УДК 517.927.5, 517.984.5

©2018 р. **Я. О. Баранецький**

Національний університет "Львівська політехніка"

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З БАГАТОТОЧКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ ПЕРІОДИЧНИХ УМОВ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

Для диференціального рівняння, коефіцієнти якого є самоспряженими операторами, досліджено задачу з багатоточковими умовами, які містять періодичні умови. Встановлено, що оператор задачі має два інваріантні підпростори, породжені оператором інволюції та дві підсистеми системи власних функцій, які є ортонормованими базами в кожному з підпросторів. Для диференціально-операторного рівняння парного порядку вивчена задача з несамоспряженими багатоточковими крайовими умовами, які є збуреннями періодичних умов. Досліджено випадки, коли збурені умови є регулярними, але не сильно регулярними за Біркгофом. Визначено власні значення і елементи системи кореневих функцій V оператора задачі, яка є повною та має нескінчене число приєднаних функцій. Отримано достатні умови за яких система V є базою Ріса. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з однорідними крайовими умовами, який побудовано у вигляді розвинення в ряд за системою V.

Ключові слова: задача з багатоточковими умовами, періодичні умови, інваріантні підпростори, регулярні збурення.

For a differential equation whose coefficients are self-adjoint operators, a problem with multipoint conditions that contain periodic conditions is investigated. It is established that the operator of the problem has two invariant subspaces generated by the involution operator and two subsystems of the system of eigenfunctions, which are orthonormal bases in each of the subspaces. For an operator-differential equation of even order, a problem with non-self-adjoint multipoint boundary conditions, which are perturbations of periodic conditions, was studied. The cases when the perturbed conditions are regular but not strongly regular behind Birkhoff are investigated. The eigenvalues and elements of the system of root functions V of the operator of the problem, which is complete and contains an infinite number of associated functions, are defined. Sufficient conditions are obtained under which the system V is the Riesz base. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem with homogeneous boundary conditions, constructed in the form of expansion in a series in the system V, are established

Keywords: problem with multipoint condition, periodic condition, invariant subspaces, perturbed conditions.

Вступ Основи теорії диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами розвинуто в роботах Хілле і Йосіда. Вони встановили і довели перші теореми про існування розв'язку задачі Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння для функцій зі значеннями в банахових просторах. Серед робіт на цю тему слід відзначити праці Т. Като, С. Г. Крейна, С. Мізохата, Р. С. Філліпса. Вагомі результати, що стосуються теорії крайових задач для диференціально- операторних рівнянь, отримані в роботах М.І. Вішіка, М. Бохнера, В. І. Горбачук і М. Л. Горбачука, В. В. Городецького, О. О. Дезіна, Ю. В. Дубінського, А. Н. Кочубея, Ж. Л. Ліонса , Ф. Е. Ломовцева, В. А. Михальця, В. К. Романко, Х. Трібеля , В. Б. Шахмурова, М. Й. Юрчука, С. Я. Якубова та інших.

В роботах [1, 4–6, 9] вивчались задачі з багатоточковими умовами. Праці [2, 7, 10, 13, 15] присвячені дослідженню задач з нелокальними крайовими умовами, в [3, 11] розглядались задачі з інтегральними умовами. В роботах [6, 9, 13, 15] досліджувались властивості нелокальних задач для еліптичних диференціально-операторних рівнянь, в працях [1, 10] – для гіперболічних рівнянь, в статті [10] вивчалось диференціальне рівняння із операторними коефіцієнтами,

які мають змінні області визначення. Статті [4, 5] присвячені дослідженню диференціального рівняння, коефіцієнти якого залежать від оператора інволюції.

Надалі використаємо такі позначення:

Нехай $H_0 := L_2(0,1)$, H – сепарабельний гільбертовий простір, $H_1 := L_2((0,1); H)$, D_t – сильна похідна в H_1;

Нехай $A : H \to H$, A – додатний самоспряжений оператор з точковим спектром $\sigma_p(A) = \{z_k : z_k \sim a(k^\alpha),\ \ k \to \infty,\ \ a,\ \alpha > 0\}$, $V(A) = \{v_k \in H : k = 1, 2, ...\}$ – система власних функцій, яка утворює ортонормовану базу у просторі H;

$H(A^s) := \{v \in H : A^s v \in H\}$, $||u, (A^s)||^2 := ||u, H||^2 + ||A^s u, H||^2$;

$H_2 := \{v \in H_1,\ D_t^{2n} v \in H_1,\ A^{2n} v \in H_1\}$;

$\|v; H_2\|^2 := \|v; H_1\|^2 + \|D_t^{2n} v; H_1\|^2 + \|A^{2n} v; H_1\|^2$, $n \in \mathbb{N}$ – фіксоване;

E – тотожне перетворення в просторі H_0, $I : H_0 \to H_0$ – оператор інволюції;

$Iu\,(x) := u\,(1-x)\,,\ u\,(x) \in H_0$;

$p_0 := \frac{1}{2}\,(E + I)\,;\ p_1 := \frac{1}{2}\,(E - I)\,;$

$H_{0,j} := \{y \in H_0 : y \equiv p_j y\}\,;$

$H_{1,j} := \{y\,(x) \in H_1 : y\,(x) \equiv p_j y\,(x)\}, j = 0, 1;$

$W := W_2^{2n}(0,1);$

$[H]$ – алгебра лінійних обмежених операторів $A : H \to H$, $H_1 := H_{1,0} \oplus H_{1,1}$,

$H_{1,0} := \{v(t) \in H_1 : v(t) \equiv (1-t)\}$, $H_{1,1} := \{v \in H_1 : v(t) \equiv -\,v(1-t)\}$.

1. Основні результати роботи Розглянемо багатоточкову задачу

$$L(-D_t^2, A)u := \sum_{r=0}^{n} \beta_r (-1)^r A^{2n-2r} D_t^{2r} u(t) = f(t),\ t \in (0,1), \tag{1}$$

$$\ell_j u := D_t^{2j-1} u(0) - D_t^{2j-1} u(1) = 0, \tag{2}$$

$$\ell_{n+j} u := D_t^{2j-2} u(0) - D_t^{2j-2} u(1) + \ell_j^1 u = 0, \tag{3}$$

де

$$\ell_j^1 u := \sum_{m=0}^{k_0} \sum_{s=0}^{k_j} b_{j,s,m}\ D_t^s u(t_m) \tag{4}$$

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k_0} < 1,\ \beta_r \in \mathbb{R},$$

$b_{j,s,m} \in \mathbb{R}$, $f(t) \in H_1$, $r = 0, 1, \ldots, n$, $s = 0, 1, ..., k_j$, $j = 1, 2, ..., n$, $m = 0, 1, ..., k_0$.

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1) – (4) *будемо називати функцію* $u \in H_2$, *яка справджує рівності:*

$$\|Lu - f; H_1\| = 0,\ \|\ell_j u; H(A^{m_j})\| = 0,$$

де $m_q = 2n - 2q + \frac{1}{2}$, $m_{n+q} = 2n - 2q + \frac{3}{2}$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, $q = 1, 2, ..., n$.

Для коефіцієнтів та параметрів виразу (4) розглянемо наступні умови:

Умова $\mathbf{P_1}$: $t_m = 1 - t_{k_0 - m}$, $b_{j,s,m} = (-1)^s b_{j,s,k_0-m}$;

Умова $\mathbf{P_2}$: $k_j \le 2j - 2$, $j = 1, 2, ..., n$;

Умова $\mathbf{P_3}$: $C_1 |q + z_k|^{2n} \le |\lambda_{q,k}|$, $q \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < C_1 < \infty$;

Розглянемо оператор L задачі (1) – (4):

$L(-D_t^2, A^2)u := \sum\limits_{r=0}^{n} \beta_r (-1)^r A^{2n-2r} D_t^{2r} u,\ u \in D(L);$

$D(L) := \{u \in H_2 : \ \ell_m u = 0,\ m = 1, 2, \ldots, 2n\}$.

Теорема 1. *Нехай справджується умова* $\mathbf{P_1}$. *Тоді для будь яких* $\beta_r \in \mathbb{R}$,

$\beta_n \ne 0$, $b_{j,s,m} \in \mathbb{R}$, *оператор* L *має власні значення*

$$\lambda_{q,k} := \sum_{r=0}^{n} \beta_r z_k^{2n-2r} \rho_q^{2r},\ \rho_q = 2q\pi, \tag{5}$$

$$q = 0, 1, ...,\ k = 1, 2, ...$$

та систему $V(L)$ *кореневих функцій, яка є повною та мінімальною в просторі* H_1.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_3}$. *Тоді для будь яких*

$\beta_r \in \mathbb{R}$, $\beta_n \ne 0$, $b_{j,s,m} \in \mathbb{R}$, *система функцій* $V(L)$ *є базою Ріса [8] в просторі* H_1.

Теорема 3. *Нехай справджуються умови* $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_3}$. *Тоді для будь яких*

$\beta_r \in \mathbb{R}$, $\beta_n \ne 0$, $b_{j,s,m} \in \mathbb{R}$, $f \in H_1$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1) – (4).

2. Спектральна задача з періодичними умовами Розглянемо задачу на власні значення

$$L(-D_t^2, A)u := \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \beta_r A^{2n-2r} D_t^{2r} u = \lambda u,\ \mu \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

$$\ell_{0,j}u := D_t^{2j-1}u(0) - \ D_t^{2j-1}u(1) = 0, \qquad (7)$$

$j = 1,2,...,n,$

$$\ell_{0,n+j}u := D_t^{2j-2}u(0) - \ D_t^{2j-2}u(1) = 0, \qquad (8)$$

$j = 1,2,...,n.$

Нехай $L_0 : H_0 \to H_0$ оператор задачі (6) – (8):

$$L_0 y := L(-D_t^2, A)y, \ y \in D(L_0),$$

$$D(L_0) := \{y \in H_2 : \ell_{0,j}y = 0, \ j = 1,2\},$$

$$T := \{\tau_{s,q}(t) \in H_0 : \tau_{1,q}(t) = \sqrt{2}\sin 2q\pi,$$

$$\tau_{0,0}(t) = 1, \ \tau_{0,q}(t) = \sqrt{2}\cos 2q\pi t, \ q = 1,2,...\}.$$

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді добутку

$$u(t) = y(t)v_k\,, \quad y(t) \in W, \quad v_k \in V(A), \qquad (9)$$

$k \in \mathbb{N}$. Для визначення невідомої функції $y(t)$ отримуємо задачу на власні значення

$$\sum_{r=0}^{n} \beta_r(-1)^r z_k^{2n-2r} y^{(2r)}(t) = \lambda y(t), \ \lambda \in \mathbb{C}, \qquad (10)$$

$$\ell_{0,j}y := \ y^{(2j-1)}(0) - \ y^{(2j-1)}(1) = 0, \qquad (11)$$

$j = 1,2,...,n,$

$$\ell_{0,n+j}y := \ y^{(2j-2)}y(0) - y^{(2j-2)}(1) = 0, \qquad (12)$$

$j = 1,2,...,n.$ Нехай $L_{0,k}$ – оператор задачі (10)– (12),

$$L_{0,k}y := \sum_{r=0}^{n} \beta_r(-1)^r z_k^{2n-2r} y^{(2r)}(t), \ y \in D(L_{0,k}),$$

$$D(L_{0,k}) := \{y \in W : \ell_{0,j}y = 0, j = \overline{1,2n}\}.$$

Корнені $\rho_j(\lambda)$ рівняння $\sum\limits_{r=0}^{n} \beta_r(-1)^r z_k^{2n-2r}\rho^{2r} = \lambda$, яке є характеристичним для рівняння (10), визначимо співвідношеннями

$$\Re\rho_n(\rho) \le Re\rho_{n-1}(\rho) \le ... \le \Re\rho_1(\rho) \le 0.$$

Фундаментальну систему розв'язків рівняння (10) означимо у вигляді наступних виразів

$$Y_j(t,\rho) := \frac{1}{2}(\exp\rho_j t + \ \exp\rho_j(1-t)) \in H_{0,0},$$

$j = 1,2,...,n,$

$$Y_{n+j}(t,\rho) := \frac{1}{2}(\exp\rho_j t - \ \exp\rho_j(1-t)) \in H_{0,1}, \qquad (13)$$

$j = 1,2,...,n$. Підставляючи загальний розв'язок

$$y(t,\rho) = \sum_{s=1}^{2n} c_s Y_s(t,\rho), \ c_s \in \mathbb{R} \qquad (14)$$

диференціального рівняння (10) у крайові умови (11), (12), для визначення c_s отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $2n$.

Враховуючи рівності $\ell_{0,r}Y_{n+j} = 0$, $\ell_{0,n+r}Y_j = 0$, j, $r = 1,2,...,n$, визначник системи можна подати у вигляді добутку

$$\Delta(\rho) = \Delta_0(\rho)\Delta_1(\rho) = 0, \qquad (15)$$

де $\Delta_s(\rho) = \det(\ell_{sn+r}Y_{sn+j})_{r,j=1}^n$, $s = 0,1$.

Рівняння (14) має корені $\rho_q = 2q\pi$, $q \in \mathbb{Z}_0$, які лежать на прямій $Im\rho = 0$. При цьому оператор $L_{0,k}$ має власні значення (5), коли $q = 0,1,...$ та систему власних функцій T.

Лема 1. *Оператор L_0 має власні значення (5) та систему власних функцій $V(L_0) := \{v_{s,q,k}(t,L_0) \in H_1 : v_{s,q,k}(t,L_0) := \tau_{s,q}(t)v_k, \ s = 0,1, \ q = 0,1,..., \ k = 1,2,...\}$, яка є ортонормованою базою простору H_1.*

Доведення. Нехай $B : H_0 \to H_0$ – самоспряжений оператор задачі

$By(t) := -y^{(2)}(t), \qquad y \in D(B),$

$D(B) := \{y \in W_2^2(0,1) : y^{(1)}(0) - y^{(1)}(1) = 0, \ y(0) - y(1) = 0\}.$

Простір H_1 – ізоморфний гільбертовому тензорному добутку $H_0 \otimes H$ гільбертових просторів H_0 та H.

Нехай $A_0 := E_0 \otimes A$, : $B_0 := B \otimes E$ – оператори, визначені в просторі H_1, де E_0, E – тотожні переторення в H_0, H відповідно. Тому оператор L_0 можна подати як многочлен $\sum\limits_{r=0}^{n} \beta_r A_0^{2n-2r} B_0^{2r}$ від операторів A_0, B_0. Беручи до уваги, що $V(L_0)$ – ортонормована база в просторі H_1, отримуємо твердження леми.

Розглянемо для рівняння (6) задачу з нелокальними умовами

$$\ell_{1,j}u := D_t^{2j-1}u(0) - \ D_t^{2j-1}u(1) = 0, \quad (16)$$

$j = 1, 2, ..., n,$

$$\ell_{1,n+j}u := \ D_t^{2j-2}u(0) - \ D_t^{2j-2}u(1) = 0, \quad (17)$$

$j \neq p, \ j = 1, 2, ..., n,$

$$\ell_{1,n+p}u := \ D_t^{2p-2}u(0) - \ D_t^{2p-2}u(1) + \ \ell^1_{p,s}u, \ = 0, \quad (18)$$

де

$$\ell^1_{p,s}u := b(D_t^s u(0) + (-1)^s D_t^s u(1)) = 0, \ b \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Нехай $L_1 := L_{1,p,s,b}$ – оператор задачі (6), (16)–(19)

$$L_1 u := \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \beta_r A^{2n-2r} D_t^{2r} u, \ u \in D(L_1),$$

$$D(L_1) := \{u \in H_2 : \ell_{1,m}u = 0, \ m = \overline{1, 2n}\}.$$

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді добутку (9), де невідома функція $y \in W$ є розв'язком задачі на власні значення для рівняння (10) з умовами

$$\ell_{1,j}y := y^{(2j-2)}(0) + \ \ y^{(2j-2)}(1) = 0, \quad (20)$$

$j = 1, 2, ..., n,$

$$\ell_{1,n+j}y := y^{(2j-2)}(0) - \ y^{(2j-2)}(1) = 0, \ j \neq p, \quad (21)$$

$j = 1, 2, ..., n,$

$$\ell_{1,n+p}y := y^{(2p-2)}(0) - \ y^{(2p-2)}(1) + \ \ell^1_{p,s}u = 0, \quad (22)$$

де

$$\ell^1_{p,s}y := b(y^{(s)}(0) + (-1)^s y^{(s)}(1)) = 0, \quad (23)$$

$s \in \{0, 1, ..., 2n-1\}$. Нехай $L_{1,k} = L_{1,p,s,b,k}$ – оператор задачі (10), (20) – (23);

$$L_{1,k}z := \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \beta_r z_k^{2n-2r} z^{(2r)}(t), z \in D(L_{1,k}),$$

$$D(L_{1,k}) := \left\{y \in W : \ell_{1,j}y = 0, \ j = \overline{1, 2n}\right\}.$$

Нехай $L_{2,k} = L_{2,k,p,b}$ – оператор задачі (6), (16) – (19), коли $s = 2p - 2$.

Нехай $\omega_{r,q,k}, \ r = 1, 2, ..., n,$ – корені рівняння $L(-\omega^2, z_k) = \lambda_{q,k},$ вибрані так, що $\Re\omega_{n,q,k} \leq \Re\omega_{n-1,q,k,} \leq ... \leq \Re\omega_{1,q,k} = 0, \ \omega_{1,q,k} = \imath\rho_q, \ \rho_q := \pi 2q, \ k = 1, 2, \ldots .$

Розглянемо системи функцій

$$z_{0,1}(t, q, k) := \sqrt{2}(1 - 2t) \cos \rho_q t \in H_{0,1}, \quad (24)$$

$q = 1, 2, \ldots,$

$$\exp \omega_{r,q,k}(1 - t)) \in H_{0,1}, \ q = 1, 2, \ldots,$$

$$z_{0,r}(t, q, k) := \frac{1}{2}(1 - \exp \omega_{r,q,k})^{-1}(\exp \omega_{r,q,k}t -$$

$$- \exp \omega_{r,q,k}(1 - t)) \in H_{0,1}, \ q = 1, 2, \ldots, \quad (25)$$

та квадратну матрицю порядку n, елементи якої визначимо наступним способом : p – а стрічка визначається функціями (24), (25), елементи інших рядків визначаються числами

$$c_{r,p,q,k} := \rho_q^{2-2p} \ell_{2,p} z_{1,r}(t, q, k), \ r = 2, 3, .., n,$$

$$c_{r,p,q,k} = \rho_q^{2-2p} \omega_{r,q,k}^{2p-2}, \ r = 2, 3, .., n,$$

$$c_{1,p,q,k} = (-1)^{p-1} 2\sqrt{2}, \ q = 1, 2, \ldots .$$

Визначник отриманої матриці позначимо через $z_{1,p,q,k}(t), \ k = 1, 2, \ldots .$ Розвинемо цей визначниу по p – ій стрічці:

$$z_{1,p,q,k}(t) := \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,p,q,k} z_{0,j}(t, q, k).$$

Зауваження 1. *Для будь якого фіксованого* $k \in \mathbb{N}$, *при* $q \to \infty$ *отримуємо*

$\delta_{1,q,k} = \omega_{1,q,k}\rho_q^{-1} = 1, \quad \delta_{r,q,k} = \omega_{r,q,k}\rho_q^{-1} = \varepsilon_r(1 + O(q)^{-1}),$

де ε_q *– корені рівняння* $\varepsilon^{2n} = 1, \ \Im\varepsilon_q < 0,$ $r = 2, 3, \ldots, n.$

Підставляючи функцію $z_{1,p,q,k}(t)$ в крайові умови (13)–(15), маємо рівності

$$\ell_{2,s} z_{1,p,q,k}(t) = 0, \ j \neq n + p, \quad (26)$$

$$\ell_{2,n+p} z_{1,p,q,k}(t) := c_{q,k}\rho_q^{2p-2}, \ c_{q,k} = -W_{q,k}, \quad (27)$$

де $W_{q,k}$ – визначник Вандермонда порядку n, побудований за числами $\delta^2_{r,q,k}, \ \ r = \overline{1, n}.$

Зауваження 2. *Для будь якого фіксованого $k \in \mathbb{N}$ числова послідовність $\{W_{q,k}\}_{q=1}^{\infty}$ збіжна при $q \to \infty$ до визначника Вандермонда $W_k = W(\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_n^2)$, який побудований за числами $\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_n^2$;*

послідовність $\{\delta_{j,q,k}\}_{q=1}^{\infty}$ збіжна до ε_j, $j = 1, 2, ..., n$; послідовність $\{\Delta_{j,p,q,k}\}_{q=1}^{\infty}$ збіжна до $\Delta_{j,p}$, де $\Delta_{j,p}$, – мінор елемента ε_j^{2p-2}, $j = 1, 2, ..., n$, визначника $\Delta_{j,p}$.

Тому
$0 < C_2 \le |c_{q,k}|^{-1} \le C_3 < \infty$.
$C_4 \le \Delta_{j,p,q,k} \le C_5$.
Нехай

$$z_{2,p,q,k}(t) = c_{q,k}^{-1} z_{1,p,q,k}(t),\ q = 1, 2, ...$$

Враховуючи формули (27), отримаємо

$$\ell_{2,j} z_{2,p,q,k}(t) = 0,\ \ell_{2,n+p} z_{2,p,q,k}(t) = \rho_q^{2p-2},$$

$j = 1, 2, ...2n,$

$$j \ne n + p,\ q = 1, 2, ...$$

Визначимо кореневі функції оператора $L_{2,k}$.

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що оператор $L_{2,k}$ має власні функції

$$v_{0,0,k}(t, L_{2,k}) = 1 + b(2t - 1)\delta_{1,p},$$

$$v_{1,q,k}(t, L_{2,k}) = \tau_{1,q}(t),\ q = 1, 2, ... \qquad (28)$$

Приєднану функцію оператора $L_{2,k}$ означимо сумою

$$v_{0,q,k}(t, L_{2,k}) = \sqrt{2} \cos \rho_q t + \eta_{p,q,k} z_{2,p,q,k}(t). \qquad (29)$$

Для визначення невідомих параметрів $\eta_{p,q,k}$ підставимо вираз (29) у крайові умови (20) – (23).

Беручи до уваги формули (26), (27), отримаємо

$$\eta_{p,q,k} = -b,\ q = 1, 2, ... \qquad (30)$$

Отже, оператор $L_{2,k}$ має систему кореневих функцій (28) –(30).

Система $V(L_{2,k})$ є повною та мінімальною в просторі H_0, оскільки для задачі (10), (21) – (23) існує спряжена крайова задача [12]. Отже, правильною є наступна

Лема 2. *Для будь яких $\beta_r \in \mathbb{R}$, $\beta_n \ne 0$, $b \in \mathbb{R}$, оператор $L_{2,k}$ має власні значення (5), де $q = 0, 1, ...$, та систему кореневих функцій $V(L_{2,k})$, яка є повною і мінімальною в просторі H_0.*

Лема 3. *Для будь яких $\beta_r \in \mathbb{R}$, $\beta_0 \beta_n \ne 0$, $b \in \mathbb{R}$, $s \in \{0, 1, ..., 2n-1\}$, система кореневих функцій $V(L_{2,k})$ є базою Ріса в просторі H_0.*

Доведення. Нехай $V_{q,k,p}(L_{2,k})$ – кореневий підпростір оператора $L_{2,k}$, який відповідає власному значенню $\lambda_{q,k}$, $q = 0, 1, \dots$.

Розглянемо дві допоміжні системи функцій $V^1(L_{2,k})$, $V^2(L_{2,k})$.

Система $V^1(L_{2,k})$ утворена функціями

$$v_{1,q,k}^1(t, L_{2,k}) := v_{1,q,k}(t, L_{2,k}),$$

$$v_{0,0,k}^1(t, L_{2,k}) := v_{0,0,k}(t, L_{2,k}); q = 1, 2, ...,$$

$$v_{0,q,k}^1(t, L_{2,k}) := v_{0,q,k}(t, L_{2,k}) -$$
$$- \varrho_{p,q,k} v_{1,q,k}(t, L_{2,k}),\ q = 1, 2, ...$$

$\varrho_{p,q,k} := (v_{0,q,k}(t, L_{2,k}), v_{1,q,k}(t, L_{2,k}; H_0),\ q = 1, 2, ...$

Функції з $V^2(L_{2,k})$ отримуємо нормуванням функцій із $V^1(L_{2,k})$.

Елементи системи $V^1(L_{2,k})$ утворюють ортогональні бази просторів $V_{q,k,p}(L_{2,k})$, $q = 0, 1, ...$, а елементи системи $V^2(L_{2,k})$ складають ортонормовані бази цих просторів.

Тому, згідно теореми А.А. Шкалікова [14], та теореми система $V^2(L_{2,k})$ є базою Ріса простору H_0. Відображення $V^1(L_{2,k}) \to V^2(L_{2,k})$, породжене нормуванням функцій із $V^1(L_{2,k})$, є ізоморфізмом простору H_0.

Отже, за означенням, повна і мінімальна система $V^1(L_{2,k})$ є базою Ріса в H_0.

Тому, за теоремою Н.К. Барі [8], вона є системою Беселя. Тобто існує додатнє число C_6, що для будь якої функції $\phi \in H_0$, виконується нерівність

$$\Sigma_{s,k} |(\phi, v_{1,q,k}^1(t, L_{2,k});)|^2 \le C_4 \|\phi; H_0\|^2. \quad (31)$$

Враховуючи, що $v_{0,q,k}(t, L_{2,k}) = v_{0,q,k}^1(t, L_{2,k}) + \varrho_{p,q,k} v_{1,q,k}(t, L_{2,k})$, оцінимо суму ряду

$$\Sigma_{s,k} |(\phi, v_{1,q,k}^1(t, L_{2,k});)|^2 \le$$

$$\leq C_7 \Sigma_{s,k} |(\phi, v^1_{1,q,k}(t, L_{2,k});)|^2,$$

$$C_7 = 1 + 2 \max |\varrho_{p,q,k}|^2.$$

Беручи до уваги нерівність (31), отримаємо оцінку

$$\Sigma_{s,k} |(\phi, v^1_{1,q,k}(t, L_{2,k});)|^2 \leq$$

$$\leq C_8 \Sigma_{s,k} |(\phi, v^1_{1,q,k}(t, L_{2,k});)|^2, \ C_8 = C_6 C_7.$$

Розглянемо оператор $R(L_{2,k}) : H_0 \in H_0$, $R(L_{2,k}) \tau_{j,q}(t) := v_{j,q,k}(t, L_{2,k})$, $j = 0, 1$, $q = 0, 1, ...,$ $k = 1, 2, \ldots$.

Із визначення оператора $R(L_{2,k}) := E_0 + S(L_{2,k})$ маємо: $S(L_{2,k}) : H_{0,0} \to H_{0,1}$, $H_{0,1} \to 0$, $S^2(L_{1,k}) = 0$.

Беручи до уваги лему 2, маємо щільність області визначення оператора $R(L_{2,k})$ у просторі H_0.

Тому існує щільно визначений оператор $R^{-1}(L_{2,k}) = E_0 + S(L_{2,k}) : H_0 \to H_0$. Із беселевості системи $V(L_{2,k})$ маємо обмеженість оператора $R^*(L_{2,k}), : H_0 \to H_0$, спряженого до $R(L_{2,k})$.

Отже, оператор $R(L_{2,k}) : H_0 \in H_0$ є ізоморфізмом та система $V(L_{2,k})$ є базою Ріса в просторі H_0.

Лема 4. *Для будь яких* $\beta_r \in \mathbb{R}$, $\beta_0 \beta_n \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $s \in \{0, 1, ..., 2n-1\}$, *оператор* $L_{1,k}$ *має власні значення* (5) *для* $q = 0, 1, ...,$ *та систему кореневих функцій* $V(L_{1,k})$, *яка є повною і мінімальною в просторі* H_0.

Доведення. Визначимо кореневі функції оператора $V(L_{1,k})$. Безпосередньою підстановкою переконуємося, що функції

$$v_{0,0,k}(t, L_{1,k}) := 1 + b(2t - 1)\delta_{1,p},$$

$$v_{1,q,k}(t, L_{1,k}) = \tau_{1,q}(t), \ q = 1, 2, \ldots,$$

є власними. Приєднану функцію оператора $L_{1,k}$ означимо сумою

$$v_{0,q,k}(t, L_{1,k}) = \tau_{0,q}(t) + \eta_{p,s,q,k} z_{2,p,q,k}(t), \quad (32)$$

$q = 1, 2, \ldots$. Для визначення невідомих параметрів $\eta_{p,s,q,k}$, підставимо вираз (32) у крайові умови (20) – (23). Одержимо

$$\eta_{p,s,q,k} = \rho_q^{s-2p+2}.$$

Система $V(L_{1,k})$, кореневих функцій оператора $L_{1,k}$, повна та мінімальна в просторі H_0, оскільки існує біортогональна система $W(L_{1,k})$, елементи якої є кореневими функціями спряженої задачі.

3. Узагальнені оператори перетворення для диференціальних рівнянь вищого порядку Виберемо будь яку послідовність дійсних чисел $\Theta := \{\theta_q\}_{q=0}^{\infty}$ та розглянемо оператор $B_{p,\Theta}$, власні значення якого співпадають з власними значеннями оператора B, а власні функції визначаються співвідношеннями

$$v_{0,0}(t, B_{p,\Theta}) := 1 + \theta_0(1 - 2t),$$

$$v_{1,q}(t, B_{p,\Theta}) := \tau_{1,q}(t), \ q = 1, 2, ..., \qquad (33)$$

$$v_{0,q}(t, B_{p,\Theta}) = \tau_{0,q}(t) + \theta_q z_{2,p,q,k}(t), \ q = 1, 2, ... \qquad (34)$$

Нехай оператор $R(B_{p,\Theta}) := E_0 + S(B_{p,\Theta}) : H_0 \to H_0$ відображає тригонометричну систему функцій T в систему $V(B_{p,\Theta})$, $S(B_{p,\Theta}) : H_{0,1} \to, \ H_{0,0} \to H_{1,0}$.

Із означення оператора $S(B_{p,\Theta})$, отримуємо $S^2(B_{p,\Theta}) = 0$.

Тому існує оператор $R^{-1}(B_{p,\Theta}) = E_0 - S(B_{p,\Theta})$.

Лема 5. *Для будь якої послідовності* Θ *система функцій* $V(B_{p,\Theta})$ *є повною та мінімальною в просторі* H_0.

Система функцій $V(B_{p,\Theta})$ *є базою Ріса в просторі* H_0 *тоді та лише тоді, коли послідовність* $\{\theta_q\}_{q=1}^{\infty}$ *– обмежена.*

Доведення леми проводиться аналогічно доведенню леми 2. Сукупність усіх операторів $R(B_{p,\Theta})$, власні функції яких визначені рівностями (33) – (34), позначимо через $\Gamma(p, k)$.

Зауваження 3. *Для оператора* $R(B_{p,\Theta}) = E_0 + S(B_{p,\Theta})$, *який відображає* $V(B) \to V(B_{p,\Theta})$, *справджується включення* $R^{-1}(B_{p,\Theta}) \in \Gamma(p, k)$.

Виберемо n послідовностей дійсних чисел $\Theta_p := \{\theta_{q,p}\}_{q=1}^{\infty}$, $p = 1, 2, ..., n$, та розглянемо оператор B_Θ, власні значення якого співпадають з власними значеннями оператора B,

а кореневі функції визначаються співвідношеннями

$v_{0,0}(t,B_\Theta) := 1 + \sum\limits_{p=1}^{n}\theta_{p,0}(1-2t),\ v_{1,q}(t,B_\Theta)=\tau_{1,q}(t),\ q=1,2,...,$

$v_{0,q}(t,B_\Theta) = \tau_{0,q}(t)+\sum\limits_{p=1}^{n}\theta_{p,q}z_{2,p,q,k}(t),\ q=1,2,....$

Лема 6. *Для будь яких послідовностей дійсних чисел $\Theta_p,\ p=1,2,...,n,$ система функцій $V(B_\Theta)$ є повною та мінімальною в просторі H_0.*

Система функцій $V(B_\Theta)$ є базою Ріса в просторі H_0 тоді та лише тоді, коли кожна із послідовністей $\Theta_p,\ p=1,2,...,n,$ є обмеженою.

Доведення леми проводиться аналогічно доведенню леми 5.

Нехай оператор $R(B_\Theta)=E_j+S(B_\Theta):H_0\to H_0$ відображає систему функцій $V(B)$ в систему $V(B_\Theta)$. Із означення оператора $S(B_\Theta),$ отримуємо $S^2(B_\Theta)=0$.

Тому існує оператор $R^{-1}(B_\Theta)=E_0-S(B_\Theta),\ V(L_{0,k})\to V(B_\Theta),$ який визнвчений на щільній в просторі H_0 множині.

Сукупність усіх операторів $R(B_\Theta)$ таких, що коренені функції опеатора B_Θ визначені рівностями (33) – (34), позначимо через $\Gamma(k)$.

Зауваження 4. *Для оператора $R(B_\Theta)=E+S(B_\Theta)\in\Gamma(k)$ справджується включення $R^{-1}(B_\Theta)\in\Gamma(k)$.*

Зауваження 5. *Множина $\Gamma(k)$ є абелевою групою відносно множення та будь-який оператор $R(B_\Theta)\in\Gamma(k)$ є добутком операторів $R(B_{p,\Theta})\in\Gamma(p,k),\quad R(B_\Theta)=\sum\limits_{p=1}^{n}R(B_{p,\Theta})$.*

Теорема 4. *Нехай виконується умова $\mathbf{P_1}$. Тоді система кореневих функцій $V(L_2)$ оператора L_2 є повною та мінімальною в просторі H_1.*

Якщо виконується умова $\mathbf{P_3}$, тоді система функцій $V(L_2)$ є базою Ріса в просторі H_1.

Доведення. Власні функції оператора L_2 визначаємо у вигляді

$$v_{j,q,k}(t,L_2):=v_{j,q,k}(t,L_{2,k})v_k,\ k,\ q\in\mathbb{N},$$

$j\in\{0,1\},\ q\in\mathbb{N}_0$. Елементи біортогональної системи $W(L_2)$ визначимо співвідношеннями

$$w_{j,q,k}(t,L_2):=w_{j,q,k}(t,L_{2,k})v_k,\ k,\in\mathbb{N},$$

$j\in\{0,1\},\ q\in\mathbb{Z}_0$. Система функцій $V(L_2)$ є повною та мінімальною в просторі H_1, оскільки існує біортогональна система $W(L_1)$.

Нехай p_k – ортопроектор в просторі H, $p_kf:=(f,v_k;H)v_k,\ k=1,2,...,\ f\in H$.

Визначимо оператор $R(L_2):H_1\to H_1,\ R(L_2)=E+S(L_2),\ R(L_2)v_{j,q,k}(t,L_0):=v_{j,q,k}(t,L_2),\ j=0,1,\ k,\ \in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{Z}_0$.

Оскільки $R(L_2)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}R(L_{2,k})p_k,$ то $\|R(L_2);[H_1]\|\le\max\|R(L_{2,k});[H_0]\|$.

Подамо функцію $z_{2,p,q,k}(t)$ у вигляді наступної суми

$$z_{2,p,q,k}(t)=\Delta_{1,1,q,k}(1-2t))\tau_{0,q}(t)+$$

$$+\sum_{r=2}^{n}\Delta_{1,r,q,k}z_{1,r}(t,q,k),$$

де $\Delta_{1,r,q,k}$ – визначник Вандермонда порядку $n-1,$ побудований за числами $\{\delta^2_{r,q,k}\}^{q\neq r}_{q=1,2,...,n}$.

Будь-яка послідовність $\{\delta^2_{r,q,k}\}^{q\neq r}_{q=1,2,...,n}$, має скінчену границю при $q\to\infty$. Отже, є обмеженою.

Тому послідовність $|\Delta_{1,1,q,k}|$ є обмеженою при $q\to\infty$.

Розглянемо сукупність функцій $V^1(L_{2,k})$

$$v^1_{1,q,k}(t,L_{2,k})\in H_0:v^1_{1,m,k}(t,L_{2,k}):=\tau_{1,m}(t),$$

$$v^1_{0,q,k}(t,L_{2,k}):=(1-b\Delta_{1,1,k,q}(1-2t))\tau_{0,q}(t),$$

та оператор

$R_1(L_{2,k}):H_0\to H_0,\quad R_1(L_{2,k})=E+S(L_{2,k}),\ R_1(L_{2,k})\tau_{j,q}(t):=v^1_{2,q,k}(t,L_{2,k}),\quad j=0,1,\quad m=1,2,...,\quad q=0,1,...,\in\mathbb{N}$.

Із формул (24) маємо нерівність

$\|R_1(L_{2,k});H_0\|^2\le C_7,\quad C_7=\max(2+2|b||\Delta_{1,1,k,q}|^2)<\infty$.

Розглянемо оператор $R_1(L_2) := \sum_{k=1}^{\infty} R_1(L_{2,k})p_k$. Беручи до уваги квадратичну близькість систем функцій $V_1(L_{2,k})$, $V(L_{2,k})$, $k = 1, 2, ...$, отримаємо нерівність

$\|R(L_{2,k}); H_0\|^2 \leq C_8 < \infty,\ k = 1, 2, ...$

Отже, $R_1(L_2) \in [H_1]$, $R^{-1}(L_2) = 2E - R(L_2) \in [H_1]$.

Враховуючи теорему Н.К. Барі [8], отримуємо твердження теореми.

4. Спектральні властивості багатоточкової задачі .

Розв'язок багатоточкової спектральної задачі (6), (2)–(4) шукаємо у вигляді добутку

$$u(t) = y(t)v_k,\ y(t) \in H_0,\ v_k \in V(A),\ k \in \mathbb{N}.$$

Для визначення невідомої функції $y(t) \in W$ отримуємо для рівняння (6) задачу з умовами :

$$\ell_m y(t) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{35}$$

Нехай $L_k :\ H_0 \to H_0$ оператор задачі (6), (35)

$$L_k y := \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \beta_r z_k^{2n-2r} y^{(2r},\ y \in D(L_k);$$

$$D(L_k) = \{y \in W,\ \ell_j y = 0,\ j = 1, 2, ..., 2n\};$$

$V(L_k)$ – система кореневих функцій оператора L_k.

Означимо кореневі функції оператора L_k формулами

$$v_{1,q}(t, L_k) = \sqrt{2} \sin 2q\pi t,\ q = 1, 2, \ldots. \tag{36}$$

$$v_{0,q}(t, L_k) = \sqrt{2} \cos 2q\pi t + \sum_{p=1}^{n} \eta_{p,q,k} z_{2,p,q,k}(t), \tag{37}$$

$q = 1, 2, ...$

Для обчислення невідомих параметрів $\eta_{p,q,k}$ підставимо вираз (37) у крайові умови (35).

Беручи до уваги формули (26), (27), отримаємо

$$\eta_{p,q,k} = -\rho_q^{2p-1} (\ell_p z_{2,p,q,k})^{-1},\ q = 1, 2, ... \tag{38}$$

Отже, оператор L_k має систему кореневих функцій $V(L_k)$ (36) -(38).

Розглянемо оператор перетворення $R(L_k) : H_0 \to H_0$, $R(L_k)\tau_{j,q}(t) := v_{j,q,k}(t, L_k)$, $j = 0$, $signq$, $q = 0, 1, ...$ З формул (36)-(38) маємо включення $R(L_k) \in \Gamma(k)$.

Враховуючи умову $\mathbf{P_2}$, переконуємося, що послідовності $\{\eta_{p,q,k}\}_{q=0}^{\infty}$, $p = 1, 2, ...n$, є обмеженими. Тому, беручи до уваги леми 3, 6, робимо висновок, що справджується

Лема 7. *Нехай виконується умова* $\mathbf{P_1}$. *Тоді для будь яких* $\beta_r \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, *оператор* L_k *має власні значення* $\lambda_{r,q,k} = L(\mu_{r,q}, z_k^2)$, $r = 0, 1$, $q \in \mathbb{N}$, *та повну і мінімальну в просторі* H_0 *систему кореневих функцій* $V(L_k)$.

Якщо виконуються умови $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_2}$, *тоді система функцій* $V(L_k)$ *є базою Ріса в просторі* H_0.

Доведемо теорему1.

Доведення.

Нехай $V(L)$ – система кореневих функцій оператора L, $W(L)$ – біортогональна система функцій.

Кореневі функції оператора L означимо формулами

$$v_{j,q,k}(t, L) := v_{j,q,k}(t, L_k)v_k,\ k = 1, 2, ...,$$

$j = 0, signq,\ q = 0, 1, ...$

Елементи біортогональної системи $W(L)$ визначимо співвідношеннями

$$w_{j,q,k}(t, L) := w_{j,q,k}(t, L_k)v_k,\ k = 1, 2, ...,$$
$$j = 0, signq,\ q = 0, 1, \ldots.$$

Система функцій $V(L_2)$ є повною та мінімальною в просторі H_1, оскільки існує біортогональна система $W(L)$.

Отже, теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2.

Доведення. Нехай виконуються умови $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_3}$. Тоді, згідно твердження теореми 4, система функцій $V(L_{1,p,s,b})$ є базою Ріса в просторі H_1. Тобто $R(L_{1,p,s,b}) \in [H_1]$.

Із означення оператора $L_{1,p,s,b}$ маємо

$$R(L) = \prod_{p=1}^{n} \prod_{s=0}^{2p-2} \prod_{r=0}^{k_0} R(L_{1,p,s,b_{p,s,r}}) \in [H_1],$$

$$R^{-1}(L) \in [H_1].$$

Тому, за означенням, система функцій $V(L)$ є базою Ріса та справджується теорема 2.

Із твердження теореми маємо, що існують додатні числа C_9, C_{10}, такі, що для будь-якого елемента $f \in H_1$ виконуються нерівності

$$C_9\|f;H_1\|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}|(f,v_{j,q,k};H_1)|^2 \le$$

$$\le C_{10}\|f;H_1\|^2, \qquad (39)$$

$$C_9\|f;H_1\|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}|(f,w_{j,q,k};H_1)|^2 \le$$

$$\le C_{10}\|f;H_1\|^2.$$

Зауваження 6. *Функції з $V(L)$ є кореневими в сенсі рівностей*

$Lv_{1,q,k}(t,L) = \lambda_{q,k}v_{1,q,k}(t,L),\ Lv_{0,q,k}(t,L) = \lambda_{q,k}v_{0,q,k}(t,L) + \xi_{q,k}v_{j,q,k}(t,L),$

$\xi_{q,k} = \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r z_k^{2n-2r}\rho_q^{2r-1},\ k = 1,2,...,\ j = 0, signq,\ q = 0,1,\ldots.$

5. Розв'язок основної задачі Доведення теореми 3.

Доведення. Розвинемо функцію $f(t)$ в ряд за системою $V(L)$:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{1} f_{j,q,k}v_{j,q,k}(t,L),$$

$$f_{j,q,k} = (f,w_{j,q,k};H_1), \qquad (40)$$

$k = 1,2,...,\ j = 0, signq,\ q = 0,1,\ldots.$

Розв'язок задачі (1) – (4) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{1} u_{j,q,k}v_{j,q,k}(t,L). \qquad (41)$$

Для визначення невідомих $u_{j,q,k} \in \mathbb{R}$, підставимо ряди (40), (41) у рівняння (1).

Враховуючи біортогональність систем $V(L)$, $W(L)$ отримаємо

$$u_{j,q,k} = \lambda_{q,k}^{-1}f_{j,q,k},\ k = 1,2,...,$$

$$j = 0, signq,\ q = 0,1,...\ k = 1,2,....$$

Отже, задача (1) – (4) має формальний розв'язок :

$$u(t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{1} \lambda_{q,k}^{-1}f_{j,q,k}v_{j,q,k}(t,L).$$

Оцінимо

$$\|u;H_1\|^2 \le C_9^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}|\lambda_{q,k}|^{-2}|f_{j,q,k}|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_{1,1}^2}C_9^{-1}\sum_{j,q,k}|f_{j,q,k}|^2.$$

Враховуючи нерівність (39), отримаємо

$$\|u;H_1\|^2 < C_{13}\|f;H_1\|^2,\ C_{13} = \frac{1}{\lambda_{1,1}^2}C_{10}C_9^{-1}.$$

Отже, $u \in H_1$.

Введемо позначення $\kappa_{j,p,q,k} := \Delta_{1,1,q,k}^{-1}\Delta_{j,p,q,k},\ j = 0,1,\ q = 0,1,...,\ k = 1,2,\ldots.$

Зауваження 7. *З нерівності* (35) *маємо оцінки*

$$C_{17} \le \kappa_{j,q,k} \le C_{18},\ j = 0,1,$$

$$q = 0,1,...,\ k = 1,2,\ldots.$$

Покажемо, що функції $\varphi(t) := A^{2n}u(t)$ та $\psi(t) := (-1)^n D_t^{2n}u(t)$ належать до простору H_1.

Розвинемо функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ у ряди за системою $V(L)$:

$\varphi(t) = \sum\limits_{j,q,k} f_{j,q,k}z_k^{2n}\lambda_{q,k}^{-1}v_{j,q,k}(t,L),$

$\psi(t) := \sum\limits_{j,q,k} f_{j,q,k}\lambda_{q,k}^{-1}D_t^{2n}v_{j,q,k}(t,L).$

З рівняння (1) маємо

$$\psi(t) = f(t) + f_1(t) + f_2(t),$$

$$f_1(t) := \sum_{q,k=1}^{\infty} f_{0,q,k}\lambda_{q,k}^{-1}\xi_{q,k}\tau_{0,q}(t)v_k,$$

$$f_2(t) := \sum_{q,k=1}^{\infty} f_{0,q,k}h_{q,k}(t)v_k,$$

$$h_{q,k}(t) := \sum_{q,k=1}^{\infty} f_{0,q,k}\lambda_{q,k}^{-1} \sum_{p=1}^{n} \eta_{p,q,k} D_t^{2n} \kappa_{j,p,q,k} \times$$
$$\times z_{2,p,q,k}(t) v_k,$$

$$h_{q,k}(t) := \lambda_{q,k}^{-1} \sum_{p=1}^{n} \eta_{p,q,k} \sum_{j=2}^{n} \sum_{r=1}^{n} \beta_r z_k^{2n-2r}$$

$$\times \omega_{j,q,k}^{2r-1} \kappa_{j,q,k} z_{0,j}(t,q,k).$$

Беручи до уваги умову $\mathbf{P_3}$ та нерівність (39), дістанемо нерівність

$\|A^{2n}u; H_1\|^2 \le C_{20}\|f; H_1\|^2,\ C_{20} = C_1 C_{10}.$

Нехай $\gamma_{j,q,k} := \lambda_{q,k}^{-1}\rho_q^{2n}$, $q = 0,1,...,=1,2,....$

Розглянемо системи функцій

$$V \subset H_1,\ V := \{v_{j,q,k}(t) := \gamma_{j,q,k} v_{j,q,k}(t,L),$$

$$j = 0,1,\ q = 0,1,...,\ k = 1,2,....\}$$

$$V_1 \subset H_1,\ V_1 := \{v_{j,q,k}^1(t) := \lambda_{q,k}^{-1} D_t^{2n} \times$$

$$\times v_{j,q,k}(t,L),\ j = 0,1,\ q = 0,1,...,\ k = 1,2,...\}$$

Оскільки умови $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_3}$ виконуються, то $C_{21} \le |\gamma_{j,q,k}| \le C_{22}$. Отже, оператор, який відображає елементи системи $V(L)$ в елементи системи V_1, є ізоморфізмом простору H_1.

Тому система функцій V є базою Ріса в просторі H_1.

Нехай $v_{j,q,k}^2(t) := v_{j,q,k}^1(t) - v_{j,q,k}(t),\ q,\ k = 1,2,....$

Беручи до уваги розвинення функції $\psi(t)$, отримуємо

$v_{0,q,k}^2(t) := \lambda_{q,k}^{-1}\xi_{q,k}\tau_{1,q}(t) + \lambda_{q,k}^{-1} \sum\limits_{p=1}^{n} \eta_{p,q,k} \sum\limits_{j=2}^{n} \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r z_k^{2n-2r} \omega_{j,q,k}^{2r-1} \kappa_{j,q,k} z_{0,j}(t,q,k) \in H_{0,1},$

$v_{1,q,k}^2(t) := 0,\ q = 0,1,...,k = 1,2,....$

Лема 8. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_3}$. *Тоді система функцій* V_1 *є повною та мінімальною просторі* H_1.

Розглянемо оператор $R_1 : H_1 \to H_1,\ R_1 v_{j,q,k}(t,L_0) := v_{j,q,k}^1(t),\ j = 0,1,\ q,\ k = 1,2,...$. Оператор R_1 можна подати сумою операторів $R_1 = Q_1 + S_1$, де $Q_1 : H_{1,p} \to H_{1,p},\ p = 0,1,\ Q_1\tau_{j,q}(t) = \gamma_{j,q,k}\tau_{j,q}(t),\ j = 0,1,\ q = 0,1,...,\ ,\ k = 1,2,...,\ S_1 : H_{1,0} \to H_{1,1},\ H_{1,1} \to 0$. Від протилежного встановлюється тотальність (повнота) системи V_1 в просторі H_1. Оскільки $Q_1,\ Q_1^{-1} \in [H_1]$ та оператор R_1 є щільно визначеним в просторі, то існує обернений $R_1^{-1} = Q_1^{-1} - Q_1^{-1}S_1Q_1^{-1}$. Тому система V_1 має біортогональну систему в просторі H_1.

Лема 9. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_3}$. *Тоді система функцій* V_1 *є майже нормованою та квадратично близькою до системи* V.

Доведення. З умови $\mathbf{P_3}$ маємо $\lambda_{q,k}^{-1}\xi_{q,k} = O(q^{-1}),\ q = 1,2,....$

Враховуючи умову $\mathbf{P_2}$ та обмеженість послідовності $\{\kappa_{j,q,k}\}_{q=1}^{\infty}$, отримуємо рівність

$| \sum\limits_{p=1}^{n} \eta_{p,q,k} \sum\limits_{r=1}^{n-1} \beta_r z_k^{2n-2r} \omega_{j,q,k}^{2r-1} \kappa_{j,q,k}| = O(q^{-1}),\ q = 1,2,....$

Повна в просторі H_1 система V_1 є квадратично близькою до системи V, що є базою Ріса. Тому, згідно теореми Н.К. Барі [8], система функцій V_1 є базою Ріса .

Із визначення функції $\psi(t)$ маємо $\psi(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{q=1}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{1} f_{j,q,k} v_{j,q,k}^1(t)$

$$\|\psi; H_1\|^2 \le C_{23}\|f; H_1\|^2.$$

Тому, приймаючи до уваги означення норми у просторі H_2, отримаємо остаточну оцінку

$$\|u; H_2\|^2 \le C_{24}\|f; H_1\|^2,\ C_{24} = C_{13} + C_{20} + C_{23}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абдо Сабет Ахмед, Н. И. Юрчук *Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений.* Дифференц. уравнения 1985, **21** (5), 806–815.
2. Ashyralyev A. *A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space.* J. Math. Anal. Appl. 2008, **344**, 557–573.
3. Charyyar Ashyralyev, and Aysel Say *Well-posedness of Neumann-type elliptic overdetermined problem with integral condition.* Proc. of the Intern. Conf. "International conf. on analis and applied mathematics"Mersin, Turkey, September, 6–9, 2018. **1997**, 020026 ; doi: 10.1063/1.5049020

4. Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P.I., Kolyasa L.I., Kolyasa M.I. *The nonlocal problem for the differential - operator equations with of even order with involution.* Carpathian Math. Publ. 2017, **9** (2), 109–119. doi: 10.15330/cmp.9.2.109–119.
5. Baranetskij Ya.O., Demkiv I.I., Ivasiuk I.Ya., Kopach M.I. *The nonlocal problem for the differential equations the order 2n with an unbounded operator coefficients with the involution.* Carpathian Math. Publ. 2018, **10** (1), 14–30. doi: 10.15330/cmp.10.1.14-30
6. Валицкий Ю. Н. *Корректность многоточечной задачи в гильбертовом пространстве с заданными разрывами функции и ее производных.* Сиб. матем. журн. 1997, **38** (3), 504–509.
7. Глушак А. В. *Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу* Изв. вузов. Матем. 2016, **6**, 27–35.
8. Gokhberg I. Ts., Krein M.G. Introduction to the Theory of Linear Non Self-Adjoint Operators. Nauka, Moscow, 1965. (in Russian)
9. Gorodetskyi V. V., Martynyuk I. V., Kolysnyk R.S. *A nonlocal multipoint problem for a differential equation of second order.* Буковин. мат. журнал 2015, **3** (4), 7-17.
10. Ломовцев Ф. Е., Ляхов Д. А. *Слабые решения гиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения.* ПФМТ 2013, **14** (1), 67–73.
11. Tikhonov I.V. *Uniqueness theorems for linear non-local problems for abstract differential equations.* Izv Math. 2003, **67** (2), 133–166.
12. Naimark M.A. Linear differential operators. Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1967.
13. Романко В. К. *Разрешимость граничных задач для дифференциально-операторных уравнений высокого порядка.* Дифференц. уравнения 1978, **14** (60), 1081–1092
14. Шкаликов А. А. *О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора.* УМН. 1979, **34** (5), 235–236.
15. Yakubov S. Y. *Noncoercive boundary value problems for elliptic partial differential and differential-operator equations* Results Math. 1995, **28**,(1–2), 153–168.