

ПРО МАТРИЦЮ ГРІНА ЗЛІЧЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ МАЙЖЕ ТРИКУТНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для зліченої лінійної системи диференціальних рівнянь, близької до трикутної, отримано достатні умови існування нескінченної матриці Гріна, що задовольняє задані умови.

Ключові слова: злічені системи, матриця Гріна.

For the countable linear system of the differential equations, which close to triangular, the conditions of the existence of the infinite Green-matrix, which satisfies given conditions, are obtained.

Keywords: countable systems, Green-matrix.

Вступ. Злічені системи диференціальних рівнянь займають помітне місце в сучасній теорії диференціальних рівнянь, та їм присвячено численні дослідження [1,2]. Як відмічається в монографії [2], злічені системи диференціальних рівнянь, незважаючи на те, що вони є частинним випадком диференціальних рівнянь у банахових просторах [3,4], мають низку специфічних властивостей, що приводить до розробки теорії таких рівнянь. В статті досліджуються властивості розв'язків злічених лінійних, близьких до трикутних, систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами.

Постановка задачі. Розглянемо злічену лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad (1)$$

$$x = \text{col}(x_1, x_2, \dots), \\ P(t) = (p_{jk}(t))_{j,k=1,2,\dots}, p_{jk} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ p_{jk}(t) \in C(\mathbb{R}).$$

Матрицею Гріна системи (1) назвемо матрицю $G(t, \tau) = (g_{jk}(t, \tau))_{j,k=1,2,\dots}$, $g_{jk} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняє умови:

1) при $t \neq \tau$:

$$\frac{\partial G(t, \tau)}{\partial t} = P(t)G(t, \tau), \quad (2)$$

$$\frac{\partial G(t, \tau)}{\partial \tau} = -G(t, \tau)P(\tau); \quad (3)$$

2)

$$G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = E, \quad (4)$$

$$G(t, t + 0) - G(t, t - 0) = -E, \quad (5)$$

де $E = \text{diag}(1, 1, \dots)$ – нескінченна одинична матриця. При $t = \tau$ матрицю $G(t, \tau)$ не визначено.

Метою статті є встановлення достатніх умов існування матриці Гріна системи вигляду (1) та дослідження її властивостей.

Основні результати. Розглянемо злічену лінійну однорідну трикутну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (6)$$

$$x = \text{col}(x_1, x_2, \dots), \\ A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=1,2,\dots}, a_{jk} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ a_{jk}(t) \in C(\mathbb{R}), a_{jk}(t) \equiv 0 \quad (j < k).$$

Лема 1. Нехай система (6) задовольняє наступні умови:

$$1) \inf_{\mathbb{R}} |a_{jj}(t)| \geq \gamma > 0 \quad (j = 1, 2, \dots);$$

2)

$$\sum_{j=2}^{\infty} A_j < +\infty,$$

$$\text{де } A_j = \max_{1 \leq k \leq j-1} \sup_{\mathbb{R}} |a_{jk}(t)| \quad (j = 2, 3, \dots).$$

Тоді система (6) має матрицю Гріна $G^*(t, \tau) = (g_{jk}^*(t, \tau))_{j,k=1,2,\dots}$, причому існують $\delta \in (0, \gamma)$, $K_j = K_j(\delta) \in (0, +\infty)$ ($j = 1, 2, \dots$), що не залежать від t, τ , і такі, що

$$|g_{jk}^*(t, \tau)| \leq K_j e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|}, \quad j, k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} K_j < +\infty. \quad (8)$$

Доведення. За аналогією з [5, с. 192] визначимо елементи матриці $G^*(t, \tau)$ для $t \neq \tau$ наступним чином:

якщо $a_{jj}(t) \leq -\gamma < 0$, то

$$g_{jj}^*(t, \tau) = \begin{cases} \exp \int_{\tau}^t a_{jj}(s) ds, & t > \tau, \\ 0, & t < \tau; \end{cases} \quad (9)$$

якщо $a_{jj}(t) \geq \gamma > 0$, то

$$g_{jj}^*(t, \tau) = \begin{cases} 0, & t > \tau, \\ -\exp \int_{\tau}^t a_{jj}(s) ds, & t < \tau; \end{cases} \quad (10)$$

якщо $j > k$, то

$$g_{jk}^*(t, \tau) = \sum_{q=k}^{j-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{jj}^*(t, s) a_{jq}(s) g_{qk}^*(s, \tau) ds, \quad (11)$$

якщо $j < k$, то $g_{jk}^*(t, \tau) \equiv 0$; $j = 2, 3, \dots$

Внаслідок умови 1) теореми і рівностей (9), (10) виконано:

$$|g_{jj}^*(t, \tau)| \leq e^{-\gamma|t-\tau|}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (12)$$

З огляду на (11) розглянемо:

$$g_{j,j-1}^*(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{jj}^*(t, s) a_{j,j-1}(s) g_{j-1,j-1}^*(s, \tau) ds.$$

Звідси з урахуванням умови 2) теореми і нерівностей (12) матимемо:

$$\begin{aligned} |g_{j,j-1}^*(t, \tau)| &\leq A_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(|t-s|+|s-\tau|)} ds = \\ &= \frac{A_j}{\gamma} (1 + \gamma|t-\tau|) e^{-\gamma|t-\tau|}, \quad j = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Легко встановити, що $\forall \delta \in (0, \gamma) \exists M = M(\delta) \in (0, +\infty)$ таке, що

$$(1 + \gamma|t-\tau|) e^{-\gamma|t-\tau|} \leq M e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|}.$$

Дійсно, достатньо покласти

$$M = \sup_{s>0} (1 + \gamma s) e^{-\delta s} = \frac{\gamma}{\delta e^{1-\frac{\delta}{\gamma}}}.$$

Оскільки $e^{1-\frac{\delta}{\gamma}} > 1$, то з нерівності (13) тоді маємо:

$$|g_{j,j-1}^*(t, \tau)| < \frac{A_j}{\delta} e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (14)$$

Далі для $\delta \in (0, \gamma)$ маємо:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t-s|} e^{-(\gamma-\delta)|s-\tau|} ds = \\ &= \frac{2\gamma}{\delta(2\gamma-\delta)} e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|} - \frac{2(\gamma-\delta)}{\delta(2\gamma-\delta)} e^{-\gamma|t-\tau|} < \\ &< \frac{2\gamma}{\delta(2\gamma-\delta)} e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|}. \end{aligned} \quad (15)$$

З урахуванням нерівностей (14), (15), співвідношень (11) і умови 2) теореми методом математичної індукції легко встановити оцінки:

$$\begin{aligned} |g_{jk}^*(t, \tau)| &\leq \frac{A_j}{\delta} \prod_{s=1}^{j-k-1} \left(1 + \frac{2\gamma}{\delta(2\gamma-\delta)} A_{j-s} \right) \times \\ &\times \exp(-(\gamma-\delta)|t-\tau|), \quad j = 2, 3, \dots; k < j \end{aligned} \quad (16)$$

(тут покладено $\prod_{s=1}^0 = 1$).

Внаслідок умови 2) теореми нескінченний добуток

$$\prod_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2\gamma}{\delta(2\gamma-\delta)} A_s \right)$$

збіжний, тому $\exists A^* = A^*(\delta) \in (0, +\infty)$ таке, що

$$|g_{jk}^*(t, \tau)| \leq A^* A_j e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|}, \quad j = 2, 3, \dots; k < j, \quad (17)$$

що з огляду знову ж таки на умову 2) і нерівність (12) й доводить твердження леми 1.

Розглянемо зліченну лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (18)$$

$x = \text{col}(x_1, x_2, \dots)$, матриця $A(t)$ така ж сама, як і в системі (6), $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t), \dots)$, $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_j(t) \in C(\mathbb{R})$, причому

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_j(t)| < +\infty. \quad (19)$$

Лема 2. *Нехай зліченна трикутна однорідна система диференціальних рівнянь, що відповідає системі (18), задовольняє всі умови лема 1. Тоді система (18) має єдиний розв'язок $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \dots)$ такий, що*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\mathbb{R}} |x_j(t)| < +\infty. \quad (20)$$

Доведення. Покажемо, що вектор-функція

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (21)$$

де $G^*(t, \tau)$ – матриця Гріна системи (6), існування якої встановлено лемою 1, оскільки умови цієї лема припускаються виконаними, є розв'язком системи (18). Дійсно, подамо $x(t)$ у вигляді:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t G^*(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_t^{+\infty} G^*(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Звідси, використовуючи формулу [6, с. 667], а також співвідношення (2) і (5), дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \int_{-\infty}^t \frac{\partial G^*(t, \tau)}{\partial t} f(\tau) d\tau + G^*(t, t-0) f(t) + \\ &+ \int_t^{+\infty} \frac{\partial G^*(t, \tau)}{\partial t} f(\tau) d\tau - G^*(t, t+0) f(t) = \\ &= A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(t, \tau) f(\tau) d\tau - \\ &- (G^*(t, t+0) - G^*(t, t-0)) f(t) = \\ &= A(t) x(t) + f(t). \end{aligned}$$

В координатній формі рівність (21) набуває вигляду:

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_{jk}^*(t, \tau) f_k(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots \quad (22)$$

З рівностей (22), а також оцінок (7) дістанемо:

$$\begin{aligned} |x_j(t)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_{jk}^*(t, \tau)| \cdot |f_k(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_j e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|} \sup_{\mathbb{R}} |f_k(\tau)| d\tau = \\ &= K_j \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|} d\tau \right) \sup_{\mathbb{R}} |f_k(t)| = \\ &= K_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma-\delta} \sup_{\mathbb{R}} |f_k(t)|, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

З огляду на нерівність (8) і умову (19) звідси маємо, що вказаний розв'язок задовольняє умову (20). Єдиність розв'язку, що задовольняє цю умову, гарантується умовою 1) лема 1.

Розглянемо наступну зліченну лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + \mu B(t))x, \quad (23)$$

$x = \text{col}(x_1, x_2, \dots)$, матриця $A(t)$ така ж сама, як в системі (6), $B(t) = (b_{jk}(t))_{j,k=1,2,\dots}$, $b_{jk} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b_{jk}(t) \in C(\mathbb{R})$ ($j, k = 1, 2, \dots$),

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \max_k \sup_{\mathbb{R}} |b_{jk}(t)| < +\infty, \quad (24)$$

$\mu \in \mathbb{R}^+$.

Теорема. *Нехай для зліченної лінійної трикутної системи (6) виконано всі умови лема 1. Тоді існують $\Delta \in (0, \gamma - \delta)$ (δ визначено в лемі 1), $\mu_0 = \mu_0(\delta, \Delta)$ такі, що $\forall \mu \in (0, \mu_0)$ система (23) має матрицю Гріна $G(t, \tau, \mu) = (g_{jk}(t, \tau, \mu))_{j,k=1,2,\dots}$, причому існують $H_j = H_j(\delta, \Delta, \mu) \in (0, +\infty)$, що не залежать від t, τ , і такі, що*

$$|g_{jk}(t, \tau, \mu)| \leq H_j e^{-(\gamma-\delta-\Delta)|t-\tau|}, \quad j, k = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} H_j < +\infty.$$

Доведення. З огляду на лему 2 і рівність (21) визначимо матрицю Гріна системи (23) з матричного інтегрального рівняння:

$$G(t, \tau, \mu) =$$

$$= G^*(t, \tau) + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(t, s) B(s) G(s, \tau, \mu) ds, \quad (26)$$

де $G^*(t, \tau)$ – матриця Гріна системи (6). В координатній формі рівність (26) набуде вигляду зліченної системи інтегральних рівнянь:

$$g_{jk}(t, \tau, \mu) = g_{jk}^*(t, \tau) + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[g_{jm}^*(t, s) \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=1}^{\infty} b_{ml}(s) g_{lk}(s, \tau, \mu) \right] ds, \quad j, k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Розв'язок системи (27) шукатимемо методом послідовних наближень, покладаючи:

$$g_{jk0}(t, \tau, \mu) = g_{jk}^*(t, \tau),$$

$$g_{jk\nu}(t, \tau, \mu) = g_{jk}^*(t, \tau) + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[g_{jm}^*(t, s) \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=1}^{\infty} b_{ml}(s) g_{lk, \nu-1}(s, \tau, \mu) \right] ds, \quad j, k = 1, 2, \dots \quad (28)$$

$\nu = 1, 2, \dots$

З огляду на нерівності (7) матимемо:

$$\begin{aligned} & |g_{jk1}(t, \tau, \mu) - g_{jk0}(t, \tau, \mu)| \leq \\ & \leq \mu K_j \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \max_l \sup_{\mathbb{R}} |b_{ml}(s)| \sum_{l=1}^{\infty} K_l \right) \times \\ & \quad \times e^{-(\gamma-\delta)(|t-s|+|s-\tau|)} ds = \\ & = \mu M K K_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\gamma-\delta)(|t-s|+|s-\tau|)} ds < \\ & < \mu M K K_j \frac{1}{\Delta} e^{-(\gamma-\delta-\Delta)|t-\tau|}, \quad j, k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

де $\Delta \in (0, \gamma - \delta)$.

Далі методом математичної індукції нескладно встановлюються оцінки:

$$\begin{aligned} & |g_{jk\nu}(t, \tau, \mu) - g_{jk, \nu-1}(t, \tau, \mu)| < \left(\frac{\mu M K}{\Delta} \right)^\nu \times \\ & \quad \times \left(\frac{2(\gamma - \delta)}{2(\gamma - \delta) - \Delta} \right)^{\nu-1} K_j e^{-(\gamma-\delta-\Delta)|t-\tau|}, \end{aligned}$$

$j, k = 1, 2, \dots; \nu = 2, 3, \dots$

Звідси випливає, що умова

$$\frac{\mu M K \cdot 2(\gamma - \delta)}{\Delta(2(\gamma - \delta) - \Delta)} < 1$$

гарантує збіжність процесу (28) до функцій $g_{jk}(t, \tau, \mu)$ ($j, k = 1, 2, \dots$), що задовольняють нерівності (25), де покладено:

$$H_j = \left(1 + \frac{\mu M K}{\Delta - \frac{2(\gamma-\delta)\mu M K}{2(\gamma-\delta)-\Delta}} \right) K_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Теорему доведено.

Висновки. Таким чином, для зліченної лінійної майже трикутної системи диференціальних рівнянь вигляду (23) встановлено достатні ознаки існування матриці Гріна, що задовольняє умови (2) – (5).

REFERENCES

1. Valeev, K., & Zhautuikov, O. (1962). Beskonechnye sistemy differentsial'nykh uravneniy [Infinite Systems of Differential Equations]. Moscow: Foreign literature.
2. Samoilenko, A., & Teplinskyi, Yu. (1993). Schetnye sistemy differentsial'nykh uravneniy [Countable Systems of Differential Equations]. Kiev: IM NAN Ukrainy.
3. Daletskiy, Yu., & Krein, M. (1970). Ustoichivost resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve [Stability of the Solutions of Differential Equations in the Banach space]. Moscow: Nauka.
4. Massera, J., & Schaffer, J. (1970). Lineinye differentsial'nye uravnenia i funkcional'nye prostranstva [Linear Differential Equations and Function Spaces]. Moscow: Mir.
5. Rosenwasser, Y. (1977). Pokazately Lyapunova v teorii lineynykh sistem upravleniya [Lyapunov's indicators in the Theory of Linear Systems of Control]. Moscow: Nauka.
6. Fikhtengoltz, G. (1970). Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T.2 [Course of Differential and Integral Calculus. V.2]. Moscow: Nauka.