УДК 517.524

©2018 р. Р.І. Дмитришин

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

ОЦІНКИ ПОХИБОК НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ БАГАТОВИМІРНОГО S-ДРОБУ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

У роботі розглядається багатовимірне узагальнення S-дробу — багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними. Цей гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними є ефективним інструментом для наближення функцій багатьох змінних, заданих формальними кратними степеневими рядами. Досліджено збіжність багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними та встановлено оцінки похибок наближень для цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними в деяких областях простору $\mathbb{C}^N$.

Ключові слова: багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними, збіжність.

In this paper, we consider the multidimensional generalization of S-fraction, namely the multidimensional S-fraction with independent variables. This branched continued fraction with independent variables is an efficient tool for the approximation of multivariable functions, which are represented by formal multiple power series. We have investigated the convergence of multidimensional S-fraction with independent variables and have established the truncation error bounds for this branched continued fraction with independent variables in some domains of the space $\mathbb{C}^N$.

Keywords: multidimensional S-fraction with independent variables, convergence.

1. Вступ. Для наближення спеціальних функцій багатьох змінних використовуються функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними [2, 4]. У роботах [1, 2, 5, 6, 7] встановлено ознаки збіжності для цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Нехай N — фіксоване натуральне число,

$$\mathcal{I}_k = \{i(k) : \ i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k),\ 1 \le i_p \le i_{p-1},\ 1 \le p \le k,\ i_0 = N\}$$

— множини мультиіндексів, $k \ge 1$.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)} z_{i_2}}{1} + + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)} z_{i_3}}{1} + \cdots, \tag{1}$$

де $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, — додатні дійсні сталі, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, називається багатовимірним S-дробом з нерівнозначними змінними.

У цій статті доведено, що багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними збігається в області

$$\bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} \left(P_{\alpha,r} \bigcap Q_{\alpha,r} \right), \tag{2}$$

де

$$P_{\alpha,r} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{\cos^2 \alpha} < \frac{r}{2} \right\},$$

$$Q_{\alpha,r} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \sqrt{r \sum_{k=1}^{N} |z_k|} < \cos\alpha \times \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - r \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{2\cos^2 \alpha}} \right] \right\},$$

і встановлено оцінки похибок наближень для цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними в області $P_{\alpha,r} \bigcap Q_{\alpha,r}$ для кожного $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

2. Основний результат. Нехай

$$G_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{a_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}}{1} +$$

$$+ \sum_{i_{k+2}=1}^{i_{k+1}} \frac{a_{i(k+2)} z_{i_{k+2}}}{1} + \cdots + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{a_{i(n)} z_{i_n}}{1},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k,\ 1 \le k \le n-1,\ n \ge 2$. Тоді, очевидно, виконуються такі рекурентні співвідношення

$$G_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{a_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}}{G_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})}, \qquad (3)$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k,\ 1 \le k \le n-1,\ n \ge 2$, і $G_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) \equiv 1$, $i(n) \in \mathcal{I}_n$, $n \ge 1$. Таким чином, підхідні дроби багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (1) запишемо у вигляді

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{G_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})},\ n \ge 1.$$

Терема. *Багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними (1), де*

$$a_{i(k)} \le r,\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 1, \qquad (4)$$

де r — додатне дійсне число, збігається до функції $f(\mathbf{z})$ в області (2) і для кожного $\mathbf{z} \in P_{\alpha,r} \bigcap Q_{\alpha,r}$ виконуються такі оцінки

$$|f(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \le$$

$$\le \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{2r^{-1}\cos^2\alpha}} \right]^{-2n} \times$$

$$\times \cos^{-2n}\alpha \left[r \sum_{k=1}^{N} |z_{i_k}| \right]^{n+1},\ n \ge 1, \qquad (5)$$

для кожного $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Доведення. Нехай α — довільне число з інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ і нехай $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із $P_{\alpha,r} \bigcap Q_{\alpha,r}$. Оцінимо модуль різниці підхідних дробів $|f_m(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})|$ багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (1) при $m > n \ge 1$.

Для цього розглянемо періодичний неперервний дріб

$$1 - \frac{c_1(\mathbf{z})}{1} - \frac{c_2(\mathbf{z})}{1} - \frac{c_3(\mathbf{z})}{1} - \cdots, \qquad (6)$$

де

$$c_n(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{2r^{-1}\cos^2\alpha},\ n \ge 1. \qquad (7)$$

Нехай

$$Q_k^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{c_{k+1}(\mathbf{z})}{1} - \frac{c_{k+2}(\mathbf{z})}{1} - \cdots - \frac{c_n(\mathbf{z})}{1},$$

де $1 \le k \le n-1,\ n \ge 2$. Тоді, очевидно, виконуються такі рекурентні співвідношення

$$Q_k^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{c_{k+1}(\mathbf{z})}{Q_{k+1}^{(n)}(\mathbf{z})}, \qquad (8)$$

де $1 \le k \le n-1,\ n \ge 2$, і $Q_n^{(n)}(\mathbf{z}) = 1$, $n \ge 1$. Таким чином, для кожного $n \ge 1$ підхідний дріб періодичного неперервного дробу (6) запишемо у вигляді

$$g_n(\mathbf{z}) = 1 - \frac{c_1(\mathbf{z})}{Q_1^{(n)}(\mathbf{z})}.$$

Нехай n — довільне натуральне число. За індукцією за k покажемо правильність таких нерівностей

$$Q_k^{(n)}(\mathbf{z}) > 1/2,\ 1 \le k \le n. \qquad (9)$$

При $k = n$ нерівності (9) очевидні. Припустимо, що нерівності (9) виконуються для $k = p+1$, де $p \le n-1$. Тоді, із співвідношення (8) при $k = p$ маємо

$$Q_p^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{c_{p+1}(\mathbf{z})}{Q_{p+1}^{(n)}(\mathbf{z})} >$$

$$> 1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{r^{-1}\cos^2\alpha} > \frac{1}{2}.$$

Нехай тепер n — довільне натуральне число таке, що $n \ge 2$. За індукцією за k покажемо, що для довільного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ виконуються такі нерівності

$$\mathrm{Re}(G_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) e^{-i\alpha}) \ge \cos\alpha \left[1 - \frac{c_{k+1}(\mathbf{z})}{1} - \right.$$

$$\left. - \frac{c_{k+2}(\mathbf{z})}{1} - \cdots - \frac{c_n(\mathbf{z})}{1} \right], \qquad (10)$$

де $1 \le k \le n-1$.

У доведенні леми 4.41 [8] при $x \ge c > 0$ і $v^2 \le 4u+4$ показано, що

$$\min_{-\infty<y<+\infty} \mathrm{Re}\frac{u+iv}{x+iy} = -\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2x}. \quad (11)$$

Використовуючи співвідношення (3), (4), (9) і (11), при $k=n-1$ маємо

$$\mathrm{Re}(G^{(n)}_{i(n-1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) =$$
$$= \mathrm{Re}\left[e^{-i\alpha} + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{a_{i(n)}z_{i_n}e^{-2i\alpha}}{G^{(n)}_{i(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}}\right] \ge$$
$$\ge \cos\alpha - \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{r(|z_{i_n}| - \mathrm{Re}(z_{i_n}e^{-2i\alpha}))}{2\mathrm{Re}(G^{(n)}_{i(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} \ge$$
$$\ge \cos\alpha\left[1 - r\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{|z_{i_n}| - \mathrm{Re}(z_{i_n}e^{-2i\alpha})}{2\cos^2\alpha}\right] \ge$$
$$\ge \cos\alpha\left[1 - \frac{c_n(\mathbf{z})}{1}\right].$$

Нехай нерівності (10) виконуються для $k = p+1$, де $p \le n-2$. Тоді, при $k=p$ і довільному мультиіндексу $i(p) \in \mathcal{I}_p$ отримуємо

$$\mathrm{Re}(G^{(n)}_{i(p)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) \ge \cos\alpha -$$
$$-r\sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{|z_{i_{p+1}}| - \mathrm{Re}(z_{i_{p+1}}e^{-2i\alpha})}{2\mathrm{Re}(G^{(n)}_{i(p+1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} \ge$$
$$\ge \cos\alpha - \frac{r}{2\cos\alpha}\times$$
$$\times\sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{|z_{i_{p+1}}| - \mathrm{Re}(z_{i_{p+1}}e^{-2i\alpha})}{1} - \frac{c_{p+2}(\mathbf{z})}{1} -$$
$$- \frac{c_{p+3}(\mathbf{z})}{1} - \cdots - \frac{c_n(\mathbf{z})}{1} \ge \cos\alpha\times$$
$$\times\left[1 - \frac{c_{p+1}(\mathbf{z})}{1} - \frac{c_{p+2}(\mathbf{z})}{1} - \cdots - \frac{c_n(\mathbf{z})}{1}\right].$$

Із нерівностей (9) випливає, що $Q^{(n)}_k(\mathbf{z}) \ne 0$ для всіх $n \ge 1$ і $1 \le k \le n$. Застосовуючи метод, запропонований в роботі [3], знаходимо формулу різниці між двома підхідними дробами $g_m(\mathbf{z}) - g_n(\mathbf{z})$ для періодичного неперервного дробу (6) для $m > n \ge 1$

$$g_m(\mathbf{z}) - g_n(\mathbf{z}) = \frac{-\prod\limits_{r=1}^{n+1} c_r(\mathbf{z})}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} Q^{(m)}_r(\mathbf{z}) \prod\limits_{r=1}^{n} Q^{(n)}_r(\mathbf{z})}.$$

Звідси та із співвідношень (7) і (9) при $m > n \ge 1$ маємо $g_m(\mathbf{z}) < g_n(\mathbf{z})$, тобто послідовність $\{g_n(\mathbf{z})\}$ монотонно спадає. На підставі теореми 3.2 [8] періодичний неперервний дріб (6) збігається і його значення дорівнює

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{2r^{-1}\cos^2\alpha}}.$$

Таким чином, із нерівностей (10) отримуємо

$$\mathrm{Re}(G^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) \ge \cos\alpha\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{2r^{-1}\cos^2\alpha}}\right], \quad (12)$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n-1$, $n \ge 2$.

Далі, із нерівностей (12) випливає, що $G^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z}) \ne 0$ для всіх $n \ge 1$ і $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n$. Знову, застосовуючи метод, запропонований в роботі [3] і співвідношення (3), знаходимо формулу різниці між двома підхідними дробами $f_m(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})$ для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (1) при $m > n \ge 1$

$$f_m(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}) =$$
$$= \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{(-1)^n \prod\limits_{r=1}^{n+1} a_{i(r)}z_{i_r}}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} G^{(m)}_{i(r)}(\mathbf{z}) \prod\limits_{r=1}^{n} G^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})}.$$

Нехай m, n і k — довільні натуральні числа такі, що $m > n \ge 2$ і $k \le n-1$. Тоді, використовуючи (4) і (12), для довільного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ отримуємо

$$\left|\frac{a_{i(k)}z_{i_k}}{G^{(m)}_{i(k)}(\mathbf{z})G^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z})}\right| \leq$$

$$\leq \frac{r|z_{i_k}|\cos^{-2}(\alpha)}{\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{|z_k|-\mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{2r^{-1}\cos^2\alpha}}\right]^2}.$$

Тому, враховуючи, що

$$G^{(k)}_{i(k)}(\mathbf{z}) = 1,\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1,$$

при $m > n \geq 1$ маємо

$$|f_m(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\sum_{k=1}^{N}\frac{|z_k|-\mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha})}{2r^{-1}\cos^2\alpha}}\right]^{-2n} \times$$

$$\times \cos^{-2n}\alpha\left[r\sum_{k=1}^{N}|z_{i_k}|\right]^{n+1}. \tag{13}$$

Тепер, прямуючи в нерівності (13) до границі при $m \to \infty$, отримуємо оцінки (5) для кожного $\mathbf{z} \in P_{\alpha,r} \cap Q_{\alpha,r}$. З огляду на області $P_{\alpha,r}$ і $Q_{\alpha,r}$ робимо висновок, що вираз в правій частині нерівності (13) прямує до нуля при $n \to \infty$ і, отже, багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними (1) збігається в області $P_{\alpha,r} \bigcap Q_{\alpha,r}$. Нарешті, із довільності α випливає, що багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними (1) збігається в області (2).

Теорему доведено.

Зауважимо, що із встановлених оцінок швидкості збіжності гіллястого ланцюгового дробу в теоремах 4.1 і 4.2 [2] маємо оцінки похибок наближень для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (1) відповідно за умов

$$a_{i(k)}|z_{i_k}| \leq \frac{t(1-t)}{i_{k-1}} \text{ і } a_{i(k)}|z_{i_k}| \leq \frac{t(1-t)}{N},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, t — дійсна стала така, що $0 \leq t \leq 1/2$. З огляду на це, робимо висновок, що отриманий у роботі результат дає нам оцінки похибок наближень для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними (1) за інших умов на елементи цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними, зокрема, за таких

$$-\frac{1}{4} < \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} a_{i(k)}z_{i_k} < 1,\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1.$$

де $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$.

REFERENCES

1. *Antonova, T.M. & Bodnar, D.I.* (2000). Convergence domains for branched continued fractions of the special form. Approx. Theor. and its Appl.: Pr. Inst. Math. NAS Ukr., *31*, 19-32. (in Ukrainian)

2. *Baran, O.E.* (2014). Approximation of functions of multiple variables branched continued fractions with inequivalent variables: Ph.D. dissertation, Mathematical Analysis. Lviv: Inst. for App. Problem. of Mech. and Math., Ntl. Acad. of Sci. of the Ukr.

3. *Bodnar, D.I.* (1986). Branched Continued Fractions. Kiev: Naukova Dumka. (in Russian)

4. *Dmytryshyn, R.I.* (2014). Associated branched continued fractions with two independent variables. Ukr. Math. Zh., 66(9), 1175-1184, (in Ukrainian)

5. *Dmytryshyn, R.I.* (2005). On the convergence multidimensional g-fraction with independent variables. Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya., 48(4), 87-92. (in Ukrainian)

6. *Dmytryshyn, R.I.* (2017). On the convergence multidimensional J-fraction with independent variables. Bukovinian Math. J., 5(3-4), 71-76.

7. *Dmytryshyn, R.I.* (2017). Convergence of some branched continued fractions with independent variables. Mat. Stud., 47(2), 150-159. DOI:10.15330/ms.47.2.150-159

8. *Jones, W.B. & Thron, W.J.* (1980). Continued fractions: Analytic theory and applications. London etc.: Addison-Wesley Pub. Co., Inc.