УДК 517.925

©2018 р. **Н. П. Колун**

Військова академія (м. Одеса)

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ПОВІЛЬНО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ РІЗНОГО ТИПУ В ПРАВІЙ ЧАСТИНІ

Встановлюються умови існування та асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) $P_\omega(Y_0, 0)$– розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять в правій частині суму доданків з нелінійностями різного типу.

Ключові слова: диференціальні рівняння другого порядку, умови існування, асимптотичні зображення, повільно змінні розв'язки.

Existence conditions and asymptotic as $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) representations are obtained for $P_\omega(Y_0, 0)$– solutions of second-order differential equations whose right-hand side contains a sum of terms with nonlinearities of different types.

Keywords: second-order differential equations, existence conditions, asymptotic representations, slowly variable solutions.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y), \tag{1}$$

в якому $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = \overline{1, m})$, $p_i : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1, m})$ – неперервні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$; $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1, m})$, де Δ_{Y_0} - однобічний окіл Y_0, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, є неперервними функціями при $i = \overline{1, l}$ та двічі неперервно диференційовними при $i = \overline{l+1, m}$, причому для кожного $i \in \{1, ..., l\}$ при деякому $\sigma_i \in \mathbb{R}$ виконуються умови

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i} \tag{2}$$

для будь-якого $\lambda > 0$, а для кожного $i \in \{l+1, ..., m\}$ –

$$\varphi_i'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \tag{3}$$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) \in \{0, +\infty\}, \tag{4}$$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1. \tag{5}$$

Функції φ_i $(i = \overline{1, l})$, що задовольняють умови (2), є правильно змінними при $y \to Y_0$ функціями порядків σ_i $(i = \overline{1, l})$ (див. монографію Є. Сенети [18], Розділ 1, §1, С.9). Для них справедливі зображення виду

$$\varphi_i(y) = \mid y \mid^{\sigma_i} L_i(y) \quad (i = \overline{1, l}), \tag{6}$$

де L_i $(i = \overline{1, l})$ – повільно змінні функції при $y \to Y_0$, тобто такі, що

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{L_i(\lambda y)}{L_i(y)} = 1 \quad \text{для будь-якого} \quad \lambda > 0.$$

Із умов (3), (4) та (5) безпосередньо випливають граничні співвідношення

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} = \pm\infty \quad (i = \overline{l+1, m}), \tag{7}$$

в силу яких при $i \in \{l+1, ..., m\}$ кожна з функцій φ_i та її похідна першого порядку є швидко змінними при $y \to Y_0$ функціями (див. монографію В. Марича [14], Розділ 3, §3.4, Леми 3.2, 3.3, С.91-92).

Означення 1. *Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови*

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \tag{8}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \textit{або} & 0, \\ \textit{або} & \pm\infty, \end{cases} \tag{9}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{10}$$

Такого виду розв'язки досліджувалися в роботі В.А. Касьянової [11] у випадку, коли всі нелінійності в правій частині рівняння (1) є правильно змінними при $y \to Y_0$ функціями, та в роботах В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [7-9] для двочленного диференціального рівняння другого порядку зі швидко змінною нелінійністю в правій частині. Двочленні диференціальні рівняння з правильно змінною нелінійністю вивчалися в [12, 15-17, 19]. У роботах [3-6] були отримані необхідні та достатні умови існування, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків рівняння (1) у випадках, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ та $\lambda_0 = 1$. У [13] досліджувався випадок, коли $\lambda_0 = 0$ і в правій частині рівняння (1) головним є доданок з правильно змінною нелінійністю.

Метою цієї роботи є встановлення необхідних та достатніх умов існування $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язків y диференціального рівняння (1), а також асимптотичних при $t \uparrow \omega$ зображень для таких розв'язків та їх похідних першого порядку у випадку, коли для деякого $s \in \{l+1, ..., m\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \tag{11}$$

при $i \in \{1, ..., m\} \setminus \{s\}$, тобто коли на кожному такому розв'язку рівняння (1) права частина рівняння еквівалентна при $t \uparrow \omega$ одному доданку зі швидко змінною нелінійністю.

При вивченні $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язків диференціального рівняння (1) знадобиться одне допоміжне твердження про їх апріорні асимптотичні властивості.

Введемо функцію $\pi_\omega : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, вважаючи, що

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Для кожного $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язку диференціального рівняння (1)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0 \tag{12}$$

і у випадку існування (скінченої або рівної $\pm\infty$) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1. \tag{13}$$

Справедливість цього твердження безпосередньо випливає із роботи В.М. Євтухова [2] (див. наслідок 10.1).

В подальшому будемо вважати, що

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b),$$

де $\Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[$, якщо Δ_{Y_0} - лівий окіл Y_0 і $\Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b]$, якщо Δ_{Y_0} - правий окіл Y_0. Число b при цьому задовольняє нерівності

$$|b| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0,$$

$$b > 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty,$$

$$b < -1 \quad \text{при} \quad Y_0 = -\infty.$$

У роботі В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [9], використовуючи результати із монографії N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels [1] (Розділ 3, п.3.10, стор. 178), було показано, що двічі неперервно диференційовна функція $f : \Delta_{Y_0}(b) \to]0, +\infty[$, що задовольняє умови

$$f'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}(b),$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} f(y) = Z_0 \in \{0, +\infty\},$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{f''(y)f(y)}{f'^2(y)} = 1$$

належить так званому класу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, який був отриманий шляхом розширення класу Γ, введеному Л. Ханом (див., наприклад, [1], Розділ 3, п.3.10, стор.175). При цьому були вказані властивості таких функцій, які будуть використані в подальшому.

Введемо два числа

$$\nu_0 = \text{sign} b,$$

$$\nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ -1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b]. \end{cases}$$

Враховуючи означення $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – розв'язку диференціального рівняння (1), зауважимо, що числа ν_0 та ν_1 визначають знаки будь-якого $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – розв'язку та його першої похідної (відповідно) в деякому лівому околі ω. При цьому зрозуміло, що умови

$$\nu_0\nu_1 = -1, \quad \text{якщо} \quad Y_0 = 0,$$

$$\nu_0\nu_1 = 1, \quad \text{якщо} \quad Y_0 = \pm\infty$$

є необхідними для існування $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – розв'язків. якщо ж для таких розв'язків рівняння (1), крім того, виконуються умови (11), то $\operatorname{sign} y''(t) = \alpha_s$ в деякому лівому околі ω і при цьому

$$\nu_1\alpha_s = -1, \quad \text{якщо} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0,$$

$$\nu_1\alpha_s = 1, \quad \text{якщо} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty.$$

Покладемо при $s \in \{l+1,...,m\}$

$$\mu_s = \operatorname{sign}\varphi_s'(y),$$

$$H_s(y) = \int\limits_{B_s}^{y} \frac{du}{\varphi_s(u)},$$

де

$$B_s = \begin{cases} b, & \text{якщо} \quad \int\limits_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_s(y)} = \pm\infty, \\ Y_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_s(y)} = \text{const}. \end{cases}$$

Так як $H_s'(y) = \frac{1}{\varphi_s(y)} > 0$ при $y \in \Delta_{Y_0}(b)$, то H_s зростає на $\Delta_{Y_0}(b)$ та існує обернена функція $H_s^{-1} : \Delta_{Z_s}(c_s) \to \Delta_{Y_0}(b)$, де в силу (4) та зростання H_s^{-1}

$$Z_s = \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} H_s(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases} \tag{14}$$

$$\Delta_{Z_s}(c_s) = \begin{cases} [c_s, Z_s[, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ ]Z_s, c_s], & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b], \end{cases}$$

$$c_s = H_s(b).$$

В силу правила Лопіталя у формі Штольця та умови (5)

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{H_s(y)}{\frac{1}{\varphi_s'(y)}} = \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\frac{1}{\varphi_s(y)}}{-\frac{\varphi_s''(y)}{\varphi_s'^2(y)}} =$$

$$= - \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_s'^2(y)}{\varphi_s''(y)\varphi_s(y)} = -1.$$

Отже

$$H_s(y) \sim -\frac{1}{\varphi_s'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \tag{15}$$

і

$$\operatorname{sign} H_s(y) = -\mu_s \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}(b). \tag{16}$$

Із (15) також випливає, що

$$\frac{H_s'(y)}{H_s(y)} \sim -\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \tag{17}$$

$$\frac{H_s''(y)H_s(y)}{H_s'^2(y)} \sim 1 \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{18}$$

Таким чином, функція H_s належить класу $\Gamma_{Y_0}(Z_s)$ і згідно з лемою 2.5 із работи В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [9] в якості доповнючої функції для H_s може бути обрана одна із еквівалентних функцій

$$\frac{H_s'(y)}{H_s''(y)} \sim \frac{H_s(y)}{H_s'(y)} \sim -\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Так як

$$\lim_{z\to Z_s} \frac{z(\varphi_s(H_s^{-1}(z)))'}{\varphi_s(H_s^{-1}(z))} = -1,$$

$$\lim_{z\to Z_s} \frac{z(\varphi_s'(H_i^{-1}(z)))'}{\varphi_s'(H_s^{-1}(z))} = -1,$$

то функції $\varphi_s(H_s^{-1}(z))$ і $\varphi_s'(H_s^{-1}(z))$ є правильно змінними функціями порядку -1 при $z \to Z_s$.

В подальшому знадобляться також позначення

$$J_s(t) = \int\limits_{A_s}^{t} \pi_\omega(\tau)p_{0s}(\tau)d\tau,$$

$$J_{\varphi_s}(t) = \int\limits_{A_{\varphi_s}}^{t} p_{0s}(\tau)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(\tau)))d\tau,$$

в яких A_s, $A_{\varphi_s} \in \{a, \omega\}$ і обираються наступним чином

$$A_s = a, \quad \text{якщо} \quad \int\limits_a^{\omega} \pi_\omega(\tau)p_{0s}(\tau)d\tau = \pm\infty,$$

$$A_s = \omega, \quad \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega \pi_\omega(\tau) p_{0s}(\tau) d\tau < +\infty,$$

$$A_{\varphi_s} = a, \quad \text{якщо}$$

$$\int\limits_{t_{\varphi_s}}^\omega p_{0s}(\tau) \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(\tau))) d\tau = \pm\infty,$$

$$A_{\varphi_s} = \omega, \quad \text{якщо}$$

$$\int\limits_{t_{\varphi_s}}^\omega p_{0s}(\tau) \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(\tau))) d\tau < +\infty,$$

$$t_{\varphi_s} \in [a, \omega[.$$

Введемо також функції

$$G_s(t) = \frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\Bigg|_{y=H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))},$$

$$\Phi_s(t) = \frac{y\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}}\Bigg|_{y=H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))}.$$

В цих позначеннях $p_{0s} : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – неперервна функція, така, що $p_{0s}(t) \sim p_s(t)$ при $t \uparrow \omega$.

Теорема 1. *Нехай для деякого $s \in \{l+1, ..., m\}$ функція p_s зображена у вигляді*

$$p_s(t) = p_{0s}(t)[1 + r_s(t)], \tag{19}$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_s(t) = 0, \tag{20}$$

$p_{0s} : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – неперервно диференційовна функція, $r_s : [a, \omega[\to] - 1, +\infty[$ – неперервна функція, існує скінчена або рівна $\pm\infty$ границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J_{\varphi_s}'(t)}{J_{\varphi_s}(t)}$$

і для будь-якого $i \in \{l+1, ..., m\}$ виконується умова

$$\frac{\varphi_s(y)\varphi_i'(y)}{\varphi_s'(y)\varphi_i(y)} = O(1) \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{21}$$

Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язків, які задовольняють при $i \in \{1, ..., m\} \setminus \{s\}$ умови (11), необхідно, щоб виконувались нерівності

$$\alpha_s \nu_1 \pi_\omega(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{22}$$

$$\alpha_s \mu_s J_s(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[\tag{23}$$

та граничні співвідношення

$$-\alpha_s \lim_{t\uparrow\omega} J_s(t) = Z_s, \tag{24}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J_{\varphi_s}'(t)}{J_{\varphi_s}(t)} = -1, \tag{25}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega^2(t) p_{0s}(t) \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))} = 0, \tag{26}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} = 0 \tag{27}$$

при будь-якому $i \in \{1, ..., m\} \setminus \{s\}$. Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення

$$y(t) = H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\left[1 + \frac{o(1)}{G_s(t)}\right], \tag{28}$$

$$y'(t) = -\alpha_s \pi_\omega(t) p_{0s}(t) \times \\ \times \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))[1 + o(1)]. \tag{29}$$

Доведення. Нехай $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ – довільний $P_\omega(Y_0, 0)$– розв'язок диференціального рівняння (1), який задовольняє при деякому $s \in \{l+1, ..., m\}$ умови (11). Тоді в силу (1), (11) і (19)

$$y''(t) \sim \alpha_s p_{0s}(t) \varphi_s(y(t)) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{30}$$

звідки зрозуміло, що

$$\text{sign} y''(t) = \alpha_s.$$

Із (13), враховуючи останню рівність, випливає справедливість нерівності (22). Крім того, має місце співвідношення

$$y''(t) \sim -\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

в силу якого із (30) випливає, що при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_s(y(t))} = -\alpha_s \pi_\omega(t) p_{0s}(t)[1 + o(1)]. \tag{31}$$

Інтегруючи співвідношення (31) на проміжку від t_0 до t, отримаємо

$$\int\limits_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{du}{\varphi_s(u)} = -\alpha_s \int\limits_{t_0}^{t} \pi_\omega(\tau) p_{0s}(\tau)[1+o(1)]\,d\tau$$

при $t \uparrow \omega$. Оскільки згідно з означенням $P_\omega(Y_0,0)$–розв'язку $y(t) \to Y_0$ при $t \uparrow \omega$, то звідси випливає, що невласні інтеграли

$$\int\limits_{y(t_0)}^{Y_0} \frac{du}{\varphi_s(u)} \quad \text{і} \quad \int\limits_{t_0}^{\omega} \pi_\omega(\tau) p_{0s}(\tau)\,d\tau$$

збігаються або розбігаються разом. Зважаючи на цей факт та на правило вибору границь інтегрування A_s та B_s в раніше введених функціях J_s і H_s, встановлене вище співвідношення може бути записане у вигляді

$$H_s(y(t)) = -\alpha_s J_s(t)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega, \quad (32)$$

звідки, враховуючи властивості (14) і (15) функції H_s, випливає справедливість нерівності (23) і умови (24). Крім того, із (32) знаходимо, що при $t \uparrow \omega$

$$y(t) = H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)[1+o(1)]). \quad (33)$$

Так як виконується умова (24), функція $H_s^{-1}(z)$ є повільно змінною, а $\varphi_s(H_s^{-1}(z))$ – правильно змінною порядку -1 при $z \to Z_s$, то згідно з теоремою про рівномірну збіжність для повільно змінних функцій (див., наприклад, монографію Є. Сенети [11], стор.3)

$$H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)[1+o(1)]) =$$
$$= H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega,$$
$$\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)[1+o(1)])) =$$
$$= \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Зважаючи на ці формули і (33) із (31) та (30) випливає справедливість (29) та асимптотичних при $t \uparrow \omega$ співвідношень

$$y(t) \sim H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)), \quad (34)$$

$$y''(t) \sim \alpha_s p_{0s}(t) \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))). \quad (35)$$

Інтегруючи останню з них на проміжку від t_{φ_s} до t, де $t_{\varphi_s} \in [t_0, \omega[$ обрано таким, щоб $-\alpha_s J_s(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_{\varphi_s}, \omega[$, отримаємо, враховуючи ознаення $P_\omega(Y_0,0)$–розв'язку, співвідношення виду

$$y'(t) = \alpha_s J_{\varphi_s}(t)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Звідси та із (29) випливає умова (25).

Справедливість зображення (28) безпосередньо випливає із (33) і леми 2.3 із роботи В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [9], якщо врахувати, що $H_s \in \Gamma_{Y_0}(Z_s)$ з доповнюючою функцією $g_s(y) = -\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$.

В силу сформульованих раніше апріорних властивостей $P_\omega(Y_0,0)$– розв'язків маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega^2(t) y''(t)}{y(t)} =$$
$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} \cdot \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = 0 \cdot (-1) = 0.$$

Зважаючи на цю границю та на асимптотичні співвідношення (34) і (35), безпосередньо випливає справедливість умови (26).

Функції φ_i $(i = \overline{1,l})$ є правильно змінними при $y \to Y_0$. H_s^{-1} є повільно змінною при $z \to Z_s$, як обернена до швидко змінної функції H_s. Крім того, функція $z(t) = -\alpha_s J_s(t)[1+o(1)]$, враховуючи (24) і той факт, що $-\alpha_s J_s(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_{\varphi_s}, \omega[$, така, що існує $t_1 \in [t_{\varphi_s}, \omega[$, для якого $\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = Z_s$ і $z(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_1, \omega[$. Отже, маємо

$$\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)[1+o(1)])) =$$
$$= \varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))[1+o(1)] \quad (36)$$

при $t \uparrow \omega$ $(i = \overline{1,l})$. Якщо ж $i \in \{l+1,...,m\} \setminus \{s\}$, то кожна із функцій φ_i задовольняє умови леми 2.5 із роботи В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [9] і у якості їх доповнюючих функцій можуть бути обрані відповідно функції $g_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{\varphi_i'(y)}$. Тоді, згідно з цією лемою, враховуючи умови $\lim\limits_{t\uparrow\omega} H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) = Y_0$, $H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) \in \Delta_{Y_0}(b)$ при $t \in [t_1, \omega[$ і (21), отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi_i\Big(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) + \frac{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} o(1)\Big)}{\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} =$$

$$= \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_i\Big(y+g_i(y)\frac{\varphi_i'(y)\varphi_s(y)}{\varphi_i(y)\varphi_s'(y)}o(1)\Big)}{\varphi_i(y)} =$$

$$= \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_i\Big(y+g_i(y)O(1)o(1)\Big)}{\varphi_i(y)} =$$

$$= \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_i\Big(y+g_i(y)o(1)\Big)}{\varphi_i(y)} = 1.$$

Тому при $i\in\{l+1,...,m\}\setminus\{s\}$

$$\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))+\tfrac{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}{\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}o(1)\right)=$$

$$=\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

звідки, зважаючи на (7) і (28), маємо

$$\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)[1+o(1)]))=$$
$$=\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))[1+o(1)] \tag{37}$$

при $t\uparrow\omega$ $(i=\overline{l+1,m})$.

Із (28), (36) і (37) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))[1+o(1)]}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))[1+o(1)]}=$$
$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))} \quad (i=\overline{1,m}).$$

Із останньої рівності та (11) випливає справедливість умов (27). Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (19)-(27) і*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_s'(t)}{J_s(t)}=\gamma_s, \quad \text{де} \quad \gamma_s\in\mathbb{R}. \tag{38}$$

Тоді: 1) якщо $\gamma_s>0$ або $\gamma_s=0$ і $\alpha_s\mu_s=1$, то рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,0)$– розв'язків, які допускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (28), (29); 2) якщо $\gamma_s<0$ або $\gamma_s=0$ і $\alpha_s\mu_s=-1$, то при $\omega<+\infty$ рівняння (1) має двопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,0)$– розв'язків, які допускають асимптотичні при $t\uparrow\omega$ зображення (28), (29), а при $\omega=+\infty$ – щонайменш один такий розв'язок.

Доведення. Враховуючи (14), (15), (16), (23) і (24), підберемо число $t_{\varphi_s}\in[a,\omega[$ так, щоб $-\alpha_sJ_s(t)\in\Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t\in[t_{\varphi_s},\omega[$. При такому виборі t_{φ_s} на проміжку $[t_{\varphi_s},\omega[$ визначена функція J_{φ_s}, а також функції

$$H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)), \quad \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))),$$
$$\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))),$$

причому

$$\lim_{t\uparrow\omega}H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))=Y_0 \tag{39}$$

і в силу (7)

$$\lim_{t\uparrow\omega}G_s(t)=\pm\infty. \tag{40}$$

Застосовуючи до рівняння (1) перетворення

$$\begin{aligned} y(t)&=H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\left[1+\tfrac{y_1(t)}{G_s(t)}\right],\\ y'(t)&=\alpha_sJ_{\varphi_s}(t)[1+y_2(t)], \end{aligned} \tag{41}$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1'=h_1(t)[1+q_1(t)-q_2(t)y_1+q_1(t)y_2],\\ y_2'=h_2(t)[y_1-y_2+R(t,y_1)+f(t,y_1)], \end{cases} \tag{42}$$

в якій

$$h_1(t)=\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))),$$

$$h_2(t)=\frac{J_{\varphi_s}'(t)}{J_{\varphi_s}(t)}, \quad q_1(t)=\frac{J_{\varphi_s}(t)}{\pi_\omega(t)J_{\varphi_s}'(t)},$$

$$q_2(t)=\left.\frac{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\right|_{y=H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))},$$

$$f(t,y_1)=(1+y_1+R(t,y_1))\times$$
$$\times(R_1(t,y_1)+r_s(t)(1+R_1(t,y_1))),$$

$$R(t,y_1)=\frac{\varphi_s(Y(t,y_1))}{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}-1-y_1,$$

$$R_1(t,y_1)=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{p_i(t)\varphi_i(Y(t,y_1))}{p_s(t)\varphi_s(Y(t,y_1))},$$

$$Y(t,y_1)=H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))+$$
$$+\frac{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}{\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}y_1.$$

Функція $R(t,y_1)$ така, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існують $\delta\in]0,1[$ і $t_1\in[t_{\varphi_s},\omega[$ такі, що

$$|R(t,y_1)|\le(1+\varepsilon)|y_1|^2$$

при $t\in[t_1,\omega[$ і $y_1\in D_{1\delta}$, де

$$y_1\in D_{1\delta}=\{y_1:|y_1|\le\delta\}.$$

Обираючи довільним чином число $\varepsilon>0$, далі систему рівнянь (42) розглянемо на множині

$$\Omega=[t_1,\omega[\times D_{1\delta}\times D_{2\delta},$$

де

$$D_{i\delta}=\{y_i:|y_i|\le\delta\}\quad(i=1,2).$$

Покажемо, що функція $R_1(t,y_1)$ така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}R_1(t,y_1)=0\quad\text{рівномірно за}\quad y_1\in D_{1\delta}.$$

Так як функції φ_i при $i\in\{1,...,l\}$ є правильно змінними при $y\to Y_0\quad(y\in\Delta_{Y_0}(b))$ порядків σ_i, то в силу зображень (6), враховуючи властивості повільно змінних функцій і умови (40), маємо

$$\varphi_i(Y(t,y_1))=$$

$$=\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right)=$$

$$=\left|H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right|^{\sigma_i}\times$$

$$\times L_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right)=$$

$$=\left|H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right|^{\sigma_i}\times$$

$$\times L_i(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))(1+r_i(t,y_1))=$$

$$=\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]^{\sigma_i}\times$$

$$\times(1+r_i(t,y_1)),\quad(i=\overline{1,l})$$

де функції $r_i(t,y_1)$ такі, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}r_i(t,y_1)=0\quad\text{рівномірно за}\quad y_1\in D_{1\delta}.$$

Оскільки функція φ_s належить класу $\Gamma_{Y_0}(Z_s)$ і в якості її доповнюючої функції може бути обрана функція $g_s(y)=\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$, то з леми 2.3 із роботи В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [9] отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\varphi_s\Big(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))+\frac{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}{\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}y_1\Big)}{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}=$$

$$=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\varphi_s\Big(y+\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}\cdot y_1\Big)}{\varphi_s(y)}=e^{y_1}.$$

Тому

$$\varphi_s(Y(t,y_1))=$$

$$\varphi_s\Big(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))+\frac{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}{\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}y_1\Big)=$$

$$=e^{y_1}\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))[1+r_s(t,y_1)]$$

при $t\uparrow\omega$, де функція $r_s(t,y_1)$ така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}r_s(t,y_1)=0\quad\text{рівномірно за}\quad y_1\in D_{1\delta}.$$

В силу вищесказаного і (27) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{i=1}^{l}\frac{p_i(t)\varphi_i(Y(t,y_1))}{p_s(t)\varphi_s(Y(t,y_1))}=0\qquad(43)$$

рівномірно за $y_1\in D_{1\delta}$.

Якщо ж $i\in\{l+1,...,m\}\setminus\{s\}$, то в силу виконання умов (21) для будь-якого $C_i>1$ існує $t_{2i}\in[t_1,\omega[$ таке, що при $t\in[t_{2i},\omega[$, зважаючи на монотонність функції φ_i на проміжку $\Delta_{Y_0}(b)$

$$\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))-\frac{\varphi_i\big(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\big)}{\varphi_i'\big(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\big)}C_i|y_1|\right)\le$$

$$\le\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))+\frac{\varphi_s\big(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\big)}{\varphi_s'\big(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\big)}y_1\right)\le$$

$$\le\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))+\frac{\varphi_i\big(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\big)}{\varphi_i'\big(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\big)}C_i|y_1|\right).$$

Так як функція φ_i при $i\in\{l+1,...,m\}$ належить класу $\Gamma_{Y_0}(Z_i)$ і має доповнюючу функцію виду $g_i(y)=\frac{\varphi_i(y)}{\varphi_i'(y)}$, то, переходячи в останній нерівності до границі при $t\uparrow\omega$, враховуючи властивості функцій із класу $\Gamma_{Y_0}(Z_i)$ (див. роботу В.М. Євтухова, А.Г. Черникової [9]), отримаємо

$$e^{-C_i|y_1|}\lim_{t\uparrow\omega}\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\right)\le$$

$$\le\lim_{t\uparrow\omega}\varphi_i(Y(t,y_1))\le$$

$$\leq e^{C_i|y_1|} \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_i \left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right).$$

В силу останньої нерівності та раніше записаного зображення функції $\varphi_s(Y(t,y_1))$ для кожного $i \in \{l+1,...,m\} \setminus \{s\}$ маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)e^{-C_i|y_1|}\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right)}{p_s(t)e^{y_1}\varphi_s\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right)(1+r_s(t,y_1))} \leq$$

$$\leq \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(Y(t,y_1))}{p_s(t)\varphi_s(Y(t,y_1))} \leq$$

$$\leq \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)e^{C_i|y_1|}\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right)}{p_s(t)e^{y_1}\varphi_s\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right)(1+r_s(t,y_1))},$$

звідки, зважаючи на (27), випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \sum_{\substack{i=l+1\\ i\neq s}}^{m} \frac{p_i(t)\varphi_i(Y(t,y_1))}{p_s(t)\varphi_s(Y(t,y_1))} = 0$$

рівномірно за $y_1 \in D_{1\delta}$. Із останнього співвідношення і (43) маємо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_1(t,y_1) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad y_1 \in D_{1\delta}.$$

В силу (25), рівності

$$\frac{\varphi_s''(y)\varphi_s(y)}{\varphi_s'^2(y)} = \frac{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2} + 1$$

і умови (5), а також (39)

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_2(t) = 0. \tag{44}$$

Крім того, з використанням (15) і (25), маємо

$$\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \frac{\alpha_s \pi_\omega(t) J_{\varphi_s}(t)\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} \sim$$

$$\sim \frac{\pi_\omega(t) J_{\varphi_s}(t)}{J_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} \sim \frac{J_s'(t)}{J_s(t)} \cdot \frac{J_{\varphi_s}(t)}{J_{\varphi_s}'(t)} \sim$$

$$\sim -\frac{\pi_\omega(t) J_s'(t)}{J_s(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Таким чином, враховуючи (38),

$$\frac{h_1(t)}{h_2(t)} \sim -\gamma_s \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{45}$$

Тепер розглянемо окремо випадки, коли $\gamma_s \neq 0$, і коли $\gamma_s = 0$.

Для початку припустимо, що $\gamma_s \neq 0$. У цьому випадку систему (42) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} y_1' = h_2(t)\Big[(1+q_1(t))\frac{h_1(t)}{h_2(t)} - q_2(t)\frac{h_1(t)}{h_2(t)}y_1 + \\ \qquad +q_1(t)\frac{h_1(t)}{h_2(t)}y_2\Big], \\ y_2' = h_2(t)[y_1 - y_2 + R(t,y_1) + f(t,y_1)]. \end{cases}$$

Тут, в силу умов (44) і (45)

$$\lim_{t\uparrow\omega}(1+q_1(t))\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_1(t)\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \gamma_s, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_2(t)\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0.$$

Тому ця система рівнянь має вид

$$\begin{cases} y_1' = h_2(t)[F(t,y_1,y_2) + \gamma_s y_2] \\ y_2' = h_2(t)[y_1 - y_2 + R(t,y_1) + f(t,y_1)], \end{cases} \tag{46}$$

де функція F така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} F(t,y_1,y_2) = 0$$

рівномірно за $y_1, y_2 \in [-\delta, \delta]$.

Характеристичне рівняння матриці коефіцієнтів, що стоять в квадратних дужках системи при y_1 та y_2, виглядає наступним чином

$$\lambda^2 + \lambda - \gamma_s = 0.$$

Це рівняння при $\gamma_s > 0$ має один додатній корінь та один від'ємний, а при $\gamma_s < 0$ – два кореня з від'ємною дійсною частиною. Крім того, враховуючи вид функції J_{φ_s} і (25), маємо, що при $t \uparrow \omega$

$$\int_{t_0}^{t} h_2(\tau)\, d\tau = \ln|J_{\varphi_s}(\tau)|\Big|_{t_0}^{t} \to \pm\infty \tag{47}$$

і при $t \in [t_0, \omega[$

$$\mathrm{sign} h_2(t) = -\mathrm{sign}\pi_\omega(t). \tag{48}$$

Крім того, в силу раніше вказаних властивостей функцій R, R_1 та формули (20), маємо

$$\lim_{y_1\to 0} \frac{R(t,y_1)}{|y_1|} = 0 \tag{49}$$

рівномірно за $t \in [t_0, \omega[$,

$$\lim_{t\uparrow\omega} f(t,y_1) = 0 \tag{50}$$

рівномірно за $y_1 \in D_{1\delta}$.

Тим самим показано, що для системи диференціальних рівнянь (46) виконуються всі умови теореми 2.2 із роботи В.М. Євтухова, А.М. Самойленка [10]. Згідно з цією теоремою система рівнянь (46) має щонайменш один розв'язок $(y_1, y_2) : [t_*, \omega[\to \mathbb{R}^2$ ($t_* \in [t_0, \omega[$), який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$, причому при $\gamma_s > 0$ існує однопараметрична сім'я таких розв'язків, а при $\gamma_s < 0$ і $\omega < +\infty$ – двопараметрична сім'я розв'язків, що прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Кожному із них в силу заміни (41) відповідає розв'язок $y : [t_*, \omega[\to \mathbb{R}$ ($t_* \in [a, \omega[$) диференціального рівняння (1), який припускає асимптотичні зображення (28), (29), причому з використанням умов (23)-(25) легко впевнитись у тому, що вони є $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язками.

Таким чином, справедливість теореми 2 при $\gamma_s \neq 0$ встановлена.

Припустимо тепер, що $\gamma_s = 0$. У цьому випадку, в силу асимптотичного співвідношення (45), умови (25) і нерівності (23), маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0, \tag{51}$$

$$\int_{t_0}^{t} h_1(\tau)\, d\tau \to \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{52}$$

$$\mathrm{sign} h_1(t) = \alpha_s \mu_s \mathrm{sign} \pi_\omega(t) \tag{53}$$

при $t \in [t_0, \omega[$.

Крім того, маємо

$$h_1^{-1}(t) \left(\frac{h_1(t)}{h_2(t)}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\alpha_s \pi_\omega(t) p_{0s}(t) \varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha_s \pi_\omega(t) J_{\varphi_s}(t) \varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}\right)' =$$

$$= \frac{J_{\varphi_s}(t)}{\pi_\omega(t) J'_{\varphi_s}(t)} + 1 -$$

$$- \frac{\alpha_s J_s'(t) J_{\varphi_s}(t) \varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{J'_{\varphi_s}(t)} q_2(t) =$$

$$= \frac{J_{\varphi_s}(t)}{\pi_\omega(t) J'_{\varphi_s}(t)} + 1 + \frac{J_s'(t)}{J_s(t)} \frac{J_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)} \times$$

$$\times q_2(t)[1 + o(1)] \to 0 \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{54}$$

Далі, враховуючи умови (44), перепишемо систему (46) у вигляді

$$\begin{cases} y_1' = h_1(t)[F_1(t, y_1, y_2) - y_2] \\ y_2' = h_2(t)[y_1 - y_2 + R(t, y_1) + f(t, y_1)], \end{cases} \tag{55}$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} F_1(t, y_1, y_2) = 0$$

рівномірно за $y_1,\ y_2 \in [-\delta, \delta]$.

Тут коефіцієнт при y_2 у другому рівнянні системи (55) відмінний від нуля (дорівнює -1) і визначник постійної матриці коефіцієнтів, які стоять при y_1 та y_2 в квадратних дужках рівнянь цієї системи також відмінний від нуля (дорівнює 1). В силу цих властивостей, а також умов (47)–(54), для системи диференціальних рівнянь (55) виконані всі умови теореми 2.6 із роботи В.М. Євтухова, А.М. Самойленка [10]. Згідно з цією теоремою система диференціальних рівнянь (55) має щонайменш один розв'язок $(y_1, y_2) : [t_*, \omega[\to \mathbb{R}^2$ ($t_* \in [t_0, \omega[$), який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$, причому при $\omega < +\infty$ існує однопараметрична сім'я таких розв'язків у випадку, коли $\alpha_s \mu_s = 1$, і двопараметрична сім'я – у випадку, коли $\alpha_s \mu_s = -1$, а при $\omega = +\infty$ у неї існує однопараметрична сім'я таких розв'язків у випадку, коли $\alpha_s \mu_s = 1$. Кожному із них в силу заміни змінних (41) і умов (23)–(25) відповідає $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язок $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ ($t_* \in [a, \omega[$) диференціального рівняння (1), який припускає асимптотичні зображення (28), (29). Отже, теорема 2 повністю доведена.

В подальшому разом з введеними раніше будемо використовувати також позначення

$$E_s(t) = \alpha_s \pi_\omega^2(t) p_{0s}(t) \varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))),$$

$$\eta_s = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{E_s(t) \Phi_s(t)}{G_s(t)},$$

$$\psi_s(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{|E_s(\tau)|^{\frac{1}{2}}}{|\pi_\omega(\tau)|} d\tau,$$

де t_0 – деяке число із проміжку $[a, \omega[$.

Теорема 3. *Нехай для деякого $s \in \{l+1, ..., m\}$ функція p_s зображена у вигляді*

(19). *Нехай, крім того, виконуються умови* (20)-(27),

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_s'(t)}{J_s(t)}=\pm\infty \tag{56}$$

та існують скінчені або рівні $\pm\infty$ *границі*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}, \tag{57}$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\cdot\sqrt{\left|\frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|}, \tag{58}$$

$$\eta_s=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{E_s(t)\Phi_s(t)}{G_s(t)},\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\psi''_s(t)\psi_s(t)}{\psi'^2_s(t)}. \tag{59}$$

Тоді: 1) якщо $\alpha_s\mu_s=1$, *то у диференціального рівняння* (1) *існує однопараметрична сім'я* $P_\omega(Y_0,0)$ *– розв'язків з асимптотичними зображеннями* (28), (29), *причому таких, що їх похідна задовольняє асимптотичне співвідношення*

$$y'(t)=-\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))\times$$
$$\times[1+|E_s(t)|^{-\frac{1}{2}}\cdot o(1)]\quad \textit{при}\quad t\uparrow\omega; \tag{60}$$

2) якщо $\alpha_s\mu_s=-1$ *і виконуються умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\psi_s(t)}{E_s(t)}=0\quad \textit{при}\quad \eta_s=0\quad , \tag{61}$$

$$\eta_s\neq\ \frac{1}{3};\quad \lim_{t\uparrow\omega}\psi_s(t)r_s(t)=0, \tag{62}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\psi_s^2(t)\left[r_s(t)+2+\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}\right]=0, \tag{63}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\psi_s^2(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}=0, \tag{64}$$

то у диференціального рівняння (1) *існують* $P_\omega(Y_0,0)$*–розв'язки, які припускають асимптотичні при* $t\uparrow\omega$ *зображення*

$$y(t)=H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\left[1+\frac{o(1)}{G_s(t)\psi_s(t)}\right], \tag{65}$$

$$y'(t)=-\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))\times$$
$$\times[1+|E_s(t)|^{-\frac{1}{2}}\psi_s^{-1}(t)\cdot o(1)], \tag{66}$$

причому у випадку, коли $\eta_s\in(0,1/3)$ *або* $\eta_s=0$ *і* $\alpha_s\nu_1=1$, *існує двопараметрична сім'я таких розв'язків.*

Доведення. У роботі В.М. Євтухова та А.Г. Черникової [8] з заміною в ній функції φ на φ_s було показано, що якщо границі (57) та (58) існують, то

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}=-2, \tag{67}$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\cdot\sqrt{\left|\frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|}=0. \tag{68}$$

Крім того, в силу (15),(16) і (56) маємо

$$E_s(t)\sim-\frac{\alpha_s\pi^2_\omega(t)p_{0s}(t)}{H_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}=$$
$$=\frac{\pi_\omega(t)J_s'(t)}{J_s(t)}\to\pm\infty\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{69}$$

Рівняння (1) за допомогою перетворення

$$\begin{aligned}&y(t)=H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\left[1+\tfrac{y_1(t)}{G_s(t)}\right],\\ &y'(t)=-\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\times\\ &\times\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))[1+y_2(t)]\end{aligned} \tag{70}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}y_1'=-\frac{E_s(t)}{\pi_\omega(t)}[q_2(t)y_1+y_2]\\ y_2'=-\frac{1}{\pi_\omega(t)}\Big[r_s(t)+2+\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}+\\ +(1+r_s(t))y_1+\Big(1+\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}\Big)y_2+\\ +R(t,y_1)+((1+r_s(t))(1+y_1)+\\ +R(t,y_1))R_1(t,y_1)\Big],\end{cases} \tag{71}$$

в якій функції R і R_1 визначаються таким же чином, як і при доведенні теореми 2.

Розглянемо систему (71) на множині Ω, яке визначено при доведенні попередньої теореми.

Щоб довести існування у диференціального рівняння (1) розв'язків, які допускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (28), (29), достатньо в силу заміни (70) встановити, що у системи диференціальних рівнянь (71) існують розв'язки, які прямують до нуля при $t\uparrow\omega$. Застосуємо до системи (71) наступні перетворення

$$y_1(t) = v_1(t), \quad y_2(t) = |E_s(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t) \quad (72)$$

і

$$\tau = \psi_s(t), \ v_1(t) = z_1(\tau), \ v_2(t) = z_2(\tau). \quad (73)$$

В результаті, враховуючи умову (22), отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} z_1' = c_{11}(\tau)z_1 + c_{12}(\tau)z_2 \\ z_2' = f(\tau) + c_{21}(\tau)z_1 + c_{22}(\tau)z_2 + \\ +Z_1(\tau, z_1) + Z_2(\tau, z_1), \end{cases} \quad (74)$$

в якій

$$c_{11}(\tau(t)) = \nu_1 \mu_s |E_s(t)|^{\frac{1}{2}} q_2(t),$$

$$c_{12}(\tau(t)) = \nu_1 \mu_s,$$

$$c_{21}(\tau(t)) = \alpha_s \nu_1 (1 + r_s(t)),$$

$$c_{22}(\tau(t)) = \alpha_s \nu_1 |E_s(t)|^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} \frac{\pi_\omega(t) J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)} + E_s(t) q_2(t) \right],$$

$$f(\tau(t)) = \alpha_s \nu_1 \left[r_s(t) + 2 + \frac{\pi_\omega(t) J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)} \right],$$

$$Z_1(\tau(t), z_1) = \alpha_s \nu_1 R(t, z_1),$$

$$Z_2(\tau(t), z_1) = \alpha_s \nu_1 ((1+r_s(t))(1+z_1) + R(t, z_1)) \times$$

$$\times R_1(t, z_1).$$

Так як зважаючи на (69)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \int_{t_1}^{t} \frac{|E_s(\tau)|^{\frac{1}{2}}}{|\pi_\omega(\tau)|} d\tau \geq \lim_{t \uparrow \omega} \int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} =$$

$$= \left| \ln \frac{|\pi_\omega(t)|}{\pi_\omega(t_1)} \right| \to +\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

то $\tau(t) \to +\infty$ при $t \uparrow \omega$ і тому в силу (20), (67), (68), (26) і властивостей функцій R і R_1 маємо

$$\lim_{\tau \to +\infty} f(\tau) = 0,$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} c_{11}(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \to +\infty} c_{12}(\tau) = \nu_1 \mu_s,$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} c_{21}(\tau) = \alpha_s \nu_1, \quad \lim_{\tau \to +\infty} c_{22}(\tau) = 0,$$

$$|Z_1(\tau, z_1)| \leq \alpha_s \nu_1 (1 + \varepsilon) |z_1|^2$$

при $\tau \in [0, +\infty[$ і $|z_1| \leq \delta$,

$$\lim_{\tau \to +\infty} Z_2(\tau, z_1) = 0$$

рівномірно за $z_1 \in [-\delta, \delta]$.

Крім того, характеристичне рівняння граничної матриці коефіцієнтів лінійної частини системи (74) має вигляд

$$\rho^2 - \alpha_s \mu_s = 0. \quad (75)$$

У випадку $\alpha_s \mu_s = 1$ коренями цього рівняння є числа $\rho_{1,2} = \pm 1$. У цьому випадку згідно з теоремою 2.2 із роботи В.М. Євтухова та А.М. Самойленка [10] система диференціальних рівнянь (74) має однопараметричну сім'ю розв'язків $(z_1, z_2) : [\tau_*, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ $(\tau_* \geq 0)$, які прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Кожному із них в силу замін (70), (70), (72), (73) відповідає $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язок $y : [t_*, \omega[\to \mathbb{R}$ $(t_* \in [a, \omega[)$ диференціального рівняння (1), який припускає асимптотичні зображення (28), (60). Отже, перше твердження теореми вірне.

Нехай тепер $\alpha_s \mu_s = -1$. Тоді корні рівняння (75) є чисто уявними і тому цей випадок є "критичним". Застосовуючи до системи (74) поступово перетворення

$$z_1(\tau) = u_1(\tau), \ z_2(\tau) = \alpha(\tau) u_1(\tau) + u_2(\tau), \quad (76)$$

де

$$\alpha(\tau(t)) = \begin{cases} \frac{\alpha_s \nu_1}{\eta_s \psi_s(t)} \quad \text{при} \quad \eta_s \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}, \\ -\frac{1}{2|E_s(t)|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при} \quad \eta_s = 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad \eta_s = \pm\infty, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_1(\tau) &= \cos\tau w_1(\tau) - \alpha_s \nu_1 \sin\tau w_2(\tau), \\ u_2(\tau) &= \alpha_s \nu_1 \sin\tau w_1(\tau) + \cos\tau w_2(\tau), \end{aligned} \quad (77)$$

$$w_i(\tau) = \frac{x_i(\tau)}{\tau} \quad (i = 1, 2), \quad (78)$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь виду

$$x_i' = p(\tau) x_i + g(\tau) \sum_{m=1}^{2} Z_{im}(\tau, x_1, x_2) \quad (i = 1, 2),$$

в якій

$$p(\tau) = \frac{1}{2}(c_{11}(\tau) + c_{22}(\tau)) + \frac{1}{\tau}, \qquad g(\tau) = \frac{1}{\tau},$$

функції Z_{ij} $(i, j = 1, 2)$ неперервні на множині $[\tau_0, +\infty[\times \mathbb{R}_0^2$, де $\mathbb{R}_0^2$ – деякий окіл точки (0,0), і в силу раніше вказаних властивостей функцій R і R_1, а також умов (62)-(64), такі, що

$$Z_{i2}(\tau, 0, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, 2)$$

на проміжку $[\tau_0, +\infty[$,

$$\lim_{\tau \to +\infty} Z_{i1}(\tau, x_1, x_2) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

рівномірно за $x_1, x_2 \in [-\delta, \delta]$,

$$\lim_{|x_1|+|x_2| \to 0} \frac{Z_{i2}(\tau, x_1, x_2)}{|x_1| + |x_2|} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

рівномірно за $\tau \in [\tau_0, +\infty[$.

Крім того, виконуються умови

$$p(\tau) \neq 0 \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_0, +\infty[,$$

$$\left| \int_{\tau_0}^{+\infty} p(x)\, dx \right| = +\infty,$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{g(\tau)}{p(\tau)} = \frac{\eta_s}{3\eta_s - 1}.$$

Тому для системи диференціальних рівнянь (74) виконуються всі умови теореми 1.2 із роботи В.М. Євтухова та А.М. Самойленка [10]. Згідно з цією теоремою система (74) має щонайменш один розв'язок $(x_1, x_2) : [\tau_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2 \quad (\tau_1 \geq \tau_0)$, який прямує до нуля при $\tau \to +\infty$, причому, якщо $\eta_s \in (0, 1/3)$ або $\eta_s = 0$ і $\alpha_s \nu_1 = 1$, то існує ціла двопараметрична сім'я таких розв'язків. Кожному такому розв'язку в силу замін (72), (73), (76)–(78) відповідає розв'язок $y : [t_2, \omega[\to \mathbb{R}$ $(t_2 \in [a, \omega[)$ диференціального рівняння (1) з асимптотичними зображеннями (65), (66). Теорема повністю доведена.

Приклади

В якості прикладу, який ілюструє отримані в цій роботі результати, розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$y'' = \alpha_1 p_1(t)|y|^{\sigma_1} + \alpha_2 p_2(t) e^{\sigma_2 y}, \qquad (79)$$

в якому $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, 2)$, $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_1 : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – неперервна функція, функція p_2 зображена у вигляді

$$p_2(t) = p_{02}(t)[1 + r_2(t)],$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_2(t) = 0,$$

$p_{02} : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – неперервно диференційовна функція, $r_2 : [a, \omega[\to] - 1, +\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, і опишемо асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$–розв'язків у випадку, коли $Y_0 = \pm\infty$ і $\lambda_0 = 0$.

Для цього рівняння маємо

$$\varphi_1(y) = |y|^{\sigma_1}, \quad \varphi_2(y) = e^{\sigma_2 y},$$

$$H_2(y) = -\frac{1}{\sigma_2} e^{-\sigma_2 y} + C,$$

$$C = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_2} e^{-\sigma_2 b}, & \text{якщо } \nu_0 \sigma_2 < 0, \\ 0, & \text{якщо } \nu_0 \sigma_2 > 0, \end{cases}$$

$$J_2(t) = \int_{A_2}^{t} \pi_\omega(\tau) p_{02}(\tau) d\tau,$$

$$J_{\varphi_2}(t) = \int_{A_{\varphi_2}}^{t} \frac{p_{02}(\tau)}{\sigma_2 C + \alpha_2 \sigma_2 J_2(\tau)} d\tau,$$

$$H_2^{-1}(-\alpha_2 J_2(t)) = \ln |\sigma_2 C + \alpha_2 \sigma_2 J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma_2}},$$

$$G_2(t) = \ln |\sigma_2 C + \alpha_2 \sigma_2 J_2(t)|^{-1},$$

$$\eta_2 = 0, \quad E_2(t) = \frac{\pi_\omega(t) J_2'(t)}{\alpha_2 C + J_2(t)},$$

$$\psi_2(t) = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{J_2'(\tau)}{\pi_\omega(\tau)(\alpha_2 C + J_2(\tau))} \right|^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

де t_0 – деяке число із проміжку $[a, \omega[$, а A_2 і A_{φ_2} визначені перед формулюванням теореми 1 при $s = 2$.

Із теорем 1, 2 і 3 маємо

Наслідок 1. *Нехай функція p_2 зображена у вигляді*

$$p_2(t) = p_{02}(t)[1 + r_2(t)],$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_2(t) = 0,$$

$p_{02} : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ *– неперервно диференційовна функція,* $r_2 : [a, \omega[\to] - 1, +\infty[$ *– неперервна функція та існує скінчена або рівна* $\pm\infty$ *границя*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_{\varphi_2}'(t)}{J_{\varphi_2}(t)}.$$

Для існування у диференціального рівняння (79) $P_\omega(\pm\infty, 0)$ *– розв'язків, які задовольняють умову*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_1(t)|y(t)|^{\sigma_1}}{p_2(t)e^{\sigma_2 y(t)}} = 0,$$

необхідно, щоб виконувались нерівності

$$\alpha_2\nu_1\pi_\omega(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{80}$$

$$\alpha_2\sigma_2 J_2(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[\tag{81}$$

та граничні співвідношення

$$-\alpha_2 \lim_{t\uparrow\omega} J_2(t) = Z_2, \tag{82}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_{\varphi_2}(t)}{J_{\varphi_2}(t)} = -1, \tag{83}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_2(t)}{J_2(t)\ln|\sigma_2 J_2(t)|} = 0, \tag{84}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_1(t)J_2(t)}{p_2(t)\ln^{-1}|\sigma_2 J_2(t)|} = 0. \tag{85}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні при $t \uparrow \omega$ *зображення*

$$y(t) = \ln|\sigma_2 J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma_2}} + o(1), \tag{86}$$

$$y'(t) = -\frac{J'_2(t)[1 + o(1)]}{\sigma_2 J_2(t)}. \tag{87}$$

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови* (80)–(85) *і*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_2(t)}{J_2(t)} = \gamma_2, \quad \text{де} \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

Тоді: 1) якщо $\gamma_2 > 0$ *або* $\gamma_2 = 0$ *і* $\alpha_2\sigma_2 > 0$, *то рівняння* (79) *має однопараметричну сім'ю* $P_\omega(\pm\infty, 0)$*– розв'язків, які припускають асимптотичні при* $t \uparrow \omega$ *зображення* (86), (87)*; 2) якщо* $\gamma_2 < 0$ *або* $\gamma_2 = 0$ *і* $\alpha_2\sigma_2 < 0$, *то при* $\omega < +\infty$ *рівняння* (79) *має двопараметричну сім'ю* $P_\omega(\pm\infty, 0)$*– розв'язків, які припускають асимптотичні при* $t \uparrow \omega$ *зображення* (86), (87), *а при* $\omega = +\infty$ *– щонайменш один такий розв'язок.*

Наслідок 3. *Нехай виконуються умови* (80)–(85),

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_2(t)}{J_2(t)} = \pm\infty$$

та існує скінчена або рівна $\pm\infty$ *границя*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_2}(t)}{J'_{\varphi_2}(t)}.$$

Тоді: 1) якщо $\alpha_2\sigma_2 > 0$, *то у диференціального рівняння* (79) *існує однопараметрична сім'я* $P_\omega(\pm\infty, 0)$ *– розв'язків з асимптотичними зображеннями* (86), (87), *причому таких, що їх похідна задовольняє асимптотичне при* $t \uparrow \omega$ *співвідношення*

$$y'(t) = -\frac{\alpha_2\pi_\omega(t)p_{02}(t)}{\sigma_2 C + \alpha_2\sigma_2 J_2(t)}[1 + |E_2(t)|^{-\frac{1}{2}} \cdot o(1)];$$

2) якщо $\alpha_2\sigma_2 < 0$ *і виконуються умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\psi_2(t)}{E_2(t)} = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \psi_2(t)r_2(t) = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \psi_2^2(t)\left[r_2(t) + 2 + \frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_2}(t)}{J'_{\varphi_2}(t)}\right] = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\psi_2^2(t)p_1(t)J_2(t)}{p_2(t)\ln^{-1}|\sigma_2 J_2(t)|} = 0,$$

то у диференціального рівняння (79) *існують* $P_\omega(\pm\infty, 0)$*–розв'язки, які припускають асимптотичні при* $t \uparrow \omega$ *зображення*

$$y(t) = \ln|\alpha_2 C + \alpha_2\sigma_2 J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma_2}} + \frac{o(1)}{\psi_2(t)},$$

$$y'(t) = -\frac{J'_2(t)[1 + |E_2(t)|^{-\frac{1}{2}}\psi_2^{-1}(t) \cdot o(1)]}{\alpha_2\sigma_2 C + \sigma_2 J_2(t)},$$

причому таких розв'язків існує двопараметрична сім'я у випадку, коли $\alpha_2\nu_1 = 1$.

Висновки

Для диференціального рівняння (1) встановлено необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків при $\lambda_0 = 0$ у випадку, коли головним в правій частині рівняння (1) є доданок зі швидко змінною нелінійністю. Також знайдено асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) для таких розв'язків та їх похідних першого порядку та вирішено питання про кількість розв'язків зі знайденими зображеннями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. — Cambridge university press. Cambridge, 1987. — 494p.

2. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Дисс. . . .д. физ.-мат. наук.— Киев, 1997. — 295 с.

3. *Евтухов В.М., Колун Н.П.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно и быстро меняющимися нелинейностями //Математические методы и физико-механические поля. – 2017. – **60**, N1. – С. 32-43.

4. *Евтухов В.М., Колун Н.П.* Быстро меняющиеся решения дифференциального уравнения второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями // Український математичний вісник. – 2018. – **15**, N1. – С. 18-42.

5. *Евтухов В.М., Колун Н.П.* Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка // Нелинейные колебания. – 2018. – **21**, N3. – С. 323-346.

6. *Evtukhov V.M., Kolun N.P.* Asymptotic Behaviour of Solutions of Second-Order Nonlinear Differential Equations // Mem. Differential Equations Math. Phys. Tbilisi : Georgian Academy of Sciences. – 2018. – **75**, P. 105-114.

7. *Евтухов В. М., Черникова А. Г.* Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Нелинейные колебания. – 2016. – **19**, N4. – С. 458-475.

8. *Евтухов В. М., Черникова А. Г.* Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Нелинейные колебания. – 2017. – **20**, N3. – С. 346-360.

9. *Евтухов В. М., Черникова А. Г.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, N10. – С. 1345-1363.

10. *Евтухов В.М., Самойленко А.М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, N1. – С. 52-80.

11. *Касьянова В.А.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, асимптотически близкими к степенным — Дисс. канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 Дифференциальные уравнения, Одесса, 2009.— 154с.

12. *Kusano T., Manojlovic J., Maric V.* Increasing solutions of Thomas-Fermi type differential equations – The sublinear case. // Bull. T. CXLIII de l'Acad. Serbe des Sci. et des Arts.–Classe des Sciences Mathematiques et Naturelles, Sciences mathematiques. – 2011. – **36**, С. 21-36.

13. *Колун Н.П.* Асимптотика медленно меняющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями // Досл. в мат. і мех. – 2018. – **23**, N2(32). – С. 54-67.

14. *Marić V.* Regular Variation and Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics 1726. — Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000. — 128 p.

15. *Manojlovic J., Marić V.* An asymptotic analysis of positive solutions of Thomas-Fermi type sublinear differential equations. // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. – 2012. – **57**, – P. 75-94.

16. *Marić V., Radasin Z.* Asymptotic behavior of solutions of the equation $y'' = f(t)\varphi(\psi(t))$. // Glasnik matematicki. –1988. – **23 (43)**, N1. – P. 27–34.

17. *Marić V., Tomić M.* Asymptotics of solutions of a generalised Thomas-Fermi equations. // J. Differ. Equat. – 1980. –**35**, N1. – P. 36–44.

18. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.

19. *Taliaferro S.D.* Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \varphi(t)f(y)$ // SIAM J. Math. Anal. –1981. –**12**, N6. – P. 853–865.