УДК 517.956

©2018 р. І.Д. Пукальський, Б.О. Яшан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

БАГАТОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕРІВНОСТЯМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Запропоновано алгоритм знаходження розв'язку багатоточкової за часовою змінною односторонньої крайової задачі для параболічного рівняння другого порядку. Коефіцієнти рівняння і крайових умов вироджуються і мають степеневі особливості за часовою і просторовими змінними довільного порядку на деякій множині точок. Встановлено існування і єдиність розв'язку поставленої задачі в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги залежить від величини ососбливостей коефіцієнтів рівняння і крайових умов. У виділених гельдерових просторах встановлено оцінки похідних розв'язків поставленої задачі.

Ключові слова: крайова умова, розв'язок задачі, інтерполяційні нерівності, норма.

The algorithm for finding solution a multipoint in time variable of a one-sided boundary value problem for a second order parabolic equation is offered. The coefficients of the equation and the boundary conditions are degenerate and have power singularities in time and space variables of arbitrary order on a certain set of points. Existence and uniqueness of the solution of the problem in Hölder spaces with power weight are established. The order of power degree depends on the magnitude of features of the coefficients of the equation and boundary conditions. In the allocated Hölder spaces estimations of derivatives of solution of the problem are established.

Keywords: boundary condition, solution of the problem, interpolation inequalities, norm.

Дослідження нелокальних крайових задач для різних типів диференціальних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними та встановлення умов їхньої коректної розв'язності є одним із важливих напрямків розвитку сучасної теорії рівнянь з частинними похідними. Ці задачі пов'язують значення шуканих розв'язків у різних межових чи внутрішніх точках розглядуваної області. Математичне моделювання багатьох задач механіки, фізики і теорії керування приводить до вивчення систем нерівностей з частинними похідними [1-4].

У праці [5] розглядається застосування принципу максимуму для лінійних еліптико-параболічних рівнянь другого порядку з невід'ємною характеристичною формою, коефіцієнти якої мають степеневі особливості обмеженого порядку на межі області. Методом бар'єрних функцій встановлені апріорні оцінки і строгий принцип максимуму. У [6] побудовано теорію класичних розв'язків задачі Коші і крайових задач для рівномірно параболічних рівнянь, які мають степеневі особливості у коефіцієнтах при молодших похідних. За допомогою спеціальних функціональних просторів у праці [7] для параболічних рівнянь з невід'ємною квадратичною формою, яка вироджується на межі області, встановлено розв'язність першої крайової задачі.

Дослідженню коректної розв'язності крайових задач з нелокальною умовою за часовою змінною для параболічних рівнянь 2-го порядку, які вироджуються на межі області за сукупністю змінних, присвячено праці [8,11].

У цій статті розглядається одностороння крайова задача з багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійного параболічного рівняння із степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайових умов за будь-якими змінними на деякій множині точок. Доведено існування єдиного розв'язку поставленої задачі та встановлено оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

Постановка задачі і основний ре-

зультат. Нехай η, $t_0, t_1, ..., t_N, t_{N+1}$ – фіксовані додатні числа, D – обмежена область в R^n з межею ∂D. Позначимо через $Q_{(0)} = \{(t,x)|t=\eta, x\in D\}$, $Q^{(k)} = [t_k, t_{k+1})\times D$, $k\in\{0,1,...,N\}$.

В області $Q=[t_0,t_{N+1})\times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(x,t)$, яка задовольняє при $t\neq t_\lambda$, $(t,x)\notin Q_{(0)}$ рівняння

$$(Lu)(t,x)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(t,x)\partial_{x_ix_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}A_i(t,x)\partial_{x_i}+A(t,x)\Big]u(t,x)=f(t,x), \tag{1}$$

умови за змінною t

$$u(t_k+0,x)=\varphi_k(x), \tag{2}$$

і крайові умови

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(Bu-g)(t,x)\equiv$$

$$\equiv\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}\Big[\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial_{x_i}}+b_0(t,x)u-$$

$$-g(t,x)\Big]\geq 0,$$

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}u(t,x)\geq 0,$$

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}[u(Bu-g)](t,x)=0. \tag{3}$$

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) і крайових умов (3) у точці $P(t,x)\in Q\backslash Q_{(0)}$ характеризуватимуть функції $\rho_1(\beta_i^{(1)},t)$, $\rho_2(\beta_i^{(2)},x)$: $\rho_1(\beta_i^{(1)},t)=|t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\eta|\leq 1$, $\rho_1(\beta_i^{(1)},t)=1$ при $|t-\eta|\geq 1$; $\rho_2(\beta_i^{(2)},x)=\psi^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\psi(x)\leq 1$, $\rho_2(\beta_i^{(2)},x)=1$ при $\psi(x)\geq 1$, $\psi(x)=\inf\limits_{z\in\partial D}|x-z|$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\nu\in\{1,2\}$, $\beta^{(\nu)}=(\beta_1^{(\nu)},\dots,\beta_n^{(\nu)})$, $\beta=(\beta^{(1)},\beta^{(2)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3). Позначимо через l, $q^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_j^{(\nu)}$, $\delta^{(\nu)}$ – дійсні числа, $j\in\{0,1,\dots,n\}$, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\}=l-[l]$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $R_i(t^{(2)},x^{(2)})$ – довільні точки із $Q^{(k)}$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$, $x^{(1)}=(x_1^{(1)},\dots,x_i^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)}=(x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)}\dots,x_n^{(1)})$.

Позначимо через $H^l(\gamma;\beta;q;Q)$ множину функцій u, які мають неперервні похідні в $Q\setminus Q_{(0)}$ при $t\neq t_\lambda$ вигляду $\partial_t^m\partial_x^r$, $2m+|r|\leq[l]$, для яких скінченна норма

$$||u;\gamma;\beta;0;Q||_0=\sup_k\{\sup_{\overline{Q}^{(k)}}|u|\}\equiv||u;Q||_0,$$

$$||u;\gamma;\beta;q;Q||_l=$$

$$=\sup_k\Big\{\sum_{2m+|r|\leq[l]}||u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}||_{2m+|r|}+$$

$$+\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\rangle_l\Big\}\equiv\sup_k\Big\{\sum_{2m+|r|\leq[l]}\times$$

$$\times\sup_{P\in\overline{Q}^{(k)}}[\rho_1(q^{(1)}+(2m+|r|)\gamma^{(1)},t)$$

$$\rho_2(q^{(2)}+2m\gamma^{(2)},x)|\partial_t^m\partial_x^ru(P)|\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\rho_1(r_i\beta_i^{(1)},t)\rho_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x)]\Big\}+$$

$$+\sup_k\sum_{2m+|r|=[l]}\times$$

$$\times\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}[\sup_{(P_2R_\nu)\subset\overline{Q}^{(k)}}[\rho_1(q^{(1)}+l\gamma^{(1)},t^{(2)})\times$$

$$\times\rho_2(q^{(2)}+2m\gamma^{(2)},\widetilde{x})\prod_{i=1}^{n}\rho_1(-r_i\beta_i^{(1)},t^{(2)})\times$$

$$\times\rho_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\widetilde{x})|\partial_t^m\partial_x^ru(P_2)-\partial_t^m\partial_x^ru(R_\nu)|\times$$

$$\times|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\{l\}}\rho_1(-\{l\}\beta_\nu^{(1)},t^{(2)})\times$$

$$\times\rho_2(\{l\}(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\widetilde{x})]+$$

$$+\sup_{(P_1P_2)\subset\overline{Q}^{(k)}}[\rho_1(q^{(1)}+l\gamma^{(1)},\widetilde{t})\times$$

$$\times\rho_2(q^{(2)}+(2m+\{l\})\gamma^{(2)},x^{(1)})\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\rho_1(-r_i\beta_i^{(1)},\widetilde{t})\times$$

$$\times\rho_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(1)})|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2}\}}\times$$

$$\times|\partial_t^m\partial_x^ru(P_1)-\partial_t^m\partial_x^ru(P_2)|\ ]\Big\},$$

де $|r| = r_1 + \dots + r_n$, $\rho_1(q,\widetilde{t}) = \min(\rho_1(q,t^{(1)}),\rho_2(q,t^{(2)}))$, $\rho_2(q,\widetilde{x}) = \min(\rho_2(q,x^{(1)}),\rho_2(q,x^{(2)}))$.

Позначимо через Γ_1 множину точок межі $\Gamma = [t_0,t_{N+1})\times\partial D$, у яких виконується умова

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D} u(t,x) = 0. \qquad (4)$$

Тоді з крайових умов (3) випливає, що в точках(t,x) межі $\Gamma_2 = \Gamma\backslash\Gamma_1$ буде виконуватись умова

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(Bu-g)(t,x) = 0. \qquad (5)$$

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\forall(t,x)\in Q\backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\rho_1(\beta_i^{(1)},t)\rho_1(\beta_j^{(1)},t)\times$$

$$\times\rho_2(\beta_i^{(2)},x)\rho_2(\beta_j^{(2)},x)A_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2, \qquad (6)$$

π_1,π_2 – фіксовані додатні сталі та $\rho_1(\mu_i^{(1)},t)\rho_2(\mu_i^{(2)},x)A_i \in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $\rho_1(\mu_0^{(1)},t)\rho_2(\mu_0^{(2)},x)A_0 \in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $A_0 \ge -a$, $a > 0$, $\rho_1(\delta^{(1)},t)$, $\rho_2(\delta^{(2)},x)b_0 \in H^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $\rho_1(\beta_i^{(1)},t)\rho_1(\beta_j^{(1)},t)\rho_2(\beta_i^{(2)},x)\rho_2(\beta_j^{(2)},x)A_{ij} \in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $\rho_1(\beta_i^{(1)},t)\rho_2(\beta_i^{(2)},x)b_i \in H^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, вектори $\overrightarrow{b}^{(s)} = \{b_1^{(s)},\dots,b_n^{(s)}\}$, $b_i^{(s)} = \rho_1(\beta_i^{(1)},t)\rho_2(\beta_i^{(2)},x)b_i$ і $\overrightarrow{e} = \{e_1,\dots,e_n\}$, $e_i = b_i(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2)^{-\frac{1}{2}}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(t,x)\in\Gamma^{(2)}$ кут менший за $\frac{\pi}{2}$, $\Gamma = [t_0,t_{N+1})\times\partial D$, $b_0(t,x)\Big|_\Gamma > 0$, $\gamma^{(\nu)} = \max\{\max\limits_i(1+\beta_i^{(\nu)}),\max\limits_i(\mu_i^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}),\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2},\delta^{(\nu)}\}$;

б) $f \in H^\alpha(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi_k \in H^{2+\alpha}(\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q\cap(t=t_k))$, $\widetilde{\gamma} = (0,\gamma^{(1)})$, $\widetilde{\beta} = (0,\beta^{(2)})$, $g \in H^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;Q)$;

в) У точках $(t_k,z)\in\Gamma_1$ виконується умова $\varphi_0(t_0,z) = 0$, $\varphi_k(t_0,z) = 0$; у точках $(t_k,z)\in\Gamma_2$ виконуються умови $(B\varphi_k - g)(t_k,z) = 0$, $k\in\{0,1,\dots,N\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконані умови а), в). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *із простору* $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і для нього справедлива оцінка*

$$||u;\gamma;\beta;0;Q||_{2+\alpha} \le c\sup_k(||f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}||_\alpha +$$

$$+||g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}||_{1+\alpha}+$$

$$+||\varphi_k;\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q\cap(t=t_k)||_{2+\alpha}), \qquad (7)$$

$k\in\{0,1,\dots,N\}$.

Для дослідження задачі (1)–(3) встановимо спочатку коректну розв'язність крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(3).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами.

Нехай $Q_m^{(k)} = Q^{(k)}\cap\{(t,x)\in Q^{(k)} \mid r_1(1,t) \ge m_1^{-1}, r_2(1,x) \ge m_2^{-1}\}$, $m = (m_1,m_2)$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ – послідовності областей, які при $m_1\longrightarrow\infty$, $m_2\longrightarrow\infty$ збігаються до $Q^{(k)}$.

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій $u_m(t,x)$, які задовольняють при $t\ne t_\lambda$ рівняння

$$(L_1u_m)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_ix_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a(t,x)\Big]u_m(t,x) =$$

$$= f_m(t,x), \qquad (8)$$

умови за змінною t

$$u_m(t_k+0,x) = \varphi_k^{(m)}(t_k,x), \qquad (9)$$

і крайові умови

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B_1u_m - g_m)(t,x) \equiv$$

$$\equiv \lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}\Big[\sum_{i=1}^{n} h_i(t,x)\partial_{x_i}u_m + h_0(t,x)u_m -$$

$$-g_m(t,x)\Big] \geq 0,$$

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D} u_m(t,x) \geq 0,$$

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}[u_m(B_1 u_m - g_m)](t,x) = 0. \qquad (10)$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a, h_i, h_0, функції f_m, $\varphi_k^{(m)}$, g_m в областях $Q_m^{(k)}$ співпадають з A_{ij}, A_i, A, b_i, b_0, f, φ_k, g, відповідно, а в областях $Q^{(k)}\backslash Q_m^{(k)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A, b_i, b_0, функцій f, φ_k, g, із областей $Q_m^{(k)}$ в області $Q^{(k)}\backslash Q_m^{(k)}$ із збереженням гладкості і норми [10, стор. 82].

Для розв'язків задачі (8)–(10) правильна теорема.

Теорема 2. *Нехай $u_m^{(k)}(t,x)$ – класичний розв'язок задачі* (8)–(10) *в області $Q^{(k)}$ і виконані умови а), в). Тоді для розв'язку задачі* (8)–(10) *в області Q правильна оцінка*

$$|u_m(t,x)| \leq \sup_k |u_m^{(k)}(t,x)| \leq$$

$$\leq \sup_k(||f_m a^{-1}; Q^{(k)}||_0 +$$

$$+||\varphi_k^{(m)}; Q\cap(t=t_k)||_0 + ||g_m; Q^{(k)}||_0). \quad (11)$$

Доведення нерівності (11) проводиться за методикою доведення теорем 2.1 і 2.2 із [9 ст 22-26], тобто аналізуються всі можливі значення додатного максимуму і від'ємного мінімуму розв'язку $u_m^{(k)}(t,x)$ в області $Q^{(k)}$.

Знайдемо оцінку розв'язку задачі (8)–(10). У просторі $C^{2+\alpha}(\Pi)$ введемо норму $\|u,\gamma;\beta;q;Q\|_l$, еквівалентну при кожному m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як $\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l$, тільки замість функцій $\rho_1(\beta_i^{(1)},t)$, $\rho_2(\beta_i^{(2)},x)$ беремо $d_1(\beta_i^{(1)},t)$, $d_2(\beta_i^{(2)},x)$: $d_1(\beta_i^{(1)},t) = \max(\rho_1(\beta_i^{(1)},t), m_1^{-\beta_i^{(1)}})$ при $\beta_i^{(1)} \geq 0$ і $d_1(\beta_i^{(1)},t) = \min(\rho_1(\beta_i^{(1)},t), m_1^{-\beta_i^{(1)}})$ при $\beta_i^{(1)} < 0$; $d_2(\beta_i^{(2)},x) = \max(\rho_2(\beta_i^{(2)},x), m_2^{-\beta_i^{(2)}})$ при $\beta_i^{(2)} \geq 0$ і $d_2(\beta_i^{(2)},x) = \min(\rho_2(\beta_i^{(2)},x), m_2^{-\beta_i^{(2)}})$ при $\beta_i^{(2)} < 0$.

Для розв'язку задачі (8) – (10) правильна теорема.

Теорема 3. *Якщо виконані умови а) – в), то для розв'язку задачі* (8) – (10) *в області Q правильна оцінка*

$$||u_m;\gamma;\beta;0;Q||_{2+\alpha} \leq$$

$$\leq c\sup_k(||f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}||_\alpha +$$

$$+||\varphi_k^{(m)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q\cap(t=t_k)||_{2+\alpha} +$$

$$+||g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}||_{1+\alpha}) \qquad (12)$$

Доведення. Використовуючи інтерполяційні нерівності із [10,12] та означення норми, маємо

$$||u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}||_{2+\alpha} \leq (1+\varepsilon^\alpha)\times$$

$$\times\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\rangle_{2+\alpha} + (\varepsilon)||u_m;Q^{(k)}||_0,$$

де ε – довільне дійсне число із (0,1). Тому досить оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\rangle_{2+\alpha}$. Із означення півнорми випливає існування в $\Pi^{(k)}$ точок $P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, R_i^{(k)}$, для яких виконується одна із нерівностей

$$\frac{1}{2}||u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}||_{2+\alpha} \leq E_\mu, \;\; \mu\in\{1,2\}, \qquad (13)$$

де

$$E_1 = \sum_{2j+|r|=2}\sum_{\nu=1}^{n} d_1((2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)})\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n} d_1(-r_i\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\widetilde{x})\times$$

$$\times d_2((2j+\alpha)\gamma^{(2)},\widetilde{x})d_1(-\alpha\beta_\nu^{(1)},t^{(1)})\times$$

$$\times d_2(-\alpha\beta_\nu^{(2)},\widetilde{x})|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\alpha}\times$$

$$\times|\partial_t^j\partial_x^r u(P_2^{(k)}) - \partial_t^j\partial_x^r u(R_\nu^{(k)})|,$$

$$E_2 = \sum_{2j+|r|=2} d_1((2+\alpha)\gamma^{(1)},\widetilde{t})\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n} d_1(-r_i\beta_i^{(1)},\widetilde{t})\times$$

$$\times d_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(2)})|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}}\times$$

$$\times|\partial_t^j\partial_x^r u(P_1^{(k)}) - \partial_t^j\partial_x^r u(P_2^{(k)})|\times$$

$\times d_2((2j+\alpha)\gamma^{(2)}, x^{(2)})$.

$d_1(a,\widetilde{t}) = \min(d_1(a,t^{(1)}), d_1(a,t^{(2)}))$, $d_2(a,\widetilde{x}) = \min(d_2(a,x^{(1)}), d_2(a,x^{(2)}))$.

Якщо $|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}| \geq \frac{\varepsilon n^{-1}}{4} d_1(\gamma^{(1)} - \beta_\nu^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_\nu^{(2)}, \widetilde{x}) \equiv T_1$, то

$$E_1 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha} \|u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_2. \qquad (14)$$

Якщо $|t^{(1)} - t^{(2)}| \geq d_1(2\gamma^{(1)}, \widetilde{t}) d_2(2\gamma^{(2)}, x^{(2)}) \frac{\varepsilon_1}{16} \equiv T_2$, то

$$E_2 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha} \|u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_2. \qquad (15)$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (14), (15), знаходимо

$$E_\delta \leq \varepsilon^\alpha \|u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m; Q^{(k)}\|_0. \qquad (16)$$

Нехай $|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}| \leq T_1$ і $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq T_2$. Будемо вважати, що $d_1(2\gamma^{(1)}, \widetilde{t}) \equiv d_1(2\gamma^{(1)}, t^{(1)})$, $d_2(2\gamma^{(2)}, \widetilde{x}) \equiv d_2(2\gamma^{(2)}, x^{(2)})$, $(t^{(1)}, x^{(2)}) \in Q^{(k)}$, $(t^{(1)}, x^{(2)}) \in \Pi^{(k)}$. В області $\Pi^{(k)}$ запишемо задачу (8) – (9) у вигляді

$$(L_1 u_m) \equiv [\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t^{(1)}, x^{(2)}) \partial_{x_i}\partial_{x_j}] u_m =$$

$$= \sum_{ij=1}^n [a_{ij}(t,x) - a_{ij}(t^{(1)}, x^{(2)})] \partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m -$$

$$- \sum_{i=1}^n (a_i(t,x)\partial_{x_i} u_m - a_0(t,x) u_m +$$

$$+ f_m(t,x) \equiv F_m(t,x;u_m) + f_m(t,x), \qquad (17)$$

$$u_m(t_k + 0, x) = \psi_m^{(k)}(t_k, x), \qquad (18)$$

де $\psi_m^{(0)}(t_0, x) = \varphi_m^{(0)}(x)$, $x \in R^n$; $\psi_m^{(k)}(t_k, x) = [1 + b_k^{(m)}(x)] u_m(t_k - 0, x) + \varphi_k^{(m)}(x)$, $x \in \Pi^{(k)} \cap (t = t_k)$, $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$. $\inf |x_\nu^{(2)} - z_\nu| \geq 2T_2$. В області $Q^{(k)}$ розглянемо задачу

$$(L_2 u_m)(t,x) \equiv$$

$$\equiv [\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t^{(1)}, x^{(2)}) \partial_{x_i}\partial_{x_j}] u_m(t,x) =$$

$$= \sum_{ij=1}^n [a_{ij}(t,x) - a_{ij}(t^{(1)}, x^{(2)})] \partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m -$$

$$- \sum_{i=1}^n (a_i(t,x)\partial_{x_i} u_m - a(t,x) u_m +$$

$$+ f_m(t,x) \equiv F_m(t,x;u_m) + f_m(t,x), \qquad (19)$$

$$u_m(t_k + 0, x) = \varphi_k^{(m)}(t_k + 0, x) \qquad (20)$$

Нехай V_{ε_2} – область із $Q^{(k)}$, $V_{\varepsilon_2} = \{(t,x) \in Q^{(k)}, |t - t^{(1)}| \leq \varepsilon_2^2 T_2, |x_i - x_i^{(2)}| \leq \varepsilon_2 T_1\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. В задачі (19), (20) виконаємо заміну $u_m(t,x) = v_m(t,y)$, $y_i = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(2)}) x_i$. В результаті одержимо

$$(L_2 v_m)(t,y) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t^{(1)}, x^{(2)}) \times$$

$$\times d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(2)}) \times$$

$$\times d_2(\beta_j^{(2)}, x^{(2)}) \partial_{y_i}\partial_{y_j}\Big] v_m =$$

$$= F_m(t, \widetilde{y}; v_m) + f_m(t, \widetilde{y}), \qquad (21)$$

$$v_m(t_k + 0, y) = \varphi_k^{(m)}(t_k; \widetilde{y}), \qquad (22)$$

де $\widetilde{y} = (d_1(-\beta_1^{(1)}, t^{(1)}) d_2(-\beta_1^{(2)}, x^{(2)}) x_1, \ldots, d_1(-\beta_n^{(1)}, t^{(1)}) d_2(-\beta_n^{(2)}, x^{(2)}) x_n)$.

Позначимо через $y_i^{(2)} = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(2)}) x_i^{(2)}$, $W_{\varepsilon_2}^{(k)} = \{(t,y), |t - t^{(1)}| \leq \varepsilon_2^2 T_2, |y_i - y_i^{(2)}| \leq \varepsilon_2 T_2^{1/2}\}$ і візьмемо тричі диференційовану функцію $\mu(t,y)$, яка задовольняє такі умови

$$\mu(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in W_{1/2}^{(k)}, 0 \leq \mu(t,y) \leq 1; \\ 0, & (t,y) \notin W_{3/4}^{(k)}, |\partial_t^j \partial_x^r \mu| \leq \\ & \leq c_{jr} d_1(-2j\gamma^{(1)}, t^{(1)}) \times \\ & \times \prod_{i=1}^n d_2(-r_i \gamma^{(2)}, x^{(2)}). \end{cases}$$

Тоді функція $Z_m(t,y) = v_m(t,y)\mu(t,y)$ буде розв'язком задачі Коші

$$(L_2 Z_m)(t,y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t^{(1)}, x^{(2)}) d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(2)}) d_2(\beta_j^{(2)}, x^{(2)}) \times$$

$$\times [\partial_{y_i}\mu \partial_{y_j} v_m + \partial_{y_j}\mu \partial_{y_i} v_m] +$$

$$+ v_m \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t^{(1)}, x^{(2)}) d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)},x^{(2)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(2)})\times$$

$$\times\partial_{y_i}\partial_{y_j}\mu-\partial_t\mu\Big]+\mu[F_m+f_m]\equiv F_m^{(1)}+\mu f_m, \tag{23}$$

$$Z_m(t_k+0,y)=\varphi_k^{(m)}(t_k,\widetilde{y})\mu(t_k,y). \tag{24}$$

На підставі теореми 5.1 із [9, стор.364] для розв'язку задачі (23), (24) справедливі нерівності

$$|y^{(1)}-y^{(2)}|^{-\alpha}\times$$

$$\times|\partial_t^j\partial_y^r Z_m(t,y^{(1)})-\partial_t^j\partial_y^r Z_m(t,y^{(2)})|\leq$$

$$\leq c(\|F_m^{(1)}+\mu f_m\|_{C^\alpha(W_{3/4}^{(k)})}+$$

$$+\|\mu\psi_m^{(k)}\|_{C^{2+\alpha}(W_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k))})\equiv B_m, \tag{25}$$

$$|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\alpha/2}|\partial_t^j\partial_y^r Z_m(t^{(1)},y)-$$

$$-\partial_t^j\partial_y^r Z_m(t^{(2)},y)|\leq c_1B_m,$$

де $\{(t,y^{(1)}),(t,y^{(2)}),(t^{(1)},y),(t^{(2)},y)\}\subset W_{1/4}^{(k)}$, $2j+|r|=2$.

Враховуючи властивості функції $\mu(t,y)$, знаходимо

$$\|F_m^{(1)}+\mu f_m\|_{C^\alpha(W_{3/4}^{(k)})}\leq c_2d_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)})\times$$

$$\times d_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(2)})(\|v_m;\gamma;0;0;W_{3/4}^{(k)}\|_2+$$

$$+\|v_m;W_{3/4}^{(k)}\|_0+\|f_m;\gamma;0;2\gamma;W_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$

$$+\|F_m;\gamma;0;2\gamma;W_{3/4}^{(k)}\|_\alpha), \tag{26}$$

$$\|\mu\varphi_k^{(m)}\|_{C^{2+\alpha}(W_{3/4}^{(k)}\cap\{(t=t_k)\})}\leq$$

$$\leq c_3d_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)})d_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(2)})\times$$

$$\times\|\varphi_k^{(m)};\widetilde{\gamma};0;0;W_{3/4}^{(k)}\cap\{(t=t_k)\}\|_{2+\alpha}. \tag{27}$$

Підставляючи (26), (27) у (25) та повертаючись до змінних (t,x), отримаємо

$$E_\delta\leq c_4(\|F_m;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$

$$+\|f_m;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+\|u_m;V_{3/4}^{(k)}\|_0+$$

$$+\|u_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\|_2+$$

$$+\|\varphi_k^{(m)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;V_{3/4}^{(k)}\cap\{(t=t_k)\}\|_{2+\alpha}). \tag{28}$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності і оцінки норми кожного доданка виразів F_m, $\varphi_k^{(m)}$, отримаємо нерівності

$$E_\delta\leq c(\varepsilon_1^\alpha(n+2)+n^2\varepsilon^2)\|u_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}^{(k)}|_{2+\alpha}+$$

$$+c_5\|u_m;V_{3/4}^{(k)}\|_0+c_6(\|f_m;\gamma,\beta;\mu_0;V_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$

$$+\|\varphi_k^{(m)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;V_{3/4}^{(k)}\cap\{(t=t_k)\}\|_{2+\alpha}). \tag{29}$$

Розглянемо випадок $\inf|x_\nu^{(2)}-z_\nu|\leq 2T_2$, $z\in\partial D$, $\nu\in\{1,\ldots,n\}$. Вважаємо для простоти $\nu=n$. Нехай $K(P)$ – куля радіуса R_0, $R_0\geq 4(T_2n+T_1)$, з центром в деякій точці $P\subset\Gamma^{(k)}$, яка містить точки $P_1^{(k)}$, $P_2^{(k)}$, $R_\nu^{(k)}$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D\cap K(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\eta(\xi)$ із [10, стор. 126]. В результаті такого перетворення область $Q^{(k)}\cap K(P)$ перейде в область D_2, для точок якої $\xi_n\geq 0$.

Вважаємо, що $u_m(t,x)$, $P_1^{(k)}$, $P_2^{(k)}$, $R_\nu^{(k)}$, $d_2(\gamma,x^{(2)})$ при цьому перетворенні переходить відповідно в $v_m(t,\xi)$, M_1, M_2, Z_i, $\widetilde{d}_2(\gamma,\xi^{(2)})$. Позначимо коефіцієнти диференціальних виразів L_1, B_1 в області D_2 через $\widetilde{a}_{i,j}(t,\xi),\widetilde{a}_i(t,\xi),\widetilde{a}_0(t,\xi),\widetilde{h}_k(t,\xi),\widetilde{h}_0(t,\xi)$. Тоді $v_m(t,\xi)$ буде розв'язком задачі

$$[\partial_t-\sum_{ij=1}^n\widetilde{a}_{i,j}(t^{(1)},\xi^{(2)})\partial_{\xi_i\xi_j}]v_m(t,\xi)=$$

$$=\sum_{ij=1}^n[\widetilde{a}_{i,j}(t,\xi)-\widetilde{a}_{i,j}(t^{(1)},\xi^{(2)})]\partial_{\xi_i\xi_j}v_m-$$

$$-\sum_{i=1}^n\widetilde{a}_i(t,\xi)\partial_{\xi_i}v_m-\widetilde{a}_0(t,\xi)v_m+f_m(t,\eta(\xi))\equiv$$

$$\equiv F_m^{(2)}(t,\xi;v_m)+f_m^{(1)}(t,\xi) \tag{30}$$

$$v_m(t_k+0,\xi)=\varphi_k^{(m)}(t_k,\eta(\xi)), \tag{31}$$

$$v_m(t,\xi)\mid_{\xi_n=0}\geq 0,$$

$$B_1v_m\mid_{\xi_n=0}=\sum_{i=1}^n\widetilde{h}_i(t^{(1)},\xi^{(2)})\frac{\partial v_m}{\partial y_i}\mid_{\xi_n=0}\geq$$

$$\geq\sum_{i=1}^n([\widetilde{h}_i(t^{(1)},\xi^{(2)})-h_i(t,\xi)]\frac{\partial v_m}{\partial y_i}-$$

$\widetilde{h}_0(t,\xi)v_m + g_m(t,\eta(\xi))) \mid_{\xi_n=0} \equiv G_m(t,\xi) \mid_{\xi_n=0}$ (32)

В задачі (30) – (32) зробимо заміну $v_m(t,\xi) = V_m(t,z)$, де $z_i = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\widetilde{d}_2(\beta_i^{(2)}, \xi^{(2)})\xi_i$. Область визначення $V_m(t,z)$ проходить через $\Pi^{(k)}$. Тоді $V_m(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$(L_3V_m) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})\times$$

$$\times\widetilde{d}_2(\beta_i^{(2)}, \xi^{(2)})d_2(\beta_i^{(2)}, \xi^{(2)})\partial_{z_i}\partial_{z_j}\Big]V_m(t,z) =$$

$$= F_m^{(2)}(t,Z,V_m) + f_m^{(1)}(t,z), \qquad (33)$$

$$V_m(t_k+0,Z) = \Phi_k^{(m)}(t_k,\eta(z)), \qquad (34)$$

$$V_m|_{z_n=0} \geq 0,$$

$$B_2V_m|_{z_n=0} \geq \Big[\sum_{i=1}^{n} \widetilde{h}_i(t^{(1)}, \xi^{(2)})d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\times$$

$$\times d_2(\beta_i^{(2)}, \xi^{(2)})\frac{\partial V_m}{\partial_{z_i}}\Big]\Big|_{z_n=0} \geq G_m(t,z)|_{z_n=0},$$

$$[V_m(B_2V_m - G)(t,z)]|_{z_n=0} = 0. \qquad (35)$$

де $Z = \{d_1(-\beta_1^{(1)}, t^{(1)})\widetilde{d}_2(-\beta_1^{(2)}, \xi^{(2)})z_1, \ldots, d_1(-\beta_n^{(1)}, t^{(1)})\widetilde{d}_2(-\beta_n^{(2)}, \xi^{(2)})z_n\}$.
Позначимо через $z_i^{(2)} = d_1(-\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\widetilde{d}_2(-\beta_i^{(2)}, \xi^{(2)})\xi_i^{(1)}$, $\Pi_\mu^{(k)} = \{(t,z) \in \Pi^{(k)} \mid |t-t^{(1)}| \leq \mu T_1, |z_i - z_i^{(1)}| \leq \mu\sqrt{T_1}, i \in \{1,\ldots,n\}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,z)$, яка задовольняє умови

$$\eta(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,z) \in \Pi_{1/2}^{(k)}, 0 \leq \eta(t,z) \leq 1; \\ 0, & (t,z) \notin \Pi_{3/4}^{(k)}, |\partial_t^l\partial_z^r\eta(t,z)| \leq \\ & \leq c_{lr}d_1(-(2k+|r|)\gamma^{(1)}, t^{(1)})\times \\ & \times\widetilde{d}_2(-(2k+|r|)\gamma^{(2)}, \xi^{(2)}). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,z) = V_m(t,z)\eta(t,z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$(L_3W_m)(t,z) = \sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})\times$$

$$\times\widetilde{d}_2(\beta_i^{(2)}, \xi)\widetilde{d}_2(\beta_j^{(2)}, \xi)\times$$

$$\times[\partial_{z_i}\eta\partial_{z_j}V_m + \partial_{z_j}\eta\partial_{z_i}V_m + V_m\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta] -$$

$$-V_m\partial_t\eta + \eta(F_m^{(2)} + f_m^{(1)}) \equiv F_m^{(3)}(t,z), \qquad (36)$$

$$w_m(t_k+0,z) = \varphi_k^{(m)}\eta = \Phi_m(z), \qquad (37)$$

$$W_m|_{z_n=0} \geq 0,$$

$$B_2W_m|_{z_n=0} \geq \Big[\sum_{i=1}^{n} V_m\widetilde{h}_i(t^{(1)}, \xi^{(2)})\times$$

$$\times d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\widetilde{d}_2(\beta_i^{(2)}, \xi^{(2)})\frac{\partial\eta}{\partial_{z_i}} -$$

$$-G_m(t,z)\Big]\Big|_{z_n=0} \geq G_m^{(1)}(t,z)|_{z_n=0}, \qquad (38)$$

$$[W_m(B_2W_m - G_m^{(1)})(t,z)]|_{z_n=0} = 0.$$

Можливі два випадки: існують точки межі $\Pi^{(k)} \cap \{z_n = 0\}$, у яких виконується умова

$$(B_2W_m - G_m^{(1)})|_{z_n=0} = 0, \qquad (39)$$

або таких точок не існує, тобто

$$(B_2W_m - G_m^{(1)})|_{z_n=0} > 0,$$

тоді з крайової умови (38) маємо

$$W_m|_{z_n=0} = 0. \qquad (40)$$

Нехай виконується умова (39), тоді встановимо оцінку для розв'язків задачі (36), (37), (39). Коефіцієнти рівняння (34) і крайової умови (39) згідно з накладеними умовами обмежені сталими, незалежними від точки $(t^{(1)}, \xi^{(2)})$. Тому, використовуючи теорему 6.1 [9, стор. 314], для довільних точок $\{M_3, M_4\} \subset \Pi_{3/4}^{(k)}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_3,M_4)|\partial_t^s\partial_y^rV_m(M_3) - \partial_t^s\partial_y^rV_m(M_4)| \leq$$

$$\leq c(\|F_m^{(1)}\|_{C^\alpha(\Pi_{3/4}^{(k)})} + \|\Phi_m\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(k)}\cap\{t=t_k\})} +$$

$$+\|G_m^{(1)}\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(k)})}), \qquad (41)$$

$2s+|r| = 2$, $d(M_3,M_4)$ – параболічна відстань між M_3 і M_4.

Враховуючи властивості функції $\psi(t,y)$, знаходимо оцінки норм виразів $F_m^{(1)}$, Φ_m, Π_m:

$$\|F_m^{(1)}\|_{C^\alpha(\Pi_{3/4}^{(k)})} \leq cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)})\times$$

$$\times\widetilde{d}_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)}, \xi^{(1)})(\|f_m;\gamma;0;2\gamma;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_\alpha +$$

$$+\|V_m;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_0 + \|V_m;\gamma;0;0;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_2), \qquad (42)$$

$$\|\Phi_m\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k))} \le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)})\times$$

$$\times\widetilde{d}_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)}, \xi^{(1)})\times$$

$$\times\|\varphi_m^{(k)};\widetilde{\gamma};0;0;\Pi_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}, \qquad (43)$$

$$\|G_m^{(1)}\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(k)})} \le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)})\times$$

$$\times\widetilde{d}_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)}, \xi^{(1)})(\|G_m;\gamma;0;\gamma;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$

$$+\|v_m;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_0+\|v_m;\gamma;0;0;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_2). \qquad (44)$$

Із визначення простору $H^l(\gamma;\beta;q;Q)$ випливає виконання нерівностей

$$c_1\|v_m;\gamma;0;0;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_l \le \|v_m;\gamma;\beta;0;D_2\|_l \le$$

$$\le c_2\|V_m;\gamma;0;0;\Pi_{3/4}^{(k)}\|_l.$$

Підставляючи (42) – (44) у (41) і повертаючись до змінних (t,x), одержимо нерівності

$$E_\mu \le (\varepsilon^\alpha(n+2)+\varepsilon_1 Cn^2)\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}+$$

$$+c(\|u_m;Q^{(k)}\|_0+\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(k)}\|_\alpha+$$

$$+\|g_m;\gamma;\beta;\gamma;Q^{(k)}\|_{1+\alpha}+$$

$$+\|\varphi_k^{(m)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}). \qquad (45)$$

Якщо виконана умова (40), то досліджуємо задачу (36), (37), (38). Коефіцієнти рівняння (36) обмежені сталими, незалежними від точки $(t^{(1)},\xi^{(2)})$. Тому, використовуючи теорему 6.2 [9 стор. 368] враховуючи властивості функції $\eta(t,z)$ і умови а), б), маємо нерівності

$$E_\mu \le (\varepsilon^\alpha(n+2)+\varepsilon_1 Cn^2)\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}+$$

$$+c(\|u_m;Q^{(k)}\|_0+\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(k)}\|_\alpha+$$

$$+\|\varphi_k^{(m)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}). \qquad (46)$$

Скориставшись нерівностями (13), (15), (16), (45), (46) і вибравши ε, ε_1 досить малими, отримаємо оцінку (12).

Доведення теореми 1. Оскільки

$$\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha \le c\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha,$$

$$\|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha} \le c\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha},$$

$$\|\varphi_k^{(m)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;\Pi^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} \le$$

$$\le c\|\varphi_k;\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;\Pi^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha},$$

то, враховуючи оцінку (12), для розв'язків задачі (8) – (10) справджується оцінка

$$||u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}||_{2+\alpha} \le$$

$$\le c\Big\{||f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}||_{1+\alpha}+$$

$$+||\varphi_k;\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)||_{2+\alpha}+$$

$$+||g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}||_{1+\alpha}\Big\}, \qquad (47)$$

права частина якої не залежить від $m=(m_1,m_2)$. Крім того, послідовності $\{u_m^{(0)}\}\equiv\{u_m\}$, $\{u_m^{(1)}\}\equiv\{d_1(\gamma^{(1)},t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},x)\partial_{x_i}u_m(t,x)\}$, $\{u_m^{(2)}\}\equiv\{d_1(2\gamma^{(1)},t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},x)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_j^{(2)},x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m\}$, $\{u_m^{(3)}\}=\{d_1(2\gamma^{(1)},t)d_2(2\gamma^{(2)},x)\partial_t u_m(t,x)\}$ рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в $\overline{Q}^{(k)}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{u_{\widetilde{m}_k}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $\overline{Q}^{(k)}$ до $\{u_0^{(\nu)}\}$, $\nu\in\{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m_{1k}\longrightarrow\infty$, $m_{2k}\longrightarrow\infty$ в задачі (8) – (10), одержимо, що $u(t,x)=u_0^{(0)}(t,x)$ єдиний розв'язок задачі (1) – (3), $u\in H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і правильна оцінка (7).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *G. Duvaut, J.-L. Lions* (1972) Les inequations en mecanique et en physique. Paris: Dunod.

2. *R. Glowinski, J.-L. Lions, R. Tremolieres* (1976) Analyse numerique des inequations variationnelles. Paris: Dunod.

3. *Ж.-Л. Лионс* (1971) О неравенствах в частных производных. УМН.

3. *J.-L. Lions* (1971) About inequalities in partial derivatives. UMN. (Russian)

4. *Ж.-Л. Лионс* (1972) Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М: Мир.

4. *J.-L. Lions* (1972) Optimal control of systems described by partial differential equations. M: World. (Russian)

5. *Л. И. Каминин, Б.Н. Химченко* (1981) Об априорных оценках решений параболического уравнения 2-го порядка вблизи нижней крышки параболической границы. Сибірський математичний журнал.

5. *L.I. Kaminin, B.N. Himchenko* (1981) About a priori estimates for solutions of a parabolic equation of the second order near the lower curve of a parabolic boundary. Siberian Mathematical Journal. (Russian)

6. *М. І. Матійчук* (2003) Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. Чернівці: Прут.

6. *M.I. Matiychuk* (2003) Parabolic and elliptical boundary value problems with peculiarities. Chernivtsi: Prut.

7. *Б.В. Базалий, Н.В. Краснощек* (2004) Класическая разрешимость первой начально-краевой задачи для нелинейного сильно вирождающегося параболического уравнения// Укр. мат. журнал. – 2004. - 56 №10. -с. 1299-1320

7. *B.V. Bazaliy, N.V. Krasnoshchek* (2004) Classical solvability of the first initial-boundary problem for a nonlinear strongly degenerate parabolic equation: Ukrainian Mathematical Journal, 56 (10), 1299-1320. (in Ukrainian)

8. *И.Д. Пукальський* (2003) Нелокальние краевие задачи для неравномерно параболических уравнений // Дифф. уравнения. – 2003. - т.39.№6 -с. 777-787.

8. *I. D. Pukalskyi* (2003) Nonlocal boundary value problems for unevenly parabolic equations. Differential equations.

9. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

9. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* (1968) Linear and quasilinear equations of parabolic type. - Transl. Math. Monogr., Vol. 23. - Providence, RI: AM. xi+648 p.

10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

10. *Friedman A.* (1964) Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

11. *І.Д. Пукальский.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.

11. *I. D. Pukalskyi* (2008) The boundary value problems for unevenly parabolic and elliptic equations with degeneracy and singularities. Chernivtsi.