УДК 517.51

©2018 р. В. К. Маслюченко, В. С. Мельник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ПРОМІЖНІ ФУНКЦІЇ І ХРЕСТ-ТОПОЛОГІЯ

Введено поняття нарізної пари Гана (g, h) на добутку $X \times Y$ топологічних просторів і знайдено умови існування проміжної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ для кожної такої пари.

Ключові слова: нарізно неперервні функції, апроксимація, теорема Гана, хрест-топологія.

We introduce the notion of separate Hahn's pair (g, h) on the product $X \times Y$ of topological spaces and find the conditions of existance of intermediate separately continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ for each of these pairs.

Keywords: separately continuous functions, approcsimation, Hahn theorem, plus-topology.

Вступ. Класична теорема Гана про проміжну функцію [1] твердить, що для метричного простору X і напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g : X \to \mathbb{R}$ і $h : X \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X, існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X. Пару (g, h) напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g, h : X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі X, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X ми називаємо [2] *парою Гана* на X. Функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X, називається *проміжною* для пари (g, h).

Ця теорема Гана у XX столітті дістала значний розвиток. Після того як Ж. Д'єдонне [3] переніс її на випадок паракомпактного простору X, Г. Тонґ [4,5] та М. Катетов [6,7] встановили, що для довільного T_1-простору X існування проміжної неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ для кожної пари Гана (g, h) на X є характеристичною ознакою нормальності простору X. Це твердження ми називатимемо теоремою Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова.

В останній час з'явилися нові аналоги та модифікації теореми Гана про проміжну функцію. Так, у праці [8] було встановлено, що для кожної пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$, в якій функції g і h зростають, існує проміжна зростаюча неперервна функція. В роботі [9] досліджувалося питання про існування проміжної афінної функції $f : X \to \mathbb{R}$ на векторному просторі X для опуклих відповідно вгору і вниз функцій g і h на X. Нарешті, в статті [2] вивчалося питання про існування на проміжках числової прямої проміжних кусково лінійних чи нескінченно диференційовних функцій, що задовольняють певні додаткові умови.

Аналогічно до пари Гана можна ввести поняття нарізної пари Гана (g, h), в якій $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно напівнеперервна зверху функція, а h — знизу, причому $g(p) \leq h(p)$ на $X \times Y$. Виникає природне питання: за яких умов на простори X і Y для кожної нарізної пари Гана (g, h) існує така нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $g(p) \leq f(p) \leq h(p)$ на $X \times Y$. Тут ми даємо повну відповідь на це питання, з'ясувавши, що для цього необхідно і достатньо, щоб добуток $X \times Y$, наділений так званою хрест-топологією, був нормальним. Ми наводимо також приклад нормального добутку з хрест-топологією.

Хрест-топологія.

Нехай X і Y — топологічні простори. Множина $W \subseteq X \times Y$ називається *нарізно відкритою*, якщо для кожної точки $p = (x, y) \in W$ існують околи U та V точок x та y у просторах X та Y відповідно, такі, що $(\{x\} \times V) \cup (U \times \{y\}) \subseteq W$. Легко перевірити, що система $\mathcal{C}$, що складається з нарізно відкритих множин, утворює топологію на добутку $X \times Y$, яка називається хрест-топологією на $X \times Y$.

Ми використовуємо звичні позначення:

$C(X,Y)$ — простір всіх неперервних функцій $f: X \to Y$ і $CC(X\times Y, Z)$ — простір нарізно неперервних функцій $f : X\times Y \to Z$. Ми позначаємо також $C(X) = C(X,\mathbb{R})$ і $CC(X\times Y,\mathbb{R}) = CC(X\times Y)$ для числової прямої $\mathbb{R}$.

Лема 1. Нехай X, Y і Z — топологічні простори, $\mathcal{C}$ — хрест-топологія на добутку $X\times Y$ і $Q = (X\times Y,\mathcal{C})$. Тоді $CC(X\times Y, Z) = C(Q,Z)$.

Доведення. $\subseteq$). Нехай $f \in CC(X\times Y, Z)$. Розглянемо відкриту множину W у просторі Z, і доведемо, що $f^{-1}(W)$ — відкрита в Q. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in f^{-1}(W)$. Тоді $z_0 = f(p_0) = f^{x_0}(y_0) = f_{y_0}(x_0) \in W$. Оскільки f^{x_0} та f_{y_0} — неперервні і W — відкритий окіл точки z_0 в Z, то існують окіл U точки x_0 в X та окіл V точки y_0 в Y такі, що $f^{x_0}(V) \subseteq W$ і $f_{y_0}(U) \subseteq W$. Отже, $f((\{x_0\}\times V)\cup(U\times\{y_0\})) = f^{x_0}(V)\cup f_{y_0}(U) \subseteq W$, а звідси $(\{x_0\}\times V)\cup(U\times\{y_0\}) \subseteq f^{-1}(W)$. Таким чином, маємо, що $f^{-1}(W) \in \mathcal{C}$, отже, $f \in C(Q,Z)$.

$\supseteq$). Розглянемо $f \in C(Q,Z)$ та $p_0 = (x_0,y_0) \in X\times Y$. Нехай W — відкритий окіл точки $z_0 = f(x_0,y_0)$ в Z. Тоді, оскільки $f^{-1}(W) \in \mathcal{C}$ і $p_0 \in f^{-1}(W)$, то існують околи U точки x_0 в X та V точки y_0 в Y, такі, що $(\{x_0\}\times V)\cup(U\times\{y_0\}) \subseteq f^{-1}(W)$. Звідси маємо, що $f^{x_0}(V)\cup f_{y_0}(U) = f((\{x_0\}\times V)\cup(U\times\{y_0\})) \subseteq W$. Таким чином, $f^{x_0}(V) \subseteq W$ і $f_{y_0}(U) \subseteq W$, що дає нам неперервність f^{x_0} в точці y_0 та f_{y_0} в точці x_0, отже, $f \in CC(X\times Y, Z)$.

Напівнеперервні функції.

Лема 2. Нехай $\mathcal{T}^u$ $/\mathcal{T}^l/$ — топологія на $\mathbb{R}$, що складається з множин $(-\infty, c)$ $/(c,+\infty)/$, де $-\infty \le c \le +\infty$, а $C^u(X)$ $/C^l(X)/$ — простір усіх напівнеперервних зверху /знизу/ функцій $f : X \to \mathbb{R}$. Тоді $C^u(X) = C(X,\mathbb{R}^u)$ $/C^l(X) = C(X,\mathbb{R}^l)/$, де $\mathbb{R}^u = (\mathbb{R},\mathcal{T}^u)$ $/\mathbb{R}^l = (\mathbb{R},\mathcal{T}^l)/$.

Доведення. $\subseteq$) Нехай $f \in C^u(X)$. Розглянемо $c \in \mathbb{R}$, і доведемо, що множина $E(f<c) = f^{-1}((-\infty,c))$ відкрита в X. Нехай $x_0 \in E(f<c)$, тобто $f(x_0) < c$. З напівнеперервності зверху функції f легко вивести, що існує окіл U точки x_0 в X, такий, що для довільного $x \in U$ виконується $f(x) < c$. Отже, $E(f<c)$ містить окіл кожної своєї точки, а значить, є відкритою множиною для кожного $c \in \mathbb{R}$. Таким чином, $f \in C(X,\mathbb{R}^l)$.

$\supseteq$) Нехай $f \in C(X,\mathbb{R}^u)$, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки множина $U = f^{-1}((-\infty, y_0+\varepsilon))$ відкрита в X і $x_0 \in U$, то U — це окіл точки x_0 в X. При цьому $f(x) < f(x_0)+\varepsilon$ для кожного $x \in U$, отже функція f напівнеперервна зверху в точці x_0.

Введемо наступні позначення: $C^uC^u(X\times Y)$ — простір усіх нарізно напівнеперервних зверху функцій $f : X\times Y \to \mathbb{R}$, $C^lC^l(X\times Y)$ — простір усіх нарізно напівнеперервних знизу функцій $f : X\times Y \to \mathbb{R}$, $C^u(T)$ — це простір напівнеперервних зверху функцій $f : T \to \mathbb{R}$, $C^l(T)$ — це простір напівнеперервних знизу функцій $f : T \to \mathbb{R}$.

Лема 3. Для довільних топологічних просторів X та Y маємо, що $C^uC^u(X\times Y) = C^u(Q)$ і $C^lC^l(X\times Y) = C^l(Q)$.

Доведення. Нехай $f \in C^uC^u(X\times Y)$, $x \in X$ і $y \in Y$. Оскільки $f^x \in C^u(Y)$ і $f_y \in C^u(X)$, то за лемою 2 $f^x \in C(Y,\mathbb{R}^u)$ і $f_y \in C^u(X,\mathbb{R}^u)$, звідки випливає, що $f_y \in C(X,\mathbb{R}^u)$. Таким чином, врахувавши ще й лему 1, маємо: $f \in CC(X\times Y,\mathbb{R}^u) = C(Q,\mathbb{R}^u) = C^u(Q)$. Доведення в інший бік аналогічне.

Проміжна нарізно неперервна функція.

Пару (g,h) напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g,h : X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі X, таких, що $g(x) \le h(x)$ на X ми називаємо парою Гана на X. Пару (g,h) функцій $g \in C^uC^u(X\times Y)$, $h \in C^lC^l(X\times Y)$ на добутку $X\times Y$, таких, що $g(p) \le h(p)$ на $X\times Y$ ми називаємо нарізною парою Гана на $X\times Y$.

Лема 4. Пара (g,h) функцій на добутку $X\times Y$ є нарізною парою Гана тоді і тільки тоді, коли вона є парою Гана на просторі $Q = (X\times Y,)$.

Доведення. Одразу випливає з леми 3, оскільки $g \in C^uC^u(X\times Y) = C^u(Q)$ та $h \in C^lC^l(X\times Y) = C^l(Q)$

Лема 5. Нехай X, Y — T_1-простори, $\mathcal{C}$ — хрест-топологія. Тоді $Q = (X\times Y,\mathcal{C})$ — T_1-простір.

Доведення. Доведемо, що одноточктова множина $\{p\}$, $p = (x, y) \in Q$, є замкненою. Нехай $q = (u, v) \in Q$ і $q \neq p$. Тоді $x \neq u$ або $y \neq v$. Припустимо, що $x \neq u$. Тоді існує відкритий окіл U точки u, такий, що $x \notin U$. Зрозуміло, що $W = U \times Y$ — це відкритий окіл точки q в Q, такий, що $p \notin W$. Отже, $\{p\}$ — замкнена.

Теорема 1. Нехай X та Y — T_1-простори. Тоді кожна нарізна пара Гана (g, h) на добутку $X \times Y$ має проміжну нарізно неперервну функцію тоді і тільки тоді, коли простір $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$ є нормальним.

Доведення. За лемою 5 маємо, що простір $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$ — T_1-простір, за лемою 4 маємо, що кожна нарізна пара Гана (g, h) є парою Гана на Q і навпаки. Таким чином, у випадку нормального простору Q, за теоремою Гана-Д'єдонне-Катетова-Тонґа, існує проміжна для пари Гана (g, h) неперервна функція f, та навпаки, з існування проміжної неперервної функції для кожної пари Гана випливає нормальність простору Q.

Приклад нормальної хрест топології на добутку.

Теорема 2. Нехай T та S — дискретні простори, $X = \alpha T = T \cup \{\infty\}$, та $Y = \alpha S = S \cup \{\infty\}$ — компактифікації Александровва цих просторів, $\mathcal{C}$ — хрест-топологія на $X \times Y$ і $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$. Тоді Q — нормальний топологічний простір.

Доведення. Нехай A і B — замкнені множини в Q і $A \cap B = \emptyset$. Доведемо, що існують відкриті в Q множини U і V, такі, що $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ і $U \cap V = \emptyset$.

Позначимо $w = (\infty, \infty)$. Розглянемо випадок, коли $w \in A$. Множина $H = Q \setminus B$ — це відкритий окіл точки w в Q. Тому існують такі скінченні підмножини $T_0 = \{t_1, ..., t_n\}$ і $S_0 = \{s_1, ..., s_m\}$ множин S і T відповідно, що для їх доповнень $X_0 = X \setminus T_0$ та $Y_0 = Y \setminus S_0$ виконується включення $(\{\infty\} \times Y_0) \cup (X_0 \times \{\infty\}) \subseteq H$. Для $t \in T$ і $s \in S$ покладемо $p_t = (t, \infty)$ і $q_s = (\infty, s)$. Розглянемо множини $T_1 = \{t \in T_0 : p_t \in A\}$, $S_1 = \{s \in S_0 : q_s \in A\}$, $X_1 = X_0 \cup T_1$, $Y_1 = Y_0 \cup S_1$, $T_2 = \{t \in T_0 : p_t \in B\}$ і $S_2 = \{s \in S_0 : q_s \in B\}$. За побудовою $(\{\infty\} \times Y_1) \cup (X_1 \times \{\infty\}) \subseteq H$, адже $A \subseteq H$. Для довільних точок $t \in X_1$ і $s \in Y_1$ існують такі відкриті околи V_t і U_s точки ∞ у просторах Y і X відповідно, що $\{t\} \times V_t \subseteq H$, $U_s \times \{s\} \subseteq H$, $V_t \cap S_2 = \emptyset$ і $U_s \cap T_2 = \emptyset$. Покладемо $U' = \bigcup\limits_{t \in X_1} \{t\} \times V_t$, $U'' = \bigcup\limits_{s \in Y_1} \{s\} \times U_s$, $U''' = A \cap (T \times S)$ і $U = U' \cup U'' \cup U'''$. Легко перевірити, що множина U відкрита в Q і $A \subseteq U \subseteq H$.

Оскільки множина $G = Q \setminus A$ відкрита в Q і $(T_2 \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times S_2) \subseteq G$, бо $B \cap A = \emptyset$, то для довільних $t \in T_2$ і $s \in S_2$ існують такі відкриті у просторах Y і X околи $\widetilde{V}_t$ і $\widetilde{U}_t$ точки ∞ відповідно, що виконуються включення $V' = \bigcup\limits_{t \in T_2} \{t\} \times \widetilde{V}_t \subseteq G$ і $V'' = \bigcup\limits_{s \in S_2} \{s\} \times \widetilde{U}_s \subseteq G$. Множини V' і V'' будуть відкритими в Q, як і множина $V''' = B \cap (T \times S)$, а з ними і множина $V = V' \cup V'' \cup V'''$. При цьому $B \subseteq V$. Доведемо, що $U \cap V = \emptyset$. По перше, $U' \cap V'$ і $U'' \cap V'' = \emptyset$, адже $X_1 \cap T_2 = \emptyset$ і $Y_1 \cap S_2 = \emptyset$. Далі, $U''' \cap V''' = \emptyset$, бо $A \cap B = \emptyset$, а $U''' \subseteq A$ і $V''' \subseteq B$. Крім того, $U' \cap V'' = \emptyset$, бо $V_t \cap S_2 = \emptyset$ при $t \in X_1$, так само $V' \cap U'' = \emptyset$, бо $T_2 \cap U_s = \emptyset$ при $s \in Y_1$. Нарешті, $(U' \cup U'') \cap V''' = \emptyset$, бо $U' \cap U'' \subseteq H = Q \setminus B$, а $V''' \subseteq B$. Подібно до цього $(V' \cup V'') \cap U''' = \emptyset$, бо $V' \cap V'' \subseteq G = Q \setminus A$, а $U''' \subseteq A$. Таким чином, множини U і V шукані.

У випадку $w \in B$ множини A і B міняються місцями. Нарешті, нехай $w \notin A \cup B$. Тоді існують такі скінченні підмножини $T_0 = \{t_1, ..., t_n\}$ і $S_0 = \{s_1, ..., s_n\}$ множин T і S відповідно, що $(\{\infty\} \times Y_0) \cup (X_0 \times \{\infty\}) \cap A \cup B = \emptyset$, де $X_0 = X \setminus T_0$ і $Y_0 = Y \setminus S_0$. Розглянемо множини $T_1 = \{t \in T_0 : p_t = (t, \infty) \in A\}$, $T_2 = \{t \in T_0 : p_t = (t, \infty) \in B\}$, $S_1 = \{s \in S_0 : q_s = (s, \infty) \in A\}$ і $S_2 = \{s \in S_0 : q_s = (s, \infty) \in B\}$. Для кожного $t \in T_1$ існує такий відкритий окіл V_t точки ∞ у просторі Y, що $\{t\} \times V_t \subseteq H = Q \setminus B$ і $V_t \cap S = \emptyset$. А для кожного $s \in S_1$ існує такий відкритий окіл U_s точки ∞ у просторі X, що $U_s \times \{s\} \subseteq H$ і $U_s \cap T_2 = \emptyset$. Так само будуються відкриті околи $\widetilde{U}_s$ і $\widetilde{V}_t$ точки ∞ у просторах X і Y відповідно, що $\{t\} \times \widetilde{V}_t \subseteq G = Q \setminus A$, $\widetilde{U}_s \times \{s\} \subseteq G$,

$\widetilde{V}_t \cap S_1 = \emptyset$ і $\widetilde{U}_s \cap T_1 = \emptyset$ для довільних $t \in T_2$ і $s \in S_2$. Легко перевірити, що множини $U = (\bigcup\limits_{t \in T_1} (\{t\} \times V_t)) \cup (\bigcup\limits_{s \in S_1} U_s \times \{s\}) \cup (A \cap (T \times S))$ та $V = (\bigcup\limits_{t \in T_2} (\{t\} \times \widetilde{V}_t)) \cup (\bigcup\limits_{s \in S_2} \widetilde{U}_s \times \{s\}) \cup (B \cap (T \times S))$ будуть шуканими.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Hahn H.* Uber halbstetige und unstetige Functionen // Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien. Math. -naturwiss.Kl.Abt.IIa. — 1917. — **126**. — S.91-110.

2. *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Мельник В.С.* Існування проміжних кусково лінійних та нескінченно диференційовних функцій// Бук. мат. журн. — 2016. — **4**, №3-4. — С.93-100.

3. *Dieudonne J.* Une généralisation des espaces compacts // J. de Math. Pyres et Appl. — 1944. — **23**. — P.65-76.

4. *Tong H.* Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Bull.Amer.Math.Soc. — 1948. — **54**. — P.65.

5. *Tong H.* Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Duke Math.J. — 1952. — **19**. — P.289-292.

6. *Katetov M.* On real-valued functions in topological spaces // Fund.Math. — 1952. — **38**. — P.85-91.

7. *Katetov M.* Correction to 'On real-valued functions in topological spaces' // Fund.Math. — 1953. — **40**. — P.203-205.

8. *Маслюченко В.К., Петей С.П.* Поточкові границі неперервних монотонних функцій та функцій обмеженої варіації // Бук. мат. журн. — 2015. — **3**,№ 2. — С.64-71.

9. *Маслюченко В.К., Мельник В.С.* Теореми про проміжну афінну функцію для опуклої і вгнутої функцій // Бук. мат. журн. — 2016. — **4**,№1. — С.110-116.