УДК 517.925

©2018 р. С.А.Іліка, Л.А.Піддубна, І.І.Тузик, І.М.Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АПРОКСИМАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Досліджуються схеми апроксимації систем лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. Розглянуто їх застосування для наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів, дослідження стійкості розв'язків та побудови коефіцієнтних областей стійкості лінійних рівнянь із запізненням.

Ключові слова: лінійні диференціально-різницевих рівняння, запізнення, квазіполіном, стійкість розв'язків.

An approximation scheme of systems of linear differential equations with many delays is investigated. We considered its application for the approximated finding of non-asymptotic roots of quasi-polynomials. Also we investigate stability of solutions and coefficient areas of linear differential equations with delays.

Keywords: linear differential-difference equations, delays, quasi-polynomials, stability of solutions.

Вперше задача про апроксимацію лінійних стаціонарних рівнянь із запізненням розглянута М.Є. Салуквадзе [1] та Ю.М. Рєпіним і В.Є. Третьяковим [2], але без дослідження збіжності наближень. У праці [3] М.М. Красовський розглянув лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau), \tag{1}$$

де $x \in R^n$, A, B - сталі $n \times m$ матриці. Встановлено, що розв'язок початкової задачі для системи із запізненням (1) можна апроксимувати розв'язками задачі Коші для спеціальної системи звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі $t \in [0,\tau], T > 0$.

Дослідження схем апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i x(t-\tau_i),$$

де $A, B_i, i = \overline{1,k}$ - $n \times n$ сталі матриці, $x \in R^n$, $0 < \tau_1 < ... < \tau_k$ розглядались в роботі [5] О.В.Матвія та І.М. Черевка.

Дослідження зв'язків між розв'язками лінійних диференціально-різницевих рівнянь та розв'язками відповідних апроксимуючих систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь дозволило побудувати алгоритми наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіомів. За допомогою цих алгоритмів запропонована методика дослідження стійкості роз'язків лінійних стаціонарних систем із сталим запізненням [5,6], а також розроблено конструктивні алгоритми побудови областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями [7,8].

1. Схема апроксимації. Розглянемо початкову задачу для лінійної системи диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i x(t-\tau_i), \tag{2}$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0], \tag{3}$$

де $A, B_i, i = \overline{1,k}$ - сталі $n \times n$ матриці, $x \in R^n$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_k = \tau, \varphi \in C[-\tau, 0]$.

Поставимо у відповідність системі (2) за схемою Красовського-Рєпіна [3, 9] систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \tfrac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i z_{l_i}(t), l_i = [\tfrac{\tau_i m}{\tau}] \\ \tfrac{dz_i(t)}{dt} &= \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)), i = \overline{1,m}, \end{aligned} \tag{4}$$

$\mu = \frac{m}{\tau}$, $m \in \mathbb{N}$ з початковими умовами

$$z_j(0) = \varphi(-\frac{\tau j}{m}), j = \overline{0, m}. \qquad (5)$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (4) апроксимує систему рівнянь із запізненням (2) на скінченному інтервалі $[0, T]$, якщо справджуються співвідношення

$||x(t - \frac{tj}{m}) - z_j(t)|| \to 0, j = \overline{0, m}, t \in [0, T]$ при $m \to \infty$.

Теорема 1. *Розв'язок задачі Коші (4)-(5) апроксимує розв'язок початкової задачі (2)-(3) при $t \in [0, T]$ і $m \to \infty$.*

Доведення теореми 1 легко одержати аналогічно як в теоремі 1[10]

2. Про стійкість лінійних систем із запізненням. Дослідження стійкості систем із запізненням (2) на даний час є однією із найбільш важливих для практики задач.

Теорема 2. *[11] Для того, щоб нульовий розв'язок системи (2) був експоненціально стійким необхідно і досить, щоб всі корені його характеристичного рівняння*

$$D(\lambda) = det(\lambda E - A - \sum_{i=1}^{k} B_i e^{-\lambda \tau_i}) = 0 \qquad (6)$$

лежали у півплощині

$$Re\lambda < 0. \qquad (7)$$

Безпосереднє обчислення нулів квазіполінома (6) або аналіз їх локалізації є достатньо складною задачею, особливо для систем високого порядку. Можливість дослідження експоненціальної стійкості (нестійкості) системи (2) за допомогою аналізу апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь забезпечує наступне твердження.

Теорема 3. *[4] Якщо нульовий розв'язок рівняння (2) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує $m_0 > 0$, таке, що при $m \geq m_0$ нульовий розв'язок системи (4) експоненціально стійкий (нестійкий). Якщо для всіх $m \geq m_0$ нульовий розв'язок системи (4) експоненціально стійкий (нестійкий), то й нульовий розв'язок рівняння (2) експоненціально стійкий (нестійкий).*

Застосовуючи теорему 3 можна одержати ефективний алгоритм дослідження системи (2) на експоненціальну стійкість. Характеристичний многочлен апроксимуючої системи (4) має вигляд

$$\Psi_m(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda E - A & 0 & ... & -B_1 & ... & -B_k \\ -\mu E & (\mu+\lambda)E & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\mu E & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & (\mu+\lambda)E & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & (\mu+\lambda)E \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Елементи визначника (7) матриці розмірності $n \times n$. Використовуючи те, що в першому рядку визначника ненульові блоки знаходяться на позиціях $l_j, j = \overline{0, k}$ нескладно одержати для (7) таке співвідношення

$$\Psi_m(\lambda) =$$

$$= det(\lambda E - A - \sum_{i=1}^{k} B_i (\frac{\mu}{\mu+\lambda})^{l_i})(\mu+\lambda)^{mn} = 0. \qquad (9)$$

Дослідимо зв'язок між квазіполіномом (6) і характеристичним многочленом (8).

Лема 1. *Для фіксованих $\lambda \in Z$ послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu+\lambda)^{mn}}, m \in N \qquad (10)$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (6).

Доведення. Враховуючи позначення $\mu = \frac{m}{\tau}$ і рівність (8) маємо

$$H_m(\lambda) = det(\lambda E - A - \sum_{i=1}^{k} B_i (\frac{\mu}{\mu+\lambda})^{l_i})$$

На підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty} (\frac{m}{m+\lambda\tau})^{\frac{\tau_i m}{\tau}} = e^{-\lambda\tau_i}$$

та означення числа l_i одержуємо рівність

$$\lim_{m\to\infty} (\lambda E - A - \sum_{i=1}^{k} B_i (\frac{m}{m+\lambda\tau})^{l_i}) =$$

$= (\lambda E - A - \sum\limits_{i=1}^{k} B_i e^{-\lambda\tau_i})$.

Отже, переходячи в рівності (9) до границі при $m \to \infty$, для фіксованого $\lambda \in Z$, одержимо

$$\lim_{m\to\infty} H_m(\lambda) = D(\lambda). \qquad (11)$$

Лема 1 доведена.

Зауваження. Оскільки нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно з рівністю (9), збігаються, то корені характеристичного рівняння (7) можна брати за наближені значення коренів квазіполінома $D(\lambda)$. Обчислюючи корені характеристичного многочлена (7) за допомогою стандартних процедур у спеціалізованих пакетах Mathematica, Maple, Mathlab, MathCad при різних значеннях запізнення τ, для яких зберігається стійкість апроксимуючої системи (3) встановлюємо, згідно теореми 3, стійкість системи із запізненням (1), а також можемо знайти верхню межу величини запізнення τ, для якої система (3), а значить і система із запізненням (1) є експоненціально стійкою.

3. Коефіцієнтні області стійкості. Розглянемо застосування методу Д-розбиття [12] для побудови та аналізу коефіцієнтних областей стійкості на прикладі найпростішого диференціального рівняння із запізненням

$$x'(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0, a, b \in R, \tau > 0, \qquad (12)$$

квазіполіном якого має вигляд

$$\Phi(\lambda) = \lambda + a + be^{-\lambda\tau} = 0. \qquad (13)$$

Розіб'ємо простір коефіцієнтів рівняння (12) лініями, яким відповідають квазіполіноми, що мають хоча б один корінь на уявній осі. Таке розбиття називається Д-розбиттям. Кожній області такого Д-розбиття відповідають квазіполіноми з однаковою кількістю нулів з додатною дійсною частиною. Знайшовши область, якій відповідають квазіполіноми, що не мають нулів з додатною дійсною частиною, одержимо коефіцієнтну область асимптотичної стійкості розв'язків рівняння (12).

При $\lambda = 0$ маємо одну із ліній Д-розбиття

$$a + b = 0. \qquad (14)$$

Якщо квазіполіном (13) має чисто уявний корінь $\lambda = i\omega, i = \sqrt{-1}, \omega \in R$, тоді

$$i\omega + a + be^{-i\omega\tau} = 0.$$

Виділяючи дійсну та уявну частину одержимо рівняння іншої границі Д-розбиття в параметричній формі:

$$a = -\frac{\omega cos\omega\tau}{sin\omega\tau}, b = \frac{\omega}{sin\omega\tau}, 0 < \omega < \frac{\pi}{\tau}. \qquad (15)$$

Лінії (14),(15) в області коефіцієнтів (a, b) утворюють Д-розбиття, яке зображене на

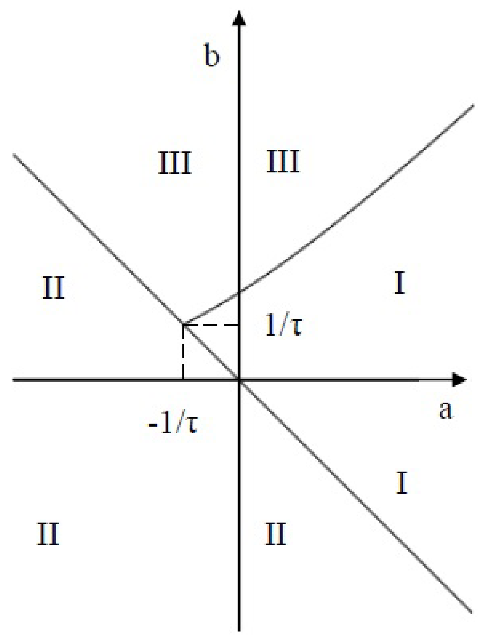

Рис.1

При $a > 0$ і $b = 0$ квазіполіном (13) не має коренів з додатніми дійсними частинами, отже область I є областю асимптотичної стійкості рівняння (12).

Аналізуючи рис.1 маємо, що область II, де $a + b < 0$ є областю нестійкості при довільному запізненні τ. Якщо $a + b > 0$ та $a > |b|$ маємо область асимптотичної стійкості при будь-якому запізненні $\tau > 0$.

При $a + b > 0$ та $b > |a|$ можемо попадати як в область асимптотичної нестійкості III так і в область асимптотичної стійкості I в залежності від значення запізнення τ.

Якщо a та b фіксовані коефіцієнти рівняння (12) то із співвідношень (15) знаходимо параметри ω і τ, при яких границя Д-розбиття (15) проходить через точку (a, b):

$$\begin{aligned} &\omega = bsin(cos^{-1}(-\tfrac{a}{b})), \\ &\tau = \tfrac{cos^{-1}(-\frac{a}{b})}{bsin(cos^{-1}(-\frac{a}{b}))}. \end{aligned} \tag{16}$$

Співвідношення (16) – це точне значення верхньої межі запізнення τ для рівняння (12) при якому ще зберігається асимптотична стійкість [13].

Як приклад розглянемо лінійне диференціальне рівняння із запізненням

$$x'(t) + 3x(t) + 3,1x(t - \tau) = 0. \tag{17}$$

Верхня межа запізнення для якої нульовий розв'язок рівняння (17) є асимптотично стійкий, згідно оцінок одержаних в [14], задається співвідношенням $\tau \leq 0,3226$. Обчислюючи значення верхньої межі запізнення τ за формулою (16) дістаємо, що стійкість зберігається при $\tau < 3,6963$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Салуквадзе М. Е. К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженным постоянно действующим возмущениям // Автоматика и телемеханика. – 1962.– **23**, №2.– С. 1595–1600.
2. Репин Ю. М., Третьяков В. Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регулятора на моделирующих устройствах // Автоматика и телемеханика. – 1963. – Т. 24, № 6. – С. 738–743.
3. Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. – 1964. – Т. 28, № 4. – С. 716–725.
4. Матвій О.В.,Черевко І.М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – Т. 7, № 2. – С. 208–216.
5. Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко І.М. Про стійкість лінійних систем із запізненням // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2008. – Вип. 421 : Математика. – С. 66–70.
6. Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко І.М. Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. – Чернівці, 2010. – Вип. 501 : Математика. – С. 69–73.
7. Клевчук І.І., Пернай С.А., Черевко І.М. Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь // Доповіді НАН України. – 2012. – №7. – С. 28–34.
8. Cherevko I.M., Piddubna L.A., Ilika S.A. On the approximation of systems with delay and them stability // Междунар. науч. конф. "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация"к 100-летию со дня рождения Е.А. Барбашина (24-29 сентября 2018 г., Минск, Белоруссия). – Минск, 2018. – С. 12-14.
9. Репин Ю. М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ. – 1965. – **29**, №2. – С. 226–245.
10. Іліка С.А., Матвій О.В., Піддубна Л.А., Черевко І.М. Схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування // Буковинський математичний журнал. – Т.2, № 2-3. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2014. - С. 92-96.
11. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М. : Гостехиздат, 1959. – 212 с.
12. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. – М. : Наука, 1971. – 296 с.
13. 13. Маник О.(наук. кер. -Черевко І.М.) Моделювання на ЕОМ лінійних диференціаль-них рівнянь із запізненням // Матеріали студентської наукової конференції Чер-нівецького національного університету імені Юрія Федьковича (25-27 квітня 2017 р). Математичні науки. - Чернівці : ЧНУ, 2017 . - С. 39-40.
14. Хусаинов Д. Я., Юнькова Е. А. Оценка величины запаздывания в линейных дифференциальных системах с отклоняющимся аргументом // Украинский математический журнал. – 1983. – **35**, №2. – С. 261–264.