_\nu$  формулою (див. [4])  $j_\nu(x) = \frac{2^{\nu} \Gamma(\nu+1/2)}{x^{\nu}} J_\nu(x)$ ,  $x > 0$ , то маємо таке зображення функції  $j_{n+1/2}$ :

$$j_{n+1/2}(x) = \frac{\alpha_n}{x^{n+1/2}} \left\{ \sin(x - \frac{n\pi}{2}) P_n(\frac{1}{x}) + \cos(x - \frac{n\pi}{2}) Q_n(\frac{1}{x}) \right\}, n \in \mathbb{N}, x > 0.$$

Нехай  $P_n(\frac{1}{x}) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{x^k}$ ,  $Q_n(\frac{1}{x}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x^k}$ ,  $x > 0$ ,

$$\tilde{G}_{2s}(t, x) = F_{B_\nu}^{-1}[\sigma^{2s} Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma)] = |I_{1,k}(t, x)| \leq$$

$$= c_\nu \int_0^{\infty} \sigma^{2s} Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \tilde{c}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{2s} Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$\tilde{c}_\nu = \frac{1}{2} c_\nu$ ,  $s \in \mathbb{Z}$  – фіксоване. Урахувавши вигляд нормованої функції Бесселя  $j_\nu$ ,  $\nu \in \{3/2, 5/2, \dots\}$  знайдемо, що  $\tilde{G}_{2s}(t, x) = \Psi_1(t, x) + \Psi_2(t, x)$ ,  $x \neq 0$ , де

$$\Psi_1(t, x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{x^{n+k+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \cdot \sin(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma, x \neq 0,$$

$$\Psi_2(t, x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x^{n+k+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \cdot \cos(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma, x \neq 0,$$

$$\Psi_1(t, x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{x^{n+k+1}} I_{1,k}(t, x),$$

$$I_{1,k}(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \cdot \sin(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma, x \neq 0,$$

$$\Psi_2(t, x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x^{n+k+1}} I_{2,k}(t, x),$$

$$I_{2,k}(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \cdot \cos(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma, x \neq 0,$$

Оцінимо  $I_{1,k}(t, x)$ ,  $x \neq 0$ , зінтегрувавши частинами  $q$  разів відповідний інтеграл, де  $q = n - k + 2 + 2s + p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  – довільно фіксований параметр. У результаті прийдемо до нерівностей

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{|x|^q} \int_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^q(Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})| d\sigma \leq \\
&\leq \frac{1}{|x|^q} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^q Q_1(t, \sigma)| |Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}| d\sigma + \dots + \right. \\
&+ C_q^l \int_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^{q-l} Q_1(t, \sigma)| |D_\sigma^l Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}| d\sigma + \dots + \\
&\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} |Q_1(t, \sigma)| \cdot |D_\sigma^q Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}| d\sigma \right].
\end{aligned}$$

Зауважимо, що позаінтегральні доданки рівні нулеві, оскільки функція  $Q_1(t, \sigma)$  та всі її похідні (за змінною  $\sigma$ ) прямують до нуля при  $x \rightarrow \pm\infty$  (див. [3]). Скориставшись ще один раз формулою диференціювання добутку двох функцій та оцінками (4), прийдемо до нерівності

$$\begin{aligned}
&|D_\sigma^l(Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})| \leq \\
&\leq \sum_{\nu=0}^l C_l^\nu |D_\sigma^\nu Q_2(\sigma)| |D_\sigma^{l-\nu} \sigma^{n-k+1+2s}| = \\
&= Q_2(\sigma) |D_\sigma^l \sigma^{n-k+1+2s}| + \sum_{\nu=1}^l C_l^\nu |D_\sigma^\nu Q_2(\sigma)| \cdot \\
&\cdot |D_\sigma^{l-\nu} \sigma^{n-k+1+2s}| \leq Q_2(\sigma) |D_\sigma^l \sigma^{n-k+1+2s}| + \\
&+ c_2 \sum_{\nu=1}^l C_l^\nu B_2^\nu \nu^{\nu(1-1/(2b))} (n+1+2s)^{l-\nu} \cdot \\
&\cdot \sup_{|\sigma|} \left( |\sigma|^{n-k+1+2s} \exp \left\{ -\frac{t_1^2}{2} |\sigma|^{2b} \right\} \right) \cdot \\
&\cdot \exp \left\{ -\frac{t_1^2}{2} |\sigma|^{2b} \right\}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
&\sup_{|\sigma|} \left( |\sigma|^{n-k+1+2s} \exp \left\{ -\frac{t_1^2}{2} |\sigma|^{2b} \right\} \right) \leq \\
&\leq B_3^{n+1+2s} (n+1+2s)^{(n+1+2s)/(2b)} \leq B_4 B_5 s^{2s/(2b)}, \\
&B_4 = B_4(n) > 0, B_5 = B_5(n) > 0.
\end{aligned}$$

Отже,

$$|D_\sigma^l(Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})| \leq$$

$$\begin{aligned}
&(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k)^{-1} |D_\sigma^l \sigma^{n-k+1+2s}| + \\
&+ L_1 B_5^s s^{2s/(2b)} L_2^l l^{l(1-1/(2b))} \exp \left\{ -\frac{t_1^2}{2} |\sigma|^{2b} \right\}, \quad (5)
\end{aligned}$$

де  $L_1, B_5, L_2$  – додатні сталі. Для проведення подальших досліджень оцінимо інтеграл вигляду

$$\int_0^\infty \sigma^j e^{-t\sigma^{2b}} d\sigma = \int_0^\infty \sigma^j e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} d\sigma.$$

Зауважимо, що  $\sigma^j \leq j!e^\sigma, \sigma \geq 0; \sigma \leq \varepsilon\sigma^{2b} + c_1$  для довільного  $\varepsilon > 0$  і  $c_1 > 1$ . Тоді

$$\sigma^j e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} \leq j!e^{c_1} e^{\varepsilon\sigma^{2b}} e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} = j!e^{c_1} e^{-\frac{t}{4}\sigma^{2b}},$$

якщо покласти  $\varepsilon = t/2$ . Далі скористаємося формулою

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{t}{4}\sigma^{2b}} &= - \int_\sigma^{+\infty} (e^{-\frac{t}{4}y^{2b}})'_y dy = \\
&= \frac{tb}{2} \int_\sigma^{+\infty} y^{2b-1} e^{-\frac{t}{4}y^{2b}} dy \leq \frac{tb}{2} \int_0^{+\infty} y^{2b-1} e^{-\frac{t}{4}\sigma^{2b}} dy.
\end{aligned}$$

Маємо, що

$$\begin{aligned}
y^{2b-1} e^{-\frac{t}{4}y^{2b}} &\leq (2b-1)! e^y e^{-\frac{t}{4}y^{2b}} \leq \\
&\leq (2b-1)! e^{c_1} e^{\varepsilon y^{2b} - \frac{t}{4}y^{2b}} = (2b-1)! e^{c_1} e^{-\frac{t}{8}y^{2b}},
\end{aligned}$$

якщо покласти  $\varepsilon = t/8$ . Тоді

$$\sigma^j e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} \leq j!e^{c_1} \frac{tb}{2} (2b-1)! e^{c_1} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{8}y^{2b}} dy =$$

$$\frac{t^{1/(2b)} y=z}{4} \frac{(2b)!}{4} j! e^{2c_1} t t^{-1/(2b)}.$$

$$\cdot \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{8} z^{2b} \right\} dz = \alpha t^{1-1/(2b)}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \sigma^j e^{-t\sigma^{2b}} d\sigma \leq \alpha t^{1-1/(2b)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} d\sigma = \\
&= \alpha_1 t^{1-1/(2b)} t^{-1/(2b)} = \alpha_1 t^{1-1/(2b)} \leq \alpha_1 \quad (6)
\end{aligned}$$

для  $t \in (0, 1)$  ( $1 - 1/(2b) \geq 0$ , оскільки  $b \geq 1$ ). З урахуванням (3), (5), (6) прийдемо до нерівностей

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^{q-l} Q_1(t, \sigma)| \cdot |D_\sigma^l(Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})| d\sigma \leq \\ & \leq \alpha_0 L_3 t^{1-1/(2b)} B_5^s s^{2s/(2b)} B_6^q q^{q(1-1/(2b))} \cdot \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} |\sigma|^{2b}\right\} d\sigma \leq \\ & \leq \alpha_1 B_5^s s^{2s/(2b)} B_6^q q^{q(1-1/(2b))} t^{1-1/(2b)}, \end{aligned}$$

$1 \leq l \leq q$ ,  $t \in (0, 1)$ . Окремо оцінимо інтеграл

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^q Q_1(t, \sigma)| |Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}| d\sigma,$$

оскільки в цьому випадку  $Q_2(\sigma)$  є лише обмеженою на  $\mathbb{R}$  функцією. Для цього в оцінках (3) похідних функції  $Q_1(t, \sigma)$  врахуємо множник  $t^{q/(2b)}$ , оскільки тут  $q \geq 1$ . Тоді

$$\begin{aligned} I &= c \left( \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right)^{-1} t^{q/(2b)} q^{q(1-1/(2b))} \cdot \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{n-k+1+2s} \exp\{-t|\sigma|^{2b}\} \stackrel{t^{1/(2b)}\sigma=y}{=} \\ & = \tilde{c} B^q t^{q/(2b)} q^{q(1-1/(2b))} t^{-1/(2b)} t^{-(n-k+1+2s)/(2b)} \cdot \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{n-k+1+2s} \exp\{-|y|^{2b}\} dy. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що  $q = n - k + 2 + 2s + p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , тому  $t^{q/(2b)} t^{-(n-k+1+2s)/(2b)} = t^{p/(2b)} \leq 1$ ,  $t \in (0, 1)$ . Крім того,

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{n-k+1+2s} \exp\{-|y|^{2b}\} dy \leq \\ & \leq 2 \sup_{y \geq 0} \left( y^{n-k+1+2s} \exp\left\{-\frac{1}{2} y^{2b}\right\} \right). \end{aligned}$$

$$\cdot \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} y^{2b}\right\} dy.$$

Урахувавши співвідношення

$$\sup_{y \geq 0} (y^m \exp\{-\frac{1}{2} y^{2b}\}) \leq \left(\frac{2m}{b}\right)^{m/(2b)} e^{-m/b},$$

$m = n - k + 1 + 2s \leq n + 1 + 2s$ , знайдемо, що  $\Lambda \leq F_1 F_2^s s^{2s/(2b)}$ , де  $F_1 = F_1(n) > 0$ ,  $F_2 = F_2(n) > 0$ . Тоді  $I \leq \tilde{F}_1 \tilde{F}_2^s s^{2s/(2b)} F_3^q q^{q(1-1/(2b))}$ .

Урахувавши всі ці нерівності, прийдемо до оцінки

$$\begin{aligned} |I_{1,k}(t, x)| &\leq \beta_1 |x|^{-q} \beta_2^s \beta_3^q s^{2s/(2b)} q^{q(1-1/(2b))}, \\ &t \in (0, 1), x \neq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$q = n - k + 2 + 2s + p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  – довільно фіксоване. Нерівністю (7) скористаємося при оцінюванні  $|\Psi_1(t, x)|$ :

$$\begin{aligned} |\Psi_1(t, x)| &\leq \tilde{\beta}_1 |x|^{-2(\nu+1)-2s-p} \tilde{\beta}_2^s \tilde{\beta}_3^p \cdot \\ & \cdot s^{2s/(2b)} s^{2s/(1-1/(2b))} p^{p(1-1/(2b))} = \\ & = \tilde{\beta}_1 |x|^{-2(\nu+1)-2s-p} \tilde{\beta}_2^s \tilde{\beta}_3^p s^{2s} p^{p(1-1/(2b))}, \\ &t \in (0, 1), x \neq 0. \end{aligned}$$

Функція  $\Psi_2(t, x)$ ,  $x \neq 0$ , оцінюється аналогічно. Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

**Лема 1.** *Функція  $\tilde{G}_{2s}(t, x)$ ,  $x \neq 0$ ,  $t \in (0, 1)$ , задовольняє нерівність*

$$\begin{aligned} |\tilde{G}_{2s}(t, x)| &\leq M_1 |x|^{-2(\nu+1)-2s-p} M_1^s M_2^p \cdot \\ & \cdot s^{2s} p^{p(1-1/(2b))}, s \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad (8)$$

де сталі  $M_1, M_2, M_3 > 0$  не залежать від  $t$ ,  $p \in \mathbb{N}$  – довільно фіксований параметр.

**Наслідок 1.** *Якщо  $|x - \xi| \geq a_0 > 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$ , то правильними є оцінки*

$$\begin{aligned} |B_{\nu, \xi}^s T_\xi^x G(t, \xi)| &\leq L_0 |x - \xi|^{-2(\nu+1)-2s-p} L_1^s L_2^p \cdot \\ & \cdot s^{2s} p^{p(1-1/(2b))}, t \in (0, 1), s \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad (9)$$

де сталі  $L_0, L_1, L_2 > 0$  не залежать від  $t$ ,  $p \in \mathbb{N}$  – довільно фіксований параметр.

**Доведення.** Згідно з властивостями операторів Бесселя та узагальненого зсуву [15, 4] маємо

$$B_{\nu, \xi}^s T_\xi^x F_{B_\nu}[\varphi](\xi) = T_\xi^x \left( \int_0^\infty \varphi(\sigma) (-\sigma^2)^s \cdot \right)$$

$$\cdot j_\nu(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma = (-1)^s T_\xi^x F_{B_\nu}[\sigma^{2s}\varphi(\sigma)](\xi).$$

Тоді

$$B_{\nu,\xi}^s T_\xi^x G(t, \xi) = (-1)^s T_\xi^x F_{B_\nu}^{-1}[\sigma^{2s}Q(t, \sigma)] = \\ = (-1)^s T_\xi^x \tilde{G}_{2s}(t, \xi), \quad Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma).$$

Зауважимо, що

$$T_\xi^x \tilde{G}_{2s}(t, \xi) = c_\nu T_\xi^x \left( \int_0^\infty \sigma^{2s} Q(t, \sigma) j_\nu(\sigma\xi) \cdot \sigma^{2\nu+1} d\sigma \right) = c_\nu b_\nu \int_0^\pi \left( \int_0^\infty \sigma^{2s} Q(t, \sigma) \cdot \sigma^{2\nu+1} d\sigma \right) \sin^{2\nu} \omega d\omega.$$

$$\cdot j_\nu(\sigma\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \omega})\sigma^{2\nu+1}d\sigma \sin^{2\nu} \omega d\omega.$$

Оцінку інтеграла

$$\int_0^\infty \sigma^{2s} Q(t, \sigma) j_\nu(\sigma\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \omega})\sigma^{2\nu+1}d\sigma$$

здійснюємо за схемою оцінювання функції  $F_{B_\nu}^{-1}[\sigma^{2s}Q(t, \sigma)] = \tilde{G}_{2s}(t, \xi)$ ,  $\xi \neq 0$ . Урахувавши (8), а також нерівність  $\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \omega} \geq |x - \xi|$ ,  $x \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$ ,  $\omega \in [0, \pi]$ , прийдемо до оцінки (9).

**Зауваження 1.** З наслідку 1 та умов (А), (Б) випливає, що правильною є нерівність

$$|D_\xi^{2s} T_\xi^x G(t, \xi)| \leq$$

$$\leq \tilde{L}_0 |x - \xi|^{-2(\nu+1) - 2s - p} \tilde{L}_1^s \tilde{L}_2^p \sigma^{2s} p^{p(1-1/(2b))} \quad (10)$$

з деякими сталими  $\tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 > 0$ , не залежними від  $t$ , якщо  $|x - \xi| \geq a_0 > 0$ , де  $p \in \mathbb{N}$  – довільно фіксований параметр.

Нехай узагальнена функція  $f$  в умові (2) є елементом простору  $(\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta)'$   $\subset (S_{1-1/(2b)}^{1/(2b)})'$ ,  $\beta > 1$ . Оскільки в основному просторі  $S_{1-1/(2b)}^\beta$  при  $\beta > 1$  є фінітні функції [2], то в просторі  $(S_{1-1/(2b)}^\beta)'$ ,  $\beta > 1$  є фінітні узагальнені функції, тобто функції, носіями яких є обмежені множини. Зазначимо, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторі  $\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta$ ,  $\beta > 1$ . Ця властивість випливає із загального результату,

який відноситься до теорії досконалих просторів (див. [2]): якщо  $\Phi$  – досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі  $\Phi$ . Відповідно, якщо  $\overset{\circ}{\Phi}$  – досконалий простір, який складається з парних нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}$  функцій з диференційовною операцією узагальненого зсуву аргумента, то кожна фінітна узагальнена функція з простору  $(\overset{\circ}{\Phi})'$  є згортувачем у просторі  $\overset{\circ}{\Phi}$ . Фінітні узагальнені функції утворюють досить широкий клас; зокрема, кожна обмежена замкнена множина  $F \subset \mathbb{R}$  є носієм деякої узагальненої фінітної функції.

**Теорема 1.** Нехай  $u(t, x)$  – розв'язок задачі (1), (2) з функцією  $f$  в умові (2), яка є елементом простору  $(\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta)'$   $\subset (S_{1-1/(2b)}^{1/(2b)})'$ ,  $\beta > 1$ ,  $\text{supp } f$  – обмежена множина в  $\mathbb{R}$ ,  $[c, d] \cap \text{supp } f = \emptyset$ . Тоді

$$\exists \alpha > 0 : \sup_{t \in [0, T]} |u(t, x)| \leq \alpha, \quad \alpha = \alpha(c, d).$$

**Доведення.** Нехай  $[c, d] \subset [a_1, b_1] \subset (a, b)$ ,  $(a, b) \cap \text{supp } f = \emptyset$ . Розглянемо функцію  $\psi \in \overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta$  таку, що  $\psi(x) = 1$  для  $x \in [a_1, b_1]$ ,  $\text{supp } \psi \subset (a, b)$ . Така функція існує, оскільки простір  $\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta$  містить фінітні функції при  $\beta > 1$ . Функції  $\psi(\xi)T_\xi^x G(t, \xi)$ ,  $(1 - \psi(\xi))T_\xi^x G(t, \xi)$ , як функції  $\xi$ , є елементами простору  $\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta$  при кожному  $t \in (0, T]$  і  $x \in \mathbb{R}$ , тому правильним є співвідношення

$$u(t, x) = \langle f_\xi, \psi(\xi)T_\xi^x G(t, \xi) \rangle + \langle f_\xi, \eta(\xi)T_\xi^x G(t, \xi) \rangle,$$

де  $\eta = 1 - \psi$ . Перший доданок у цій рівності рівний нулю, оскільки  $\text{supp } f \cap \text{supp } (\psi(\xi)T_\xi^x G(t, \xi)) = \emptyset$ . Отже,  $u(t, x) = \langle f_\xi, \eta(\xi)T_\xi^x G(t, \xi) \rangle$ . Оскільки  $f \in (\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta)'$   $= \bigcap_{A, B > 0} (\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b), A}^{\beta, B})'$  і в просторі  $\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta$  виконується перша аксіома зліченності [2], то функціонал  $f$  є неперервним тоді й лише тоді, коли він обмежений на кожній обмеженій множині з простору

$\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta$ . Отже, для доведення теореми досить показати, що сім'я функцій  $\Phi_{t,x}(\xi) = \eta(\xi)T_\xi^x G(t,x)$  обмежена в просторі  $\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta$  рівномірно по  $t$ , для досить малих значень  $t$ , і  $x \in [c,d]$ , тобто, що

$$|\xi^{2k} D_\xi^{2s} \Phi_{t,x}(\xi)| \leq c A^k B^s k^{2k(1-1/(2b))} s^{2\beta s},$$

$$\{k, s\} \subset \mathbb{Z}_+, \xi \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

де сталі  $c, A, B > 0$  не залежать від  $t, x, \xi$ , які змінюються вказаним способом. Оскільки  $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$  для  $\xi \in [a_1, b_1]$ , то оцінку (11) досить встановити для  $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1]$ .

Функція  $\psi$  є елементом простору  $\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta$ . Отже,

$$|\xi^{2k} D_\xi^{2s} \psi(\xi)| \leq c_1 A_1^k B_1^s k^{2k(1-1/(2b))} s^{2\beta s},$$

$$\xi \in \mathbb{R}, \{k, s\} \subset \mathbb{Z}_+. \quad (12)$$

Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$|\xi^{2k} D_\xi^{2s} \Phi_{t,x}(\xi)| = |\xi^{2k} \sum_{l=0}^{2s} C_{2s}^l D_\xi^l \eta(\xi) D_\xi^{2s-l} T_\xi^x \cdot G(t, \xi)| \leq \Psi_{t,x}^1(\xi) + \Psi_{t,x}^2(\xi),$$

де

$$\Psi_{t,x}^1(\xi) = \sum_{l=0}^{2s} C_{2s}^l |\xi^{2k} D_\xi^l \psi(\xi)| \cdot |D_\xi^{2s-l} T_\xi^x G(t, \xi)|,$$

$$\Psi_{t,x}^2(\xi) = |\xi^{2k} D_\xi^{2s} T_\xi^x G(t, \xi)|.$$

Оскільки  $\overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta \subset S_{1-1/(2b)}^\beta$ , то для функції  $\psi \in \overset{\circ}{S}_{1-1/(2b)}^\beta$  справджуються нерівності

$$|D_\xi^l \psi(x)| \leq c_2 B_2^l l^{\beta} \exp\{-a|\xi|^{2b/(2b-1)}\}, l \in \mathbb{Z}_+,$$

з деякими додатними сталими  $c_2, B_2, a > 0$ . Тоді

$$|\xi^{2k} D_\xi^l \psi(\xi)| \leq c_2 B_2^l l^{\beta} \sup_{|\xi|} \{|\xi|^{2k} \exp\{-a|\xi|^{2b/(2b-1)}\}\} \leq c_3 B_2^l l^{\beta} A_2^k k^{2k(1-1/(2b))} \leq c_3 B_2^l l^{2\beta} A_2^k k^{2k(1-1/(2b))}.$$

Оцінимо  $\Psi_{t,x}^1(\xi)$  скориставшись нерівностями (12) та нерівностями (10), в яких покладемо  $p = 1$ ; врахуємо також те, що

$|x - \xi| \geq a_0 > 0$ , де  $a_0 = \min\{c - a_1, b_1 - a\}$ . Отже,

$$\Psi_{t,x}^1(\xi) \leq c_3 \tilde{L}_0 \tilde{L}_2 a_0^{-2(\nu+1)-1} A_2^k k^{2k(1-1/(2b))} \cdot \sum_{l=0}^{2s} C_{2s}^l B_2^l l^{2\beta l} a_0^{-2(s-l)} \tilde{L}_1^{s-l} (s-l)^{2(s-l)} \leq \tilde{L} A_2^k A_3^s k^{2k(1-1/(2b))} s^{2\beta s}, \quad (13)$$

де  $\tilde{L} = c_3 \tilde{L}_0 \tilde{L}_2 a_0^{-2(\nu+1)-1}$ ,  $A_3 = 2 \max\{B_2, \tilde{L}_1 a_0^{-2}\}$ , сталі  $\tilde{L}, A_2, A_3 > 0$  не залежать від  $t, x, \xi$ .

При оцінці  $\Psi_{t,x}^2(\xi)$  врахуємо те, що

$$\exists d > 0 \forall x \in [c, d] \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1] : |\xi|/|x-\xi| \leq d.$$

Поклавши в (10)  $p = 2k$ , прийдемо до нерівностей

$$\Psi_{t,x}^2 \leq \tilde{L}_1 |\xi|^{2k} |x - \xi|^{-2(\nu+1)-2s-2k} \tilde{L}_1^s \tilde{L}_2^k \cdot s^{2s} k^{2k(1-1/(2b))} \leq \tilde{L}_1 a_0^{-2(\nu+1)} a_0^{-2s} d^{2k} \tilde{L}_1^s \tilde{L}_2^k \cdot s^{2s} k^{2k(1-1/(2b))} \leq \tilde{L}_1 A_4^k A_5^s k^{2k(1-1/(2b))} s^{2s} \leq \tilde{L}_1 A_4^k A_5^s k^{2k(1-1/(2b))} s^{2\beta s}, \quad (14)$$

де  $\tilde{L} = \tilde{L}_1 a_0^{-2(\nu+1)}$ ,  $A_4 = d^2 \tilde{L}_2$ ,  $A_5 = a_0^{-2} \tilde{L}_1$ , сталі  $\tilde{L}, A_4, A_5 > 0$  не залежать від  $t, x, \xi$ , які змінюються вказаним способом. З нерівностей (13), (14) випливає нерівність (11). Теорема доведена.

Як приклад, розглянемо двоточкову задачу (1), (2) ( $m = 1, \mu > \mu_1, t_1 = T$ ) для рівняння (1) з параметром  $b = 1$  та  $f = \delta$  ( $\delta$  – дельта-функція Дірака) в умові (2). В [1] встановлено, що розв'язок  $u(t, x)$  такої задачі подається у вигляді

$$u(t, x) = \delta * G(t, x) = G(t, x) = 2^{-(2\nu+1)} \mu^{-1} \Gamma^{-1}(\nu+1) [t^{-(\nu+1)} \exp\{-\frac{x^2}{4t}\} + \sum_{r=1}^{\infty} (\frac{\mu_1}{\mu})^r \frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}} \exp\{-\frac{x^2}{4(t+rT)}\}].$$

Тоді

$$u(t, 0) = 2^{-(2\nu+1)} \mu^{-1} \Gamma^{-1}(\nu+1) [t^{-(\nu+1)} + \sum_{r=1}^{\infty} (\frac{\mu_1}{\mu})^r \frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}}].$$

Звідси дістаємо, що  $u(t, 0) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +0$ . Оскільки  $\text{supp } \delta = \{0\}$  ( $\delta$  – функція – фінітний функціонал), то, внаслідок доведеної теореми, наприклад, для всіх  $x \in [c, d] \subset [a_1, b_1] \subset (0, b)$ , знайдеться стала  $\alpha = \alpha(c, d) > 0$  така, що справджується нерівність  $\sup_{t \in [0, T]} |u(t, x)| \leq \alpha$ . У даному випадку в цьому можна переконатися безпосередньо, оскільки

$$\sup_{t \in [0, T]} (t^{-(\nu+1)} \exp\{-\frac{x^2}{4t}\}) \leq \sup_{t \in [0, T]} (t^{-(\nu+1)} \cdot \exp\{-\frac{c^2}{4t}\}) \leq (\frac{4(\nu+1)}{c^2})^{\nu+1}, x \geq c$$

(тут враховано, що  $\lim_{t \rightarrow +0} t^{-(\nu+1)} \exp\{-\frac{c^2}{4t}\} = 0$ ). Отже, для всіх  $x \in [c, d]$  справджується нерівність  $\sup_{t \in [0, T]} |u(t, x)| \leq \alpha$ , де

$$\alpha = 2^{-(2\nu+1)} \mu^{-1} \Gamma^{-1}(\nu+1) \left( \left( \frac{4(\nu+1)}{c^2} \right)^{\nu+1} + \frac{1}{T^{\nu+1}} \sum_{r=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_1}{\mu} \right)^r \right) = 2^{-(2\nu+1)} \mu^{-1} \Gamma^{-1}(\nu+1) \cdot \left( \left( \frac{4(\nu+1)}{c^2} \right)^{\nu+1} + \frac{\mu_1}{T^{\nu+1}(\mu - \mu_1)} \right).$$

У даному випадку отриманий результат можна сформулювати ще й так: для довільно фіксованого  $\varepsilon > 0$  знайдеться стала  $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$  така, що  $\sup_{t \in [0, T]} |u(t, x)| \leq \alpha$  для всіх  $x : |x| \geq \varepsilon$ .

## REFERENCES

1. Gorodetsky, V. V., Martynyuk, O. V. & Shyrokovskyykh, A. O. (2016). On a generalization of a Cauchy problem for singular parabolic type evolution equations. *Nelineini kolyvannia*, 19, No. 4, pp. 435-457. (in Ukrainian)
2. Gel'fand, I. M. & Shylov, G. E. (1958). The spaces of basic and generalized functions. Moscow: Fizmatgiz. (in Russian)
3. Gorodetskyi, V. V. & Gotinchan, T. I. (2017). Transformation of Bessel in spaces of type  $\mathring{S}$ . *Bukovyn. matem. zhurn.*, 5, No. 3-4, pp. 50-55. (in Ukrainian)
4. Levitan B. I. (1951). Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 6, Iss. 2, pp. 102-143. (in Russian)

5. Gorodetskyi, V. V. & Verezhak, G. P. (2017). Generalized of  $\mathring{S}$  type spaces. *Bukovyn. matem. zhurn.*, 5, No. 1-2, pp. 49-61. (in Ukrainian)
6. Nahushev, A. M. (1995). The equations of mathematical biology. Moscow: Vysshaya shkola (in Russian).
7. Belavin, I. A., Kapitsa, S. P. & Kurdyumov, S. P. (1998). The mathematical model of global demographic processes with considering of space distribution. *Zhurn. vychisl. matem. mat. fiz.*, 38, No. 6, pp. 885-902 (in Russian).
8. Dezin, A. A. (1980). General questions of the theory of boundary-value problems. Moscow: Nauka (in Russian)
9. Romanko, V. K. (1985). Nonlocal boundary value problems for certain systems of equations. *Matem. zametki*, 37, No. 7, pp. 727-733 (in Russian).
10. Makarov, A. A. (1994). The existence of a correct two-point boundary-value problem in a layer for systems of pseudodifferential equations. *Differents. uravneniya*, 30, No. 1, pp. 144-150 (in Russian).
11. Chesalin, V. I. (1979). The problem with nonlocal boundary conditions for some abstract hyperbolic equations. *Differents. uravneniya*, 15, No. 11, pp. 2104-2106 (in Russian).
12. Il'kiv, V. S. & Ptashnyk, B. I. (2005). A nonlocal two-point problem for systems of partial differential equations. *Sibir. mat. zhurn.*, 46, No. 11, pp. 119-129 (in Russian).
13. Gel'fand, I. M. & Shylov, G. E. (1958). Some questions in the theory of differential equations. Moscow: Fizmatizd. (in Russian)
14. Tikhonov, A. N. & Samarskii, A. A. (1977). Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka (in Russian)
15. Zhytomyrskiy, Ya. I. (1955). The Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with a differential Bessel operator. *Matem. sb.*, 36, No. 2, pp. 299-310 (in Russian).