УДК 517.51

©2018 р. О.В. Сафонова

Державний університет телекомунікацій

ОСЛАБЛЕННЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ЗЛІЧЕННА КРАТНІСТЬ ВІДОБРАЖЕНЬ

Розглядаються ослаблення неперервності та відображення зліченної кратності для деякої множини значень всюди другої категорії в образі у випадку повних сепарабельних незліченних просторів. Встановлюється наявність квазінеперервності у оберненого відображення. Доводиться, що коли виключити деяку множину першої категорії, то існує щільна множина точок локального гомеоморфізму в доповненні простору.

Ключові слова: квазінеперервність, бієкція, точка взаємної однозначності, точка локального гомеоморфізму, зліченний рівень відображення, повний метричний простір, множина всюди другої категорії.

Weakening of continuity and mappings of countable multiplicity for a value set of the second category in image are considered in the case of complete separable uncountable spaces. The existence of quasicontinuity for the inverse mapping is proved. It is shown that if a set of the first category is excluded there exists a dence set of local homeomorphism points on the complement of space.

Keywords: quasicontinuity, bijection, one-to-one correspondence point, local homeomorphism point, countable level of mapping, complete metric space, set of the second category.

1. Вступ. Дослідження властивостей аналогів неперервності посідають гідне місце в працях багатьох математиків. За останні десятиліття у цьому напрямі вагомий внесок зробила Чернівецька математична школа завдяки глибоким результатам, отриманим у працях В.К. Маслюченка та його учнів [1-5].

Серед неперервних відображень особливу увагу математиків привертали зліченнократні відображення. Праці М.М. Лузіна, П.С. Александрова та Ю.Ю. Трохимчука заклали основу для подальших досліджень з цієї тематики [6-8].

У цій статті розглядаються деякі ослаблення неперервності та встановлюється наявність квазінеперервності у оберненого відображення. Розглядається токож для повних метричних просторів відображення зліченної кратності для деякої множини значень всюди другої категорії в образі. При цьому доводиться, що якщо у певних випадках послабленої неперервності знехтувати деякою множиною першої категорії в просторі, то існує щільна множина точок локального гомеоморфізму.

2. Основні поняття. Нехай $f : X \to Y$ – відображення топологічних просторів X і Y, $C(f)$ – множина точок неперервності. Прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in Y$ назвемо рівнем відображення f (ця множина, можливо, порожня). Якщо будь-який рівень відображення $f^{-1}(y)$ є не більше ніж зліченною множиною, то f будемо називати відображенням зліченної кратності або зліченнократним, а самі рівні – зліченними. Точка $x_0 \in X$ називається точкою взаємної однозначності відображення f, якщо $f^{-1}f(x_0) = x_0$ [8]. Точка x простору X називається точкою локального гомеоморфізму f, якщо існує окіл $U \subseteq X$ точки x, такий, що звуження відображення на цей окіл $f|_U$ є гомеоморфізмом [7].

Позначимо замикання та внутрішність довільної множини $A \subseteq X$ відповідно через $\overline{A}$ і $IntA$. Множина $A \subseteq X$ називається регулярно відкритою, регулярно напіввідкритою чи напіввідкритою, якщо відповідно виконуються $A = Int\overline{A}$, $Int\overline{A} \subseteq A \subseteq \overline{Int\overline{A}}$ або $A \subseteq \overline{IntA}$ [9].

Множина A в метричному сепарабельному просторі X називається нульвимірною, якщо її вимірність $dimA = 0$. Будь-яка нульвимірна множина міститься в деякій нульвимірній G_δ-множині [10].

Надалі потрібні наступні означення [5]. Відображення f називається:

- квазінеперервним у точці $x \in X$, якщо для будь-яких околів V точки $f(x)$ в Y і U точки x в X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$;
- ледь неперервним у точці $x \in X$, якщо $Intf^{-1}(V) \neq \varnothing$ для кожного околу V точки $f(x)$ в Y;
- майже квазінеперервним у точці $x \in X$, якщо для будь-яких околів V і U точок $f(x)$ і x відповідно в Y та X існує множина A в X, така, що $Int\overline{A} \neq \varnothing$, $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$.

Відображення $f : X \to Y$ є квазінеперервним, ледь неперервним чи майже квазінеперервним, якщо воно є таким у кожній точці $x \in X$.

Буде потрібна добре відома характеризація квазінеперервності [2]:

(1) відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y є квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли для кожної відкритої непорожньої множини U в X та щільної в U множини E маємо, що $f(U) \subseteq \overline{f(E)}$.

При дослідженні зліченнократних B-вимірних відображень [11] та точково розривних відображень зі значеннями в регулярних просторах [12] були отримані такі результати:

(2) якщо f – зліченнократне B-вимірне відображення повного сепарабельного нульвимірного незліченного простору X, то існує множина першої категорії D в X, така, що множина точок локального гомеоморфізму звуження відображення $f|_{X\setminus D}$ на доповнення $X \setminus D$ всюди щільна в $X \setminus D$;

(3) для топологічного простору X, регулярного простору Y та точково розривного відображення $f : X \to Y$ умови квазінеперервності і майже квазінеперервності рівносильні.

Потрібні також наступні послаблені умови неперервності відображення $f : X \to Y$ [9]:

(i) для кожної напіввідкритої множини $V \subseteq Y$ її прообраз $f^{-1}(V)$ є напіввідкритою множиною в просторі X;

(ii) для кожної регулярно напіввідкритої множини $V \subseteq Y$ її прообраз $f^{-1}(V)$ – напіввідкрита множина в X;

(iii) для кожної регулярно відкритої множини $V \subseteq Y$ її прообраз $f^{-1}(V)$ є регулярно відкритою множиною в X;

(iv) для кожної регулярно відкритої множини $V \subseteq Y$ її прообраз $f^{-1}(V)$ – відкрита множина в X;

(v) для кожної відкритої множини $V \subseteq Y$ її прообраз $f^{-1}(V)$ є напіввідкритою множиною в X (quasicontinuity).

3. Квазінеперервність оберненого відображення. Питання, що пов'язані з наявністю у оберненого відображення властивостей прямого відображення, вивчаються доволі часто математиками. Серед останніх досліджень у цьому напрямі слід відмітити результати про ослаблену неперервність оберненого відображення, отримані В.В. Нестеренком [4]. У цій статті розглядається відображення повних метричних просторів, яке є біективним лише на деякій множині всюди другої категорії.

Для доведення основних теорем потрібні наступні допоміжні леми.

Лема 1. Нехай X, Y – топологічні простори і $f : X \to Y$ – ледь неперервне відображення. Якщо для кожної множини $A \subseteq X$, $IntA \neq \varnothing$ виконується $Intf(A) \neq \varnothing$, то $f(X) \subseteq \overline{Intf(X)}$.

Доведення. Припустимо, що $f(X) \setminus \overline{Intf(X)} \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_0 \in X$, така, що її образ

$f(x_0) \in f(X) \setminus \overline{Intf(X)}$. Оскільки f – ледь неперервне відображення, то для околу $Y \setminus \overline{Intf(X)}$ точки $f(x_0)$ в просторі Y маємо, що $Intf^{-1}(Y \setminus \overline{Intf(X)}) \neq \varnothing$. Звідси випливає, що виконується $\varnothing \neq Intf(Intf^{-1}(Y \setminus \overline{Intf(X)})) \subseteq Intf(X)$, всупереч тому, що $f(Intf^{-1}(Y \setminus \overline{Intf(X)})) \bigcap Intf(X) = \varnothing$. Лема доведена.

Лема 2. Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – квазінеперервне відображення, таке, що якщо $A \subseteq X$ і $IntA \neq \varnothing$, то $Intf(A) \neq \varnothing$. Тоді

1) якщо M – ніде не щільна множина в просторі Y, то її прообраз $f^{-1}(M)$ ніде не щільний в X;

2) якщо U – відкрита множина в просторі X, то її образ $f(U)$ є напіввідкритою множиною в Y.

Доведення. 1) Припустимо, що існує ніде не щільна множина M_1 в просторі Y, така, що $Int\overline{f^{-1}(M_1)} \neq \varnothing$. Тоді маємо, що $Intf(Int\overline{f^{-1}(M_1)}) \neq \varnothing$. Оскільки f – квазінеперервне відображення, то, згідно з (1), виконується $f(Int\overline{f^{-1}(M_1)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(M_1))} = \overline{M_1}$. Звідси випливає, що $\varnothing \neq Intf(Int\overline{f^{-1}(M_1)}) \subseteq \overline{M_1}$. А це суперечить тому, що замикання $\overline{M_1}$ множини M_1 ніде не щільне в просторі Y. Отже, припущення хибне.

2) Нехай U – довільна відкрита непорожня множина в просторі X. Відомо [13, p.134], що звуження $g = f|_U$ відображення f на множину U є квазінеперервним відображенням. Кожне квазінеперервне відображення є ледь неперервним [5]. При цьому, якщо $A \subseteq U \subseteq X$ і $IntA \neq \varnothing$, то $Intg(A) = Intf(A) \neq \varnothing$. Тоді згідно з лемою 1 маємо, що $f(U) = g(U) \subseteq \overline{Intg(U)} = \overline{Intf(U)}$. Цим лема 2 повністю доведена.

Всі умови в лемі 2 є істотними. Так, щодо умови квазінеперервності відображення f, то на це вказує наступний приклад.

Приклад 1. Функція $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ визначається так: $f(x) = x$ при $x \neq \dfrac{1}{2}$ і $f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{7}{8}$. Зрозуміло, що у точці $x = \dfrac{1}{2}$ ця функція не є квазінеперервною. При цьому образ $f(U) = (\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}) \bigcup (\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}) \bigcup \{\dfrac{7}{8}\}$ відкритої множини $U = (\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4})$ не є напіввідкритою множиною в просторі $\mathbb{R}$.

Лема 3. Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір і $f : X \to Y$ – відображення, таке, що якщо $A \subseteq X$ і $IntA \neq \varnothing$, то $Intf(A) \neq \varnothing$. Тоді умови (i) та (ii) еквівалентні.

Доведення. Очевидно, якщо виконується умова (i), то виконується умова (ii). Покажемо, що коли відображення f задовольняє умову (ii), то воно задовольняє і умову (i). Припустимо, що це не так. Тоді для деякої напіввідкритої множини $V_1 \subseteq Y$ її прообраз $f^{-1}(V_1)$ не є напіввідкритою множиною в просторі X, тобто виконується $f^{-1}(V_1) \setminus \overline{Intf^{-1}(V_1)} \neq \varnothing$. Розглянемо об'єднання $V_2 = V_1 \bigcup Int\overline{IntV_1}$. Оскільки V_2 – регулярно напіввідкрита множина, то її прообраз $f^{-1}(V_2)$ є напіввідкритою множиною в X. При цьому зрозуміло, що $f^{-1}(V_1) \subseteq f^{-1}(V_2)$. Множина $X \setminus \overline{Intf^{-1}(V_1)} \neq \varnothing$ відкрита в X, причому виконується $f^{-1}(V_2) \bigcap (X \setminus \overline{Intf^{-1}(V_1)}) \neq \varnothing$. Тоді існує відкрита непорожня множина $U \subseteq X$, така, що $U \subseteq f^{-1}(V_2) \bigcap (X \setminus \overline{Intf^{-1}(V_1)})$. Будучи підмножиною, яка належить межі відкритої множини $IntV_1$, доповнення $V_2 \setminus V_1$ ніде не щільне в просторі Y. Оскільки Y – регулярний простір і $Intf(U) \neq \varnothing$, то з попереднього випливає, що існує регулярно відкрита множина $\varnothing \neq V_3 \subseteq V_1 \bigcap Intf(U)$, така, що виконуються співвідношення $f^{-1}(V_3) \bigcap (X \setminus \overline{Intf^{-1}(V_1)}) \neq \varnothing$ і $f^{-1}(V_3) \subseteq f^{-1}(V_1)$. Звідси, внаслідок того, що $f^{-1}(V_3)$ – напіввідкрита множина в просторі X, маємо, що $Intf^{-1}(V_3) \bigcap (X \setminus \overline{Intf^{-1}(V_1)}) \neq \varnothing$. А це суперечить тому, що $Intf^{-1}(V_3) \subseteq Intf^{-1}(V_1)$. Лема 3 доведена.

Тепер мають місце такі основні твердження.

Теорема 1. Нехай X, Y – повні метричні простори (простір X сепарабельний і незліченний) і $f : X \to Y$ – відображення, причому для кожної множини $A \subseteq X$, $IntA \neq \varnothing$ виконується $Intf(A) \neq \varnothing$ та існує множина Q всюди другої категорії в X, така, що звуження відображення $f|_Q$ на множину Q є бієктивним відображенням. Якщо відображення f задовольняє умову (i) або умову (ii), то обернене відображення f^{-1} – квазінеперервна бієкція.

Доведення. Умови (i) та (ii) (за лемою 3) еквівалентні. Тому надалі вважатимемо, що відображення f задовольняє умову (i) і, отже, воно квазінеперервне. Якщо U – довільна відкрита множина в просторі X, то згідно з лемою 2 її образ $f(U)$ є напіввідкритою множиною в просторі Y.

Повний метричний простір X є берівським простором. Тоді, як відомо [5, с.15], для повного і, отже, слабко вичерпного простору Y квазінеперервне відображення f має щільну в просторі X G_δ-множину точок неперервності $C(f)$. Множина всюди другої категорії Q містить щільну G_δ-множину Q_1 в X[7, с.164-165]. Візьмемо зліченну щільну множину N в просторі X. Нульвимірна множина N міститься в деякій нульвимірній (і щільній в X) G_δ-множині Q_2[10, с.294]. Перетин цих G_δ-множин $Q_0 = C(f) \bigcap Q_1 \bigcap Q_2$ – щільна G_δ-множина в повному просторі X[10, с.428]. Оскільки Q_0 – повний сепарабельний незліченний нульвимірний простір [10, с.259-260, 419], то звуження відображення $f|_{Q_0}$ на множину Q_0 задовольняє усі умови однієї теореми в [11]. Тому згідно з результатом (2) існує множина першої категорії D в Q_0 (і, отже, в просторі X), така, що множина точок локального гомеоморфізму звуження відображення $g = f|_{Q_0 \setminus D}$ на доповнення $Q^* = Q_0 \setminus D$ всюди щільна в Q^*, причому саму множину всюди другої категорії Q^* в X можна вважати G_δ-множиною[7, с.164-165].

Застосуємо тепер метод доведення від супротивного. Припустимо, що існують принаймні дві точки $x_1, x_2 \in X$, такі, що $x_1 \neq x_2$ і $f(x_1) = f(x_2) = y^* \in Y$. Візьмемо відкритий окіл U точки x_1 в просторі X, такий, що $x_2 \notin \overline{U}$. Тоді доповнення $X \setminus \overline{U}$ – відкритий окіл точки x_2 в X. З попереднього випливає, що кожний з образів $f(U)$ і $f(X \setminus \overline{U})$ є напіввідкритою множиною в просторі Y.

Покажемо спочатку, що $Intf(U) \bigcap Intf(X \setminus \overline{U}) = \varnothing$. Якщо це не так, то виконується співвідношення $\varnothing \neq V = Intf(U) \bigcap Intf(X \setminus \overline{U})$. Внаслідок квазінеперервності відображення f прообраз $f^{-1}(V)$ відкритої множини V є напіввідкритою множиною в просторі X і тому $Int(f^{-1}(V) \bigcap U) \neq \varnothing$. Розглянемо відображення $g = f|_{Q^*}$. Оскільки множина точок локального гомеоморфізму відображення g всюди щільна в Q^* і, отже, в $Q^* \bigcap Int(f^{-1}(V) \bigcap U)$, то існує відкрита множина $G \subseteq Int(f^{-1}(V) \bigcap U)$, така, що звуження відображення $g_1 = g|_{Q^* \bigcap G}$ на множину $Q^* \bigcap G$ є гомеоморфізмом. При цьому маємо, що $g_1(Q^* \bigcap G) = f(Q^* \bigcap G)$. Перетин $Q^* \bigcap G$ є G_δ-множиною, щільною в G, а f – квазінеперервне відображення. Тоді згідно з характерізацією квазінеперервності (1) маємо, що $f(G) \subseteq \overline{f(Q^* \bigcap G)}$. З цього і з того, що g_1 – гомеоморфізм випливає, що $Intf(G) \bigcap f(Q^* \bigcap G)$ – щільна G_δ-множина в $Intf(G) \subseteq V$ (звичайно враховуючи, що X – повний простір [10, с.440] і $f(G)$ – напіввідкрита множина в просторі Y). Оскільки прообраз $f^{-1}(Intf(G))$ – напіввідкрита множина в X, то $Int(f^{-1}(Intf(G)) \bigcap (X \setminus \overline{U})) \neq \varnothing$. При цьому множина точок локального гомеоморфізму g щільна в $Q^* \bigcap Int(f^{-1}(Intf(G)) \bigcap (X \setminus \overline{U}))$. Тоді знову знайдеться відкрита множина $\varnothing \neq W \subseteq Int(f^{-1}(Intf(G)) \bigcap (X \setminus \overline{U}))$, така, що звуження відображення $g_2 = g|_{Q^* \bigcap W}$ на множину $Q^* \bigcap W$ є гомеоморфізмом, причому образ $g_2(Q^* \bigcap W) = f(Q^* \bigcap W)$ є щільною G_δ-множиною в $Intf(W) \subseteq Intf(G)$. Звідси і з того, що Y – повний простір випливає, що $f(Q^* \bigcap W) \bigcap f(Q^* \bigcap G) \bigcap Intf(W) \neq \varnothing$. Дістали суперечність з тим, що $W \bigcap G = \varnothing$ і $f|_{Q^*}$ – бієктивне відображення.

Тепер, враховуючи, що $Intf(U) \bigcap Intf(X \setminus \overline{U}) = \varnothing$ і $f(x_1) = f(x_2) = y^*$, розглянемо одну будь-яку з напіввідкритих множин $Intf(U) \bigcup \{y^*\}$ і

$Intf(X \setminus \overline{U})\bigcup\{y^*\}$. Нехай це множина $Intf(U)\bigcup\{y^*\}$. Тоді згідно з умовою (i) теореми прообраз $f^{-1}(Intf(U)\bigcup\{y^*\})$ – напіввідкрита множина в просторі X, причому виконується $\varnothing \neq U_1 = Intf^{-1}(Intf(U)\bigcup\{y^*\})\bigcap(X\setminus\overline{U})$. Тому дістанемо $Intf(U_1) \neq \varnothing$. Звідси та з попереднього випливає, що $Intf(U)\bigcap Intf(X \setminus \overline{U}) \neq \varnothing$. Знову одержали суперечність. Отже, припущення хибне.

Таким чином, відображення f – бієкція і це разом з тим, що образ $f(U)$ будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subseteq X$ є напіввідкритою множиною в просторі Y, завершує доведення теореми.

Як показують приклади, всі умови теореми 1 є істотними. Так, в [14, p.32] З. Гранде і Т. Натканец навели приклад квазінеперервної бієкції f, для якої обернене відображення f^{-1} не є квазінеперервним. Там же показано, що у випадку, коли для внутрішності образа кожної відкритої непорожньої множини U виконується $Intf(U) \neq \varnothing$, то відображення f^{-1} є квазінеперервним. В розглянутому прикладі 1 функція f не є квазінеперервною (отже, не задовольняє умову (i)). При цьому усі інші умови теореми 1 для неї виконуються. Однак, ця функція не є бієктивною. Ще одним прикладом може бути функція $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$. Ця функція не є бієктивною, причому не існує жодної множини всюди другої категорії $Q \subseteq [-1, 1]$ такої, щоб звуження функції $f|_Q$ на множину Q було бієкцією. При цьому неважко знайти щільну зліченну підмножину N в $[-1, 1]$ (першої категорії!), таку, що звуження функції $f|_N$ є бієкцією.

З доведення теореми 1 випливає, що умову бієктивності звуження відображення $f|_Q$ можна замінити на умову існування множини точок взаємної однозначності H. При цьому для множини H замість бути всюди другої категорії досить вимагати лише її всюди щільності в просторі X. Тоді твердження теореми 1 залишається справедливим для гаусдорфового простору X та регулярного простору Y.

Теорема 2. Нехай X – гаусдорфів простір, Y – регулярний простір і $f : X \to Y$ – відображення, причому для кожної множини $A \subseteq X$, $IntA \neq \varnothing$ виконується $Intf(A) \neq \varnothing$ та існує щільна множина H точок взаємної однозначності відображення f в просторі X. Якщо відображення f задовольняє або умову (i), або умову (ii), то обернене відображення f^{-1} є квазінеперервною бієкцією.

4. Ослаблення неперервності та точки локального гомеоморфізму. Дослідження зліченнократних неперервних відображень часто пов'язані з питаннями щодо існування множини точок локального гомеоморфізму. Серед результатів, отриманих останнім часом у цьому напрямі, слід відзначити теорему Ю.Ю. Трохимчука про існування точок локального гомеоморфізму для неперервних відображень скінченновимірних многовидів з множиною зліченних рівнів не першої категорії [15]. В цій статті розглядаються відображення повних метричних просторів з множиною зліченних рівнів всюди другої категорії при деяких умовах послаблення неперервності.

Далі потрібні ще такі дві леми.

Лема 4. Нехай X – топологічний простір і Y – регулярний простір. Якщо відображення $f : X \to Y$ задовольняє умову (iv), то воно квазінеперервне.

Доведення. Покажемо, що для кожної відкритої непорожньої множини U в X та щільної в U множини E виконується включення $f(U) \subseteq \overline{f(E)}$. Тоді за відомою характерізацією квазінеперервності (1) відображення f буде квазінеперервним. Припустимо, що це не так і для деякої відкритої множини $\varnothing \neq U_1 \subseteq X$ та щільної в U_1 множини E_1 маємо, що $f(U_1) \setminus \overline{f(E_1)} \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_1 \in U_1$ і, внаслідок регулярності простору Y, регулярно відкрита множина $V \subseteq Y \setminus \overline{f(E_1)}$, такі, що $f(x_1) \in V$ і $\overline{V}\bigcap\overline{f(E_1)} = \varnothing$. Згідно з умовою (iv) прообраз $f^{-1}(V)$ є відкритою множиною в просторі X і тому $G = U_1\bigcap f^{-1}(V)$ – відкрита непорожня множина, причому $x_1 \in G$. Оскільки $U_1 \subseteq \overline{E_1}$, то $G\bigcap E_1 \neq \varnothing$. Звідси випливає, що $f(G)\bigcap f(E_1) \neq \varnothing$, всупереч тому, що $f(G) \subseteq V \subseteq Y \setminus \overline{f(E_1)}$. Отже, припущення хибне. Лема 4 доведена.

Лема 5. Нехай X, Y – повні метричні простори і $f : X \to Y$ – квазінеперервне відображення, причому для кожної множини $A \subseteq X$, $IntA \neq \varnothing$ виконується $Intf(A) \neq \varnothing$. Якщо множина $M \subseteq f(X)$ має одну з властивостей (відносно образа $f(X)$):

1) є множиною першої категорії;

2) є множиною всюди другої категорії,

то її прообраз $f^{-1}(M)$ має відповідну властивість в просторі X.

Доведення. 1) Нехай $M \subseteq f(X)$ – множина першої категорії в образі $f(X)$. Тоді множина M першої категорії і в просторі Y [16, c.163]. Тому вона може бути зображеною у вигляді зліченного об'єднання $M = \bigcup\limits_i M_i$ ніде не щільних в Y множин M_i, $i = 1, 2, \ldots$. Оскільки f – квазінеперервне відображення, то за лемою 2 їх прообрази $f^{-1}(M_i)$ – ніде не щільні множини в просторі X. При цьому виконується $f^{-1}(M) = f^{-1}(\bigcup\limits_i M_i) = \bigcup\limits_i f^{-1}(M_i)$. Отже, $f^{-1}(M)$ – множина першої категорії в X.

2) Згідно з лемою 2 маємо, що $f(X) \subseteq \overline{Intf(X)}$. Оскільки Y – повний метричний простір, то замкнена множина $\overline{Intf(X)} \subseteq Y$ теж є повним простором, причому, будучи множиною другої категорії в собі, відкрита множина $Intf(X)$ всюди щільна (і тому всюди другої категорії) в $\overline{Intf(X)}$ і, отже, в $f(X)$ [16, c.144, 163-164]. Нехай тепер $M \subseteq f(X)$ – множина всюди другої категорії в образі $f(X)$. Тоді зрозуміло, що доповнення $f(X) \setminus M$ – множина першої категорії в множині $f(X)$. З попереднього випливає, що прообраз $f^{-1}(f(X) \setminus M)$ є множиною першої категорії в X. Враховуючи те, що X – повний метричний простір і виконується $f^{-1}(M) = f^{-1}(f(X) \setminus (f(X) \setminus M)) = f^{-1}(f(X)) \setminus f^{-1}(f(X) \setminus M)$ тобто $f^{-1}(M) = X \setminus f^{-1}(f(X) \setminus M)$, маємо, що $f^{-1}(M)$ – множина всюди другої категорії в просторі X [7, c.164]. Лема 5 доведена.

Тепер маємо основне твердження.

Теорема 3. Нехай X, Y – повні метричні простори (простір X сепарабельний і незліченний) і $f : X \to Y$ – відображення з множиною зліченних рівнів $E \subseteq f(X)$ всюди другої категорії, таке, що для кожної множини $A \subseteq X$, $IntA \neq \varnothing$ виконується $Intf(A) \neq \varnothing$. Якщо відображення f точково розривне і майже квазінеперервне або задовольняє одну будь-яку з умов (i) – (v), то існує множина першої категорії D в просторі X, така, що множина точок локального гомеоморфізму звуження відображення $f|_{X \setminus D}$ на доповнення $X \setminus D$ всюди щільна в $X \setminus D$.

Доведення. Як відомо [10, c.127-128, 140], кожний метричний простір регулярний. Тоді, згідно з результатом (3), для точково розривного відображення f умови квазінеперервності і майже квазінеперервності рівносильні. Очевидно, що з умови (i) випливає квазінеперервність відображення. Оскільки для будь-якої множини $A \subseteq X$, $IntA \neq \varnothing$ виконується $Intf(A) \neq \varnothing$, то умови (i) та (ii) еквівалентні за лемою 3. Якщо ж виконується умова (iii), то зрозуміло, що виконується і умова (iv). За лемою 4 відображення, яке задовольняє умову (iv), є квазінеперервним. Отже, для доведення теореми досить розглянути лише випадок, коли відображення f квазінеперервне, тобто задовольняє умову (v).

Оскільки відображення f задовольняє всі умови леми 5, то прообраз $f^{-1}(E)$ множини зліченних рівнів $E \subseteq f(X)$ є множиною всюди другої категорії і, отже, містить всюди щільну G_δ-множину Q_1 в повному метричному просторі X [7, c.164-165]. Відомо [5, c.15], що для квазінеперервного відображення берівського простору в слабко вичерпний простір існує всюди щільна G_δ-множина точок неперервності $C(f)$. Повний метричний простір є берівським і, звичайно, слабко вичерпним простором. Тому за попереднім маємо всюди щільну в X G_δ-множину Q_2 точок неперервності відображення f. Скориставшись сепарабельністю простору X, знайдемо зліченну всюди щільну множину N в X. Нульвимірна множина N міститься в деякій нульвимірній (і всюди щільній в просторі X) G_δ-множині Q_3 [10, c.294]. Враховуючи, що X – повний простір, так само як і при доведенні теореми 1, маємо, що перетин $Q = Q_1 \bigcap Q_2 \bigcap Q_3$ – всюди щільна в X нульвимірна G_δ-множина. При цьому звуження $g = f|_Q$ відображення f на множину Q є зліченнократним і неперервним відображенням.

Будучи нульвимірною G_δ-множиною (і всюди другої категорії) в повному сепарабельному незліченному просторі X, множина Q є топологічно повним простором, сепарабельним і незліченним [10, с.259-260, 419]. Тоді згідно з результатом (2) існує множина першої категорії D_1 в Q, така, що звуження відображення $g|_{Q\setminus D_1}$ на множину $Q \setminus D_1$ має всюди щільну в $Q \setminus D_1$ множину точок локального гомеоморфізму. Отже, маємо множину $D = (X \setminus Q) \bigcup D_1$ першої категорії в просторі X [7, с.164], таку, що множина точок локального гомеоморфізму звуження відображення $f|_{X\setminus D}$ на доповнення $X \setminus D$ всюди щільна в $X \setminus D$. Теорема 3 доведена.

Існують приклади, які показують, що якщо не для кожної відкритої непорожньої множини U в повному метричному просторі X виконується умова $Int f(U) \neq \varnothing$, то твердження теореми 3 перестає бути справедливим. Одним з таких прикладів є приклад добре відомої канторової функції, яка визначена на всьому відрізку $[0, 1]$ [17, с.126-128]. Вона неперервна і зростаюча, а множина її значень збігається з $[0, 1]$. Ця функція має G_δ-множину зліченних рівнів всюди щільну (отже, всюди другої категорії) в $[0, 1]$ та є сталою в кожному інтервалі доповнення канторової множини C (відкритої всюди щільної множини $[0, 1] \setminus C$).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко, В.К., Михайлюк, В.В., Собчук, О.В.* (1995). Дослідження про нарізно неперервні відображення. Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. Чернівці, Рута, 192-246.

2. *Маслюченко, В.К.* (1999). Нарізно неперервні відображення і простори Кете. (Докторська дисертація). Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна.

3. *Михайлюк, В.В.* (2008). Координатний метод і теорія нарізно неперервних відображень. (Докторська дисертація). Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна.

4. *Нестеренко, В.В.* (2015). Ослаблена неперервність оберненого відображення. Буковинський математичний журнал, 3(1), 81-86.

5. *Нестеренко, В.В.* (2016). Аналоги неперервності: зв'язки між нарізними і сукупними властивостями та теореми про декомпозицію. (Докторська дисертація). Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна.

6. *Лузин, Н.Н.* (1953). Лекции об аналитических множествах и их приложениях. Москва: ГИТТЛ.

7. *Александров, П.С.* (1978). Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств. Москва: Наука.

8. *Трохимчук, Ю.Ю.* (2008). Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. Київ: Інститут математики НАН України.

9. *Gauld, D.,Greenwood, S., Reilly, I.* (1999). On variations of continuity. Topology Atlas, Invited Contributions, **4(1)**, 1-54.

10. *Куратовский, К.* (1966). Топология, (Том 1). Москва: Мир.

11. *Сафонова, О.В.* (2017). Про зліченнократні B-вимірні відображення. Збірник праць Інституту математики НАН України, **14(1)**, 230-237.

12. *Сафонова, О.В.* (2018). Про точково розривні відображення зі значеннями в регулярних просторах. Буковинський математичний журнал, **6(1-2)**, 97-103.

13. *Noiri, T.* (1973). On semi-continuous mappings. Atti della Accademia nazionale dei Lincei. Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, **Serie 8**, **54**, 132-136.

14. *Grande, Z., Natkaniec, T.* (1991). On quasi-continuous bijections. Acta Mathematica Universitatis Comenianae. New series, **60(1)**, 31-34.

15. *Трохимчук, Ю.Ю.* (2014). Счетная кратность и категория. Доповіді Національної академії наук України, **(1)**, 33-36.

16. *Хаусдорф, Ф.* (2010). Теория множеств, (Издание пятое). Москва: ЛКИ.

17. *Гелбаум, Б., Олмстед, Дж.* (1967). Контрпримеры в анализе. Москва: Мир.