УДК 517.962.22

©2018 р. С.Л. Гефтер, В.В. Марценюк, О.Л. Півень

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків

ЦІЛОЧИСЕЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЯВНОГО ЛІНІЙНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Одержано критерій єдиності та критерій існування цілочисельного розв'язку неявного лінійного різницевого рівняння другого порядку. Вказано явний вид цього розв'язку.
Ключові слова: різницеве рівняння, цілочисельний розвязок, критерій, єдність розв'язку.

The existence criterion and uniqueness criterion of an integer solution for one implicit second order linear difference equation were obtained. Explicit expression for this solution is given.
Keywords: difference equation, integer solution, criterion, uniqueness of the solution.

Вступ В роботі розглядається наступне лінійне різницеве рівняння другого порядку

$$cx_{n+2} = bx_{n+1} + ax_n - f_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad (1)$$

де a, b, c і f_n – цілі числа ($n = 0, 1, 2, ...$), $a \neq 0$, $c \neq 0$. Якщо $c = \pm 1$, то ми маємо явне рівняння, і очевидно, що при будь-яких початкових умовах $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ воно має єдиний розв'язок у цілих числах. В подальшому будемо вважати, що $c \neq \pm 1$ і b або a не ділиться на c. В цій ситуації рівняння (1) будемо називати неявним над кільцем $\mathbb{Z}$. Відзначимо, що у випадку, коли рівняння (1) розглядається над деяким полем (наприклад, над полем дійсних чисел), то поняття неявного рівняння втрачає свій сенс. В цьому випадку теорія лінійних різницевих рівнянь є досить розвинутою (див., наприклад, [2, Гл. 5, §3–4]). Неявні рівняння над $\mathbb{Z}$ першого порядку вивчались у роботах [3, 7, 8]. В повідомленні [4] було отримано низку достатніх умов єдиності цілочисельного розв'язку для системи лінійних різницевих рівнянь і для одного рівняння високого порядку.

В представленій роботі за допомоги методів, розвинутих В. Н. Берестовським та Ю. Г. Никоноровим [6], отримано *критерій* єдиності розв'язку в цілих числах для рівняння (1) (теорема 1). Аналогічний критерій для неявного рівняння першого порядку було одержано раніше в [8]. На рівняння порядку вищого за другий цей критерій вже не переноситься (див. приклад 1).

В роботі також вивчається питання про побудову цілочисельного розв'язку рівняння (1). Використання p-адичної топології на кільці $\mathbb{Z}$ дозволило отримати явні формули для такого розв'язку (див. теорему 2 і наслідок 2). При виконанні додаткових умов на коефіцієнти одержано критерій існування розв'язку у цілих числах. А саме, доведено, що за умови цілочисельності початкових даних x_0 і x_1, інші члени послідовності $\{x_n\}$ будуть цілими числами (див. теорему 3 і формулу (10)). Зазначимо, що ми наводимо таке доведення теореми 2, з якого природним шляхом можна отримати формули (10) і (21).

За основними результатами роботи була зроблена доповідь на міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

1. Основні результати

Наступна теорема встановлює критерій єдиності цілочисельного розв'язку неявного рівняння (1) (тобто ми вважаємо, що b або a не ділиться на c).

Теорема 1. *Неявне однорідне рівняння*

$$cx_{n+2} = bx_{n+1} + ax_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \quad (2)$$

має тільки нульовий розв'язок у цілих числах тоді і тільки тоді, коли характери-

стичне рівняння

$$c\lambda^2 - b\lambda - a = 0 \tag{3}$$

не має цілих коренів.

Доведення. Якщо характеристичне рівняння (3) має цілий корінь μ, то $\mu \neq 0$ і однорідне рівняння (2) має ненульовий розв'язок $x_n = \mu^n x_0,\ n = 1, 2, , ...$ при будь-якому $0 \neq x_0 \in \mathbb{Z}$. Доведемо достатність твердження теореми. Якщо характеристичне рівняння (3) не має раціональних коренів, то поліном $c\lambda^2 - b\lambda - a$ є незвідним над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$ та твердження теореми безпосередньо випливає з теореми 6 [6]. Тому в подальшому ми припускаємо, що всі корені характеристичного рівняння (3) є раціональними. Для цілочисельного розв'язку $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ рівняння (2) розглянемо формальний степеневий ряд

$$X(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k. \tag{4}$$

Як і при доведенні теореми 6 [6] отримаємо

$$X(\lambda) = \frac{x_0 + (x_1 + a_1 x_0)\lambda}{a_0\lambda^2 + a_1\lambda + 1},$$

де $a_1 = -\frac{b}{c}$, $a_0 = -\frac{a}{c}$. Якщо поліноми $f_1(\lambda) = x_0 + (x_1 + a_1 x_0)\lambda$ та $f_2(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + 1$ є взаємно простими, то міркуючи аналогічно, як при доведенні теореми 6 [6], ми одержимо, що числа a_0 та a_1 є цілими, що суперечить припущенню про неявне рівняння (2). Для остаточного доведення теореми 1 покажемо, що коли поліноми $f_1(\lambda)$ і $f_2(\lambda)$ не є взаємно простими, то характеристичне рівняння (3) має цілий корінь. Зазначимо, що $x_1 + a_1 x_0 \neq 0$, і поліном $f_1(\lambda)$ має єдиний корінь $\lambda_0 = -\frac{x_0}{x_1 + a_1 x_0}$. При цьому λ_0 є також коренем $f_2(\lambda)$ і тому $\lambda_0 \neq 0$. Тоді за теоремою Вієта маємо $f_2(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_0)\left(\lambda - \frac{1}{a_0\lambda_0}\right)$. Отже,

$$X(\lambda) = \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} = \frac{x_0}{1 - a_0\lambda_0\lambda} = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} (a_0\lambda_0)^k \lambda^k. \tag{5}$$

З (4),(5) випливає, що

$$x_k = (a_0\lambda_0)^k x_0, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

Тому $x_k \in \mathbb{Z}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ тоді і тільки тоді, коли $a_0\lambda_0 \in \mathbb{Z}$. З іншого боку, число $a_0\lambda_0$ є коренем характеристичного рівняння (3). Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай $f \in \mathbb{Z}$ і характеристичне рівняння* (3) *не має цілих коренів. Тоді $c - b - a \neq 0$ і рівняння*

$$cx_{n+2} = bx_{n+1} + ax_n - f, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{7}$$

має розв'язок у цілих числах тоді і тільки тоді, коли f ділиться на $c - a - b$. Цей розв'язок є єдиним, сталим та має вигляд

$$x_n = \frac{f}{a + b - c}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{8}$$

Доведення. В силу теореми 1 однорідне рівняння (2) має тільки нульовий розв'язок у цілих числах. Тому, по-перше $c - b - a \neq 0$, оскільки в іншому випадку число $\lambda_0 = 1$ було б цілим коренем характеристичного рівняння (3). По-друге, якщо рівняння (7) має розв'язок в цілих числах, то він єдиний. Покажемо, що будь-який цілочисельний розв'язок рівняння (7) є сталим. Якщо $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ є таким розв'язком рівняння (7), то послідовність $y_n = x_{n+1} - x_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$ є цілочисельним розв'язком однорідного рівняння (2). Внаслідок єдиності цілочисельного розв'язку рівняння (2) маємо $y_n = 0,\ n = 0, 1, 2, ...$, тобто $x_{n+1} = x_n,\ n = 0, 1, 2, ...$ Звідси випливає, що рівняння (7) має розв'язок у цілих числах тоді і тільки тоді, коли f ділиться на $c - a - b$. Цей розв'язок подається у вигляді (8).

Покажемо, що теорема 1, взагалі кажучи, не є справедливою для неявного різницевого рівняння порядку, вищого за 2.

Приклад 1. Розглянемо наступне неявне лінійне однорідне різницеве рівняння третього порядку

$$3x_{n+3} = 4x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{9}$$

Характеристичний многочлен цього рівняння

$$3\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (3\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 1)$$

не має цілих коренів. Проте послідовність Фібоначчі $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, ...$ є цілочисельним розв'язком рівняння (9) при будь-яких початкових даних $y_0, y_1 \in \mathbb{Z}$. Тому рівняння (9) має багато розв'язків в цілих числах.

Зауваження 1. Нехай λ_1, λ_2 – корені характеристичного рівняння (3), причому $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$. Так як рівняння (2) є неявним, то $\lambda_2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Як і при доведенні теореми 1 ми одержимо, що будь-який цілочисельний розв'язок може бути поданий у вигляді (6), де число $a_0\lambda_0$ – цілий корінь характеристичного рівняння (3), а отже, $\lambda_1 = a_0\lambda_0$, і загальний розв'язок однорідного рівняння (2) у цілих числах має вигляд $x_n = \lambda_1^n x_0$. Таким чином, на відміну від цілочисельних розв'язків явного рівняння, неявне однорідне рівняння другого порядку або взагалі не має ненульових цілочисельних розв'язків, або ці розв'язки визначаються лише одним початковим значенням $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Наступна теорема вказує явний вигляд цілочисельного розв'язку рівняння (1) за умови, що такий розв'язок існує. Для простого числа p через $\mathbb{Z}_p$ позначається кільце цілих p-адичних чисел зі стандартною топологією [1, Глава 1, §3].

Теорема 2. *Нехай числа c і b мають спільний простий дільник p, який не є дільником числа a, та λ_1, λ_2 – різні корені характеристичного рівняння* (3). *Якщо рівняння* (1) *має розв'язок у цілих числах, то цей розв'язок є единим і може бути поданий у вигляді*

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \frac{(-1)^k c^k}{a^{k+1}} f_{n+k}, \quad (10)$$

$$n = 0, 1, 2, ...,$$

де всі доданки ряду (10) *належать простору $\mathbb{Z}_p$, і ряд* (10) *збігається в топології цього простору.*

Доведення. Так як p є спільним простим дільником чисел c, b і a не ділиться на p, то рівняння (3) не має цілих коренів. Тому за теоремою 1 рівняння (1) має не більш ніж одного розв'язку в цілих числах. Послідовність $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком рівняння (1) у цілих числах тоді і тільки тоді, коли послідовність $u_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$ є цілочисельним розв'язком наступного векторного рівняння в $\mathbb{Z}^2$:

$$Au_{n+1} = Bu_n - g_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad (11)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ g_n = \begin{pmatrix} f_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця B є оборотною, оскільки $\det B = -a \neq 0$. Нехай $\tilde{B}$ – приєднана до B матриця. Тоді $\tilde{B} = (\det B)B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -1 & b \end{pmatrix}$. Оскільки число p не є дільником a, то $\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}_p$ [1, Глава 1,§3], і елементи матриць B^{-1} та $B^{-1}A$ також належать $\mathbb{Z}_p$. Рівняння (11) еквівалентно наступному рівнянню

$$-\frac{1}{a}Tu_{n+1} = u_n - B^{-1}g_n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

де $T = \tilde{B}A$. Тому

$$u_n = \sum_{k=0}^{m-1} (-a)^{-k} T^k B^{-1} g_{n+k} + (-a)^{-m} T^m u_{n+m}, \quad (12)$$

$$m \in \mathbb{N}, \ n = 0, 1, 2, ...$$

Покажемо, що

$$\lim_{m\to\infty} a^{-m} T^m u_{n+m} = 0, n = 0, 1, 2, .. \quad (13)$$

в топології простору $\mathbb{Z}_p^2 = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Характеристичний поліном матриці T має вигляд $\lambda^2 - b\lambda - ca$. В силу теореми Гамільтона-Келі

$$T^2 = bT + acI, \quad (14)$$

де I – одинична матриця розміру 2×2. Очевидно, що для будь-якого цілого $m > 2$ існують цілі невід'ємні числа $q_m > 0$ і $r_m \in \{0, 1\}$ такі, що $m = 2q_m + r_m$. При цьому $\lim_{m\to\infty} q_m = \infty$. Внаслідок співвідношення (14) елементи матриці T^2 діляться на p, тому елементи матриці T^{2q_m} діляться на $p^{\ q_m}$, Тоді є справедливим зображення

$$a^{-m} T^m u_{n+m} = p^{q_m} z_{nm}, \quad (15)$$

де $z_{nm} \in \mathbb{Z}_p$. Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} p^{q_m} = 0$ у просторі $\mathbb{Z}_p$, то внаслідок зображення (15) одержуємо рівність (13). Переходячи в (12) до границі при $m \to \infty$, отримаємо зображення

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} (B^{-1}A)^k B^{-1} g_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{16}$$

де збіжність ряду в правій частині рівності (16) розуміється в топології простору $\mathbb{Z}_p^2$. Таким чином, якщо цілочисельний розв'язок рівняння (11) існує, то він має вигляд (16). Звідси, якщо існує розв'язок рівняння (1) у цілих числах, то він має наступний вигляд:

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} e_0 (B^{-1}A)^k B^{-1} g_{n+k}, n = 0, 1, 2, ..., \tag{17}$$

де $e_0 = (0, 1)$, і збіжність ряду в правій частині рівності (17) розуміється в топології простору $\mathbb{Z}_p$. За допомоги інтерполяційної формули Лагранжа-Сільвестра маємо

$$(B^{-1}A)^k = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}((B^{-1}A - \mu_2 I)\mu_1^k -$$
$$-(B^{-1}A - \mu_1 I)\mu_2^k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

де $\mu_j = \frac{1}{\lambda_j}$ $(j = 1, 2)$ – власні значення матриці $B^{-1}A$. Крім того,

$$e_0 B^{-1} A B^{-1} g_{n+k} = -\frac{b}{a^2} f_{n+k}, n, k = 0, 1, 2, ... \tag{19}$$

Підставляючи (18), (19) у (17) з урахуванням теореми Вієта та рівностей $B^{-1} g_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f_n}{a} \end{pmatrix}$, отримаємо

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(-\frac{\mu_1^k - \mu_2^k}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \frac{b f_{n+k}}{a^2} +$$
$$+ \frac{\mu_1 \mu_2^k - \mu_2 \mu_1^k}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \frac{f_{n+k}}{a} \Big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu_1^k - \mu_2^k)(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1 \mu_2^k - \mu_2 \mu_1^k}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \frac{f_{n+k}}{a} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1^{k+1} - \mu_2^{k+1}}{\mu_1 - \mu_2} \right) \frac{f_{n+k}}{a} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \frac{(-1)^k c^k}{a^{k+1}} f_{n+k}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Таким чином, послідовність $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, члени якої визначено за допомоги рівностей (10), задовольняє рівняння (1). Теорему доведено повністю.

Покажемо, що в умовах теореми 2 цілочисельний розв'язок рівняння (1) можна безпосередньо виразити через коефіцієнти цього рівняння.

Наслідок 2. *Нехай виконано всі умови теореми 2. Якщо рівняння* (1) *має розв'язок у цілих числах, то він має вигляд*

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} C_{k-j}^j \left(\frac{b}{a}\right)^{k-2j} \times$$
$$\times \left(\frac{c}{a}\right)^j \frac{f_{n+k}}{a}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{20}$$

де $[x]$ *– ціла частина числа* x *і збіжність ряду в правій частині рівності* (20) *розуміється в топології простору* $\mathbb{Z}_p$. *Крім того, його також можна подати у вигляді*

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} \frac{f_{n+k}}{a}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{21}$$

де послідовність $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *належить* $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$ *і є розв'язком наступної початкової задачі*

$$\begin{cases} a y_{n+2} = -b y_{n+1} + c y_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \\ y_0 = 0, \ y_1 = 1. \end{cases}$$

Доведення. Зауважимо, що з формули (10) та теореми Вієта випливає наступне зображення розв'язку рівняння (1):

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1^{k+1} - \mu_2^{k+1}}{\mu_1 - \mu_2} \right) \frac{f_{n+k}}{a}, n = 0, 1, 2, ..., \tag{22}$$

де $\mu_j = \frac{1}{\lambda_j}$ $(j = 1, 2)$ – корені рівняння $a\mu^2 + b\mu - c = 0$ (див. доведення теореми 2). Таким чином, розв'язок $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ має вигляд (21), де $y_k = \frac{\mu_1^k - \mu_2^k}{\mu_1 - \mu_2}$, $\quad k = 0, 1, 2, ...$ При кожному $k = 1, 2, ...$ функція $\frac{\mu_1^{k+1} - \mu_2^{k+1}}{\mu_1 - \mu_2} =$

$\sum\limits_{j=0}^{k} \mu_1^j \mu_2^{k-j}$ є k-ю повною симетричною функцією змінних μ_1 та μ_2. Ця функція подається як многочлен від змінних $\sigma_1 = \mu_1 + \mu_2$ та $\sigma_2 = \mu_1 \mu_2$ наступним чином [5, Глава 1, §2, Приклад 8]:

$$\frac{\mu_1^{k+1} - \mu_2^{k+1}}{\mu_1 - \mu_2} = \sum_{j=0}^{k} \mu_1^j \mu_2^{k-j} = \det H_k, \quad (23)$$

де H_k – трьохдиагональна матриця розміру $k \times k$ з елементами $h_{j,j} = \sigma_1,\ j = 1, ...k$, $h_{j,j-1} = 1,\ j = 2, .., k,\ k > 1$, $h_{j,j+1} = \sigma_2,\ j = 1, ...k-1,\ k > 1$. Всі інші елементи матриці H_k дорівнюють нулю. Цей визначник обчислюється за формулою

$$\det H_k = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} C_{k-j}^j \sigma_1^{k-2j} (-\sigma_2)^j, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

Тепер з формул (23),(24) та теореми Вієта випливає

$$\frac{\mu_1^{k+1} - \mu_2^{k+1}}{\mu_1 - \mu_2} = (-1)^k \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} C_{k-j}^j \left(\frac{b}{a}\right)^{k-2j} \left(\frac{c}{a}\right)^j,$$
$$k = 0, 1, 2, ...$$

Звідси з урахуванням (22) отримаємо зображення (20) розв'язку рівняння (1).

Наступний приклад показує, що якщо умови теореми 2 не виконано, то для будь-якого простого числа p ряд (10) може бути розбіжним в топології $\mathbb{Z}_p$.

Приклад 2. Нехай в рівнянні (1) $c = 6, a = b = 1$ і $f_n = 20,\ n = 0, 1, 2, ...$ Відповідне характеристичне рівняння $6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{3}$. Ряд (10) має вигляд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ((-1)^k 3^{k+1} + 2^{k+1}) 4$ і є розбіжним в топології $\mathbb{Z}_p$ для будь-якого простого числа p. Але згідно з наслідком 1 рівняння (1) має єдиний розв'язок $x_n = -5,\ n = 0, 1, 2, ...$ у цілих числах.

Зауваження 2. Нехай числа c і b мають спільний простий дільник p, який не є дільником числа a, але характеристичне рівняння (3) має кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2$ (наприклад, $c = 9, b = 6, a = -1, p = 3$). Якщо існує розв'язок рівняння (1) у цілих числах, то можна довести, що він має наступний вигляд:

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{a^{k+1}} \left(\frac{b}{2}\right)^k f_{n+k}, \quad (25)$$

де збіжність ряду в правій частині рівності (25) розуміється в топології простору $\mathbb{Z}_p$. Зазначимо, що у даному випадку $\frac{b}{2} \in \mathbb{Z}_p$ при $p \neq 2$. Якщо $p = 2$, то число 2 є спільним дільником b і c, і отже $\frac{b}{2} \in \mathbb{Z}$. Більш того, оскільки ми маємо кратний корінь, то $b^2 + 4ac = 0$. Тому $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = -ac$, тобто b ділиться на 4.

Зауваження 3. Нехай виконано всі умови теореми 2 і $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – довільна послідовність елементів із $\mathbb{Z}_p$. Так як $\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}_p$, то за допомоги теореми Вієта неважко переконатися, що

$$\left(\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \frac{(-1)^k c^k}{a^{k+1}} \in \mathbb{Z}_p, \quad k = 0, 1, ...$$

Таким чином, ряд (10) завжди збігається в $\mathbb{Z}_p$ і безпосередньою підстановкою перевіряється, що сума цього ряду є розв'язком рівняння (1) над $\mathbb{Z}_p$.

Наступна теорема в частковому випадку встановлює критерій існування розв'язку рівняння (1) в цілих числах.

Теорема 3. *Нехай число c є дільником числа b і є взаємно простим із a. Нехай також характеристичне рівняння* (3) *має різні корені λ_1, λ_2. Рівняння* (1) *має розв'язок у цілих числах тоді і тільки тоді, коли для будь-якого простого дільника p числа c елементи x_0, x_1, що визначено формулою* (10), *є цілими числами. При цьому цей розв'язок є единим і може бути поданий у вигляді* (10), *де збіжність ряду в правій частині рівності* (10) *розуміється в топології простору $\mathbb{Z}_p$.*

Доведення. Нехай p – довільний простий дільник числа c. Тоді p є дільником числа b, але не є дільником числа a. Внаслідок зауваження 3 послідовність $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, члени якої визначено за допомоги рівностей (10), задовольняє рівняння (1). При цьому $x_n \in \mathbb{Z}_p$ $(n = 0, 1, 2...)$ для будь-якого простого дільника p числа c. Для доведення теореми нам залишилось показати, що умова $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ тягне за собою властивість $x_n \in \mathbb{Z},\ n = 2, 3, \ldots$. Можна вважати, що $c \in \mathbb{N}$. В силу рівняння (1) маємо $cx_2 = bx_1 + ax_0 - f_0 \in \mathbb{Z}$. Розкладемо c на прості множники $c = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdot p_m^{l_m}$. Оскільки $x_2 \in \mathbb{Z}_{p_j}, j = 1, ..., m$ (див. зауваження 3), то кожне число $p_j^{l_j}$ є дільником цілого числа cx_2. Таким чином $x_2 \in \mathbb{Z}$. Аналогічно за допомоги рівняння (1) ми одержимо, що якщо при деякому n числа x_n та x_{n+1} є цілими, то і число x_{n+2} є цілим. Теорему доведено.

2. Приклади

Приклад 3. Розглянемо різницеве рівняння

$$3x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n - f, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad (26)$$

де $f \in \mathbb{Z}$. Тут $c = 3, b = 5, a = -1$ і відповідне характеристичне рівняння $3\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$, що не є цілими числами. Оскільки $c - b - a = -1$, то з наслідку 1 випливає, що рівняння (26) має єдиний розв'язок у цілих числах при будь-якому $f \in \mathbb{Z}$. Цей розв'язок є сталим та має вигляд $x_n = f,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. Зауважимо, що оскільки числа c і b є взаємно простими, то умови теорем 2 та 3 не виконано.

Приклад 4. Нехай в рівнянні (1) $c = b = 4$, $a = 3$ та $f_n = 3^n f_0$, де $f_0 \in \mathbb{Z}$. Число c є взаємно простим із a і ділить b, причому c має єдиний простий дільник $p = 2$. Числа $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ є коренями характеристичного рівняння (3). Ряд (10) збігається в топології простору $\mathbb{Z}_2$ (див. зауваження 3) та має вигляд:

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} - (-2)^{k+1}}{8} \right) \cdot 3^{k+n} f_0 = 3^n x_0, \quad (27)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Отже, в цьому прикладі якщо сума ряду (27) при $n = 0$ є цілим числом, то вона буде також цілим числом і при будь-якому $n \in \mathbb{N}$. Підрахуємо цю суму для $n = 0$:

$$x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} - (-2)^{k+1}}{8} \right) \cdot 3^k f_0 =$$

$$= -f_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+1} - (-6)^{k+1}}{24} f_0 =$$

$$= -f_0 + f_0 \left(\frac{1}{3} \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2} (-3)^k \right) =$$

$$= -\frac{f_0}{21}.$$

Внаслідок теореми 3 різницеве рівняння (1) має розв'язок в цілих числах тоді і тільки тоді, коли f_0 ділиться на 21. Цей розв'язок є єдиним і може бути знайдений за формулою (27): $x_n = 3^n x_0 = -3^n f_0 / 21,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

3. Висновки

Таким чином, в роботі було досліджено питання про цілочисельні розв'язки неявного лінійного різницевого рівняння (1) другого порядку. Одержано критерій існування та критерій єдиності розв'язку рівняння (1) в цілих числах, а також вказано явний вигляд цього розв'язку. У подальшому передбачається отримати відповідні критерії для неявного різницевого рівняння вищого порядку та знайти формули для цілочисельного розв'язку такого рівняння.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Borevich Z.I., Shafarevich I.R. Number Theory, Academic Press, Boston, 1966
2. Gelfond A. O., Calculus of Finite Differences, GIFML, Moscow, 1967 (in Russian)
3. Gerasimov V., Gefter S., Rybalko A. *Implicit linear non-homogeneous functional equation with the operator of Pommeis in the ring* $\mathbb{Z}[[x]]$ Bukovinian Math. J. 2016, **4** (3–4), 36–39 (in Ukrainian)
4. Gefter S.L., Goncharuk A.B., Piven' A.L. *Integer solutions for a vector implicit linear difference equation in* $\mathbb{Z}^N$. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2018, (11), 11–18. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.11.011 (in Ukrainian)
5. Macdonald I.G. Symmetric functions and Hall Polinomials, Clarendon Press, Oxford, 1979.

6. Berestovski V. N., Nikonorov Yu. G., *Continued fractions, the group* $GL(2,\mathbb{Z})$ *and Pisot numbers*. Siberian Advances in Mathematics 2007, **17** (4), 268—290. doi: https://doi.org/10.3103/S1055134407040025
7. Gefter S., Goncharuk A. *Generalized backward shift operators on the ring* $\mathbb{Z}[[x]]$*, Cramer's rule for infinite linear systems, and p-adic integers*. Operator Theory: Advances and Applications, vol 268, 2018, 247–259. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-75996-8_13
8. Gerasimov V.A., Gefter S.L., Goncharuk A.B. *Application of the p-Adic Topology on* $\mathbb{Z}$ *to the Problem of Finding Solutions in Integers of an Implicit Linear Difference Equation*. J. Math. Sci. 2018, **235** (3), 256—261. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-018-4072-x