

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

**ПРО НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО  
ТИПУ**

Знайдено наближені розв'язки задачі Коші для диференціально-операторного рівняння гіперболічного типу з виродженням у гільбертовому просторі. В термінах таких наближень дається характеристика класів Жевре невід'ємного самоспряженого оператора.

*Ключові слова:* задача Коші; еволюційні рівняння гіперболічного типу; класи Жевре; узагальнені многочлени Лагерра.

We found the approximate solutions of the Cauchy problem for a differential-operator equation of hyperbolic type with degeneration in Hilbert space. In terms of such approximations a characteristic of the Gevrey classes of a nonnegative self-adjoint operator is given.

*Keywords:* Cauchy problem, evolution equations of hyperbolic type, Gevrey classes; generalized Laguerre polynomials.

**Вступ.** Багато задач математичної фізики можна подати у вигляді задачі Коші для еволюційного рівняння гіперболічного типу

$$u''(t) + t^\gamma Au(t) = 0,$$

$$t \in [0, T], u(0) = f, u'(0) = g,$$

де  $A$  – невід'ємний самоспряжений оператор зі щільною областю визначення в сепарабельному гільбертовому просторі. У працях А.В. Бабина [1–4] знайдено зображення розв'язку зазначеної задачі (у випадку  $\gamma = 0, g = 0$ ) у вигляді  $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t, A)f$ , де  $P_n(t, \lambda)$  – поліном степеня  $n$  змінної  $\lambda$  при фіксованому  $t$  за допомогою методу вагового наближення функцій на півосі. У вказаних працях за шукані поліноми беруться поліноми, які наближують на півосі  $(0, +\infty)$  функцію  $\cos(t\sqrt{\lambda})$ ,  $\lambda \geq 0$ , з вагою  $\text{ch}(R\sqrt{\lambda})$ ,  $\lambda \geq 0$ , припускаючи при цьому, що  $f$  належить до області визначення оператора  $\text{ch}(R\sqrt{A})$ . Одержано оцінку швидкості збіжності: похибка  $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - P_n(t, A)f\|$  спадає як  $\exp(-\sigma n)$ ,  $\sigma > 0$ .

У працях [5, 6] використовується інший метод побудови поліномів  $P_n$ . Він базується на наближенні функцій на півосі частинними сумами їхніх рядів Фур'є, побудованими за ортогональними многочленами Ла-

герра, що утворюють ортонормований базис у просторі  $L_2((0, \infty), \lambda^\alpha \exp(-\mu\lambda))$ , де  $\alpha > -1, \mu > 0$  – числа, залежні від початкового елемента  $f$ . Цей метод дав точнішу, ніж у працях [1–4] оцінку відхилення, але у вужчому класі початкових даних (класі  $H_a$  аналітичних векторів оператора  $A$ ). У цій роботі знайдена оцінка збіжності  $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - P_n(t, A)f\|$  у випадку, коли  $f$  належить до значно ширшого класу початкових даних, ніж  $H_a$ , а саме, до класу Жевре  $G_{\{\beta\}}(A)$ ,  $1 < \beta \leq 2$  ( $G_{\{1\}}(A) = H_a$ ), пов'язаного з оператором  $A$ . Одночасно дається характеристика класу Жевре  $G_{\{\beta\}}(A)$ ,  $1 < \beta \leq 2$ , з точки зору наближення розв'язку  $u(t)$  вказаної задачі Коші функціями вигляду  $P_n(t, A)f \equiv u_n(t)$  у випадку, коли показник виродження  $\gamma \neq 0$ .

Результати цієї статті були представлені на науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича [7].

**1. Класи Жевре самоспряженого оператора.** Нехай  $A$  – невід'ємний самоспряжений оператор у сепарабельному гіль-

бертовому просторі  $H$  зі щільною в  $H$  областю визначення  $\mathcal{D}(A)$  та розкладом одиниці  $E_\lambda$ ,  $\lambda \geq 0$ . Введемо деякі класи елементів, пов'язаних з оператором  $A$ . Позначимо  $H_\infty(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{rg} H_n(A)$ ,  $H_n(A) = \mathcal{D}(A^n)$  ( $\mathcal{D}(A)$  – область визначення оператора  $A^n$ ),  $(\varphi, \psi)_{H_n} = (\varphi, \psi) + (A^n \varphi, A^n \psi)$ ,

$$G_{\beta, B}(A) := \{\varphi \in H_\infty(A) \mid \exists c, B > 0 :$$

$$\|A^n \varphi\| \leq c B^n n^{n\beta}, n \in \mathbb{Z}_+, \beta > 0\}$$

Простір  $G_{\beta, B}(A)$  є банаховим відносно норми

$$\|\varphi\|_{\beta, B} = \sup_n (\|A^n \varphi\| / (B^n n^{n\beta})).$$

Простір  $G_{\{\beta\}}(A) := \lim_{B \rightarrow \infty} \text{ind} G_{\beta, B}(A)$  називається простором Жевре порядку  $\beta$ , побудованим за оператором  $A$ . Якщо  $\beta = 1$ , то  $G_{\{1\}}(A)$  називають ще простором аналітичних векторів оператора  $A$ . Відомо (див. [8, с. 73–75], що  $G_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\mu > 0} \mathcal{D}(\exp(\mu A^{1/\beta}))$ , при цьому  $\mathcal{D}(\exp(\mu A^{1/\beta}))$  утворює банаховий простір відносно норми

$$\|\varphi\|_{H_\mu}^2 = \int_0^\infty e^{2\mu\lambda^{1/\beta}} d(E_\lambda \varphi, \varphi).$$

Наприклад, якщо  $H = L_2(I)$ , де  $I$  – деякий інтервал дійсної вісі,  $A$  – модуль оператора диференціювання, то клас Жевре  $G_{\{\beta\}}(A)$  порядку  $\beta$  при  $\beta > 1$  складається з усіх нескінченно диференційовних на  $I$  функцій  $\varphi$ , які задовольняють умову:  $\exists c > 0 \exists B > 0 \forall n \in \mathbb{Z}_+ \forall x \in I$ :

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq c B^n n^{n\beta}, \beta > 1.$$

Простір  $G_{\{1\}}(A)$  у цьому випадку складається з усіх аналітичних на проміжку  $I$  функцій, тобто функцій, які допускають аналітичне продовження в певну область комплексної площини, яка містить інтервал  $I$ .

**2. Задача Коші.** Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$u''(t) + t^\gamma A u(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

де  $\gamma$  – дійсне невід'ємне число. Функція  $u: [0, T] \rightarrow \mathcal{D}(A)$  називається розв'язком рівняння (1), якщо вона двічі сильно неперервно диференційовна і задовольняє рівняння (1). Як доведено в [7], для  $\{f, g\} \subset \mathcal{D}(A)$  існує єдиний розв'язок рівняння (1), який задовольняє початкові умови

$$u(0) = f, \quad u'(0) = g. \quad (2)$$

При цьому розв'язок задачі Коші (1), (2) зображається у вигляді

$$u(t) = G_1(t, A)f + G_2(t, A)g = \int_0^\infty G_1(t, \lambda) dE_\lambda f + \int_0^\infty G_2(t, \lambda) dE_\lambda g,$$

де

$$G_1(t, \lambda) = \pi \tau^\tau \lambda^{\tau/2} t^{1/2} (\Gamma(\tau) \sin \pi \tau)^{-1} \times \\ \times J_{-\tau}(2\tau \lambda^{1/2} t^{1/(2\tau)}),$$

$$G_2(t, \lambda) = \Gamma(\tau) \tau^{1-\tau} t^{1/2} \lambda^{-\tau/2} J_\tau(2\tau \lambda^{1/2} t^{1/(2\tau)}).$$

Тут  $\tau = (\gamma + 2)^{-1}$ ,  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функція,  $J_\nu(\cdot)$  – функція Бесселя першого роду порядку  $\nu$ ,  $\nu \in \{-\tau, \tau\}$ .

Зауважимо, що коли в (1) відсутнє виродження, тобто  $\gamma = 0$ , то  $G_1(t, \lambda) = \cos(t\sqrt{\lambda})$ ,  $G_2(t, \lambda) = \lambda^{-1/2} \sin(t\sqrt{\lambda})$ , а

$$u(t) = \cos(t\sqrt{A})f + A^{-1/2} \sin(t\sqrt{A})g.$$

Відомо [8, с. 260–261], що розклад функції

$$F(\lambda) = (\lambda a)^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{\lambda a}),$$

$$\lambda \in (0, \infty), a > 0, \alpha > -1,$$

в ряд Фур'є за многочленами  $\widehat{L}_{\alpha, 1, k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , має вигляд

$$(\lambda a)^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{\lambda a}) = \\ = e^{-a} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k a^k}{\sqrt{k! \Gamma(k + \alpha + 1)}} \widehat{L}_{\alpha, 1, k}(\lambda).$$

Символом  $\widehat{L}_{\alpha, \mu, n}(\lambda)$  ( $\lambda \in (0, +\infty)$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\mu > 0$  – фіксовані параметри) позначатимемо узагальнені многочлени Лагерра, які

утворюють ортонормований базис у гільбертовому просторі  $L_2((0, \infty), \lambda^\alpha \exp(-\mu\lambda))$ .

Звідси дістаємо, що

$$\begin{aligned} & (\lambda\mu a)^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{\lambda\mu a}) = \\ & = \frac{e^{-a}}{\sqrt{\mu^{1+\alpha}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^k}{\sqrt{k! \Gamma(k + \alpha + 1)}} \widehat{L}_{\alpha, \mu, k}(\lambda), \quad (3) \end{aligned}$$

де  $\mu > 0$  – фіксований параметр. Поклавши в (3)  $\alpha = -\tau$ ,  $\sqrt{\mu a} = \tau^{1/(2\tau)}$ , дістанемо, що функція  $G_1(t, \lambda)$  розкладається в ряд Фур'є за многочленами  $\widehat{L}_{-\tau, \mu, k}$  так:

$$G_1(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t, \mu, \gamma) \widehat{L}_{-\tau, \mu, k}(\lambda), \quad \lambda > 0, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} a_k(t, \mu, \gamma) &= \frac{\pi e^{-\delta} (-1)^k \delta^k}{\Gamma(\tau) \sin \pi\tau \sqrt{\mu^{1-\tau} k! \Gamma(k - \tau + 1)}}, \\ \delta &= \frac{t^{\gamma+2}}{\mu(\gamma + 2)^2}. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо, що функція  $G_2(t, \lambda)$  розкладається в ряд Фур'є за многочленами  $\widehat{L}_{\tau, \mu, k}$  і цей розклад має вигляд

$$G_2(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t, \mu, \gamma) \widehat{L}_{\tau, \mu, k}(\lambda), \quad \lambda > 0, \quad (5)$$

де

$$b_k(t, \mu, \alpha) = \frac{t\tau\Gamma(\tau)e^{-\delta}(-1)^k\delta^k}{\sqrt{\mu^{1+\tau}k!\Gamma(k+\tau+1)}}.$$

Позначимо через  $P_{\mu, t, n}^{(1)}$ ,  $P_{\mu, t, n}^{(2)}$  відповідно  $n$ -і частинні суми рядів Фур'є функцій  $G_1$ ,  $G_2$  (див. (4), (5)) за многочленами  $\widehat{L}_{-\tau, \mu, k}$ ,  $\widehat{L}_{\tau, \mu, k}$ ; при цьому  $P_{\mu, t, n}^{(1)}(\lambda) \rightarrow G_1(t, \lambda)$ ,  $P_{\mu, t, n}^{(2)} \rightarrow G_2(t, \lambda)$  при  $n \rightarrow \infty$  у кожній точці  $\lambda \in (0, \infty)$  [8, с. 255].

**Теорема.** Якщо  $\{f, g\} \subset G_{\{\beta\}}(A)$ ,  $1 < \beta < 2$ , то

$$\forall T > 0 \exists c = c(f, \mu, g, T, \gamma, \beta) > 0$$

$$\exists L = L(f, g, T, \gamma, \beta) > 0 :$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - P_{\mu, t, n}^{(1)}(A)f - P_{\mu, t, n}^{(2)}(A)g\| \leq$$

$$\leq cL^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)}, \quad (6)$$

Навпаки, якщо для деякого  $T > 0$  існують сталі  $c > 0$ ,  $\mu > 0$  такі, що для  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$  з  $u(0) = f \in H_\infty(A)$ ,  $u'(0) = 0$  виконується (6), то  $f \in G_{\{\beta\}}(A)$ ,  $1 < \beta < 2$ .

**Доведення.** Нехай  $\{f, g\} \subset G_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\mu > 0} \mathcal{D}(\exp(\mu A^{1/\beta}))$ ,  $1 < \beta < 2$ . Тоді  $f \in \mathcal{D}(\exp(\mu_1 A^{1/\beta}))$  з деяким  $\mu_1 > 0$ , а  $g \in \mathcal{D}(\exp(\mu_2 A^{1/\beta}))$  з деяким  $\mu_2 > 0$ . Нехай  $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$ . Тоді, очевидно,  $\{f, g\} \subset \mathcal{D}(\exp(\mu A^{1/\beta}))$ . Зафіксуємо це  $\mu > 0$ . Згідно з основною спектральною теоремою для самоспряжених операторів

$$\begin{aligned} & \|u(t) - P_{\mu, t, n}^{(1)}(A)f - P_{\mu, t, n}^{(2)}(A)g\| \leq \\ & \leq \|G_1(t, A)f - P_{\mu, t, n}^{(1)}(A)f\| + \\ & + \|G_2(t, A)g - P_{\mu, t, n}^{(2)}(A)g\| = \\ & = \left( \int_0^\infty (G_1(t, \lambda) - P_{\mu, t, n}^{(1)}(\lambda))^2 e^{-2\mu\lambda^{1/\beta}} \times \right. \\ & \quad \left. \times e^{2\mu\lambda^{1/\beta}} d(E_\lambda f, f) \right)^{1/2} + \\ & + \left( \int_0^\infty (G_2(t, \lambda) - P_{\mu, t, n}^{(2)}(\lambda))^2 e^{-2\mu\lambda^{1/\beta}} \times \right. \\ & \quad \left. \times e^{2\mu\lambda^{1/\beta}} d(E_\lambda g, g) \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \sup_{\lambda \geq 0} (\exp(-\mu\lambda^{1/\beta}) |G_1(t, \lambda) - P_{\mu, t, n}^{(1)}(\lambda)|) \cdot \|f\|_{H_\mu} + \\ & + \sup_{\lambda \geq 0} (\exp(-\mu\lambda^{1/\beta}) |G_2(t, \lambda) - P_{\mu, t, n}^{(2)}(\lambda)|) \cdot \|g\|_{H_\mu} \equiv \\ & \equiv \varphi_1(t, n) \cdot \|f\|_{H_\mu} + \varphi_2(t, n) \cdot \|g\|_{H_\mu}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_\mu} &= \left( \int_0^\infty \exp(2\mu\lambda^{1/\beta}) d(E_\lambda f, f) \right)^{1/2} < \infty, \\ \|g\|_{H_\mu} &= \left( \int_0^\infty \exp(2\mu\lambda^{1/\beta}) d(E_\lambda g, g) \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Покажемо, що для фіксованих  $\mu > 0$  і  $\beta \in (1; 2)$ , правильними є нерівності

$$\sup_{\lambda \geq 0} (\exp(-\mu\lambda^{1/\beta}) |\widehat{L}_{-\tau, \mu, n}(\lambda)|) \leq$$

$$\leq \omega_0 L_0^n (n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2} n^{n(\beta-2)}, \quad (7)$$

$$\sup_{\lambda \geq 0} (\exp(-\mu \lambda^{1/\beta}) |\widehat{L}_{\tau, \mu, n}(\lambda)|) \leq$$

$$\leq \omega_1 L_0^n (n! \Gamma(n + \tau + 1))^{1/2} n^{n(\beta-2)}, \quad (8)$$

де  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\mu^{1-\tau}} \max\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1-\tau)^{\tau-1/2}\}$ ,  $L_0 = \mu_0(e + \beta^\beta \mu^{-\beta} e^{2-\beta})$ ,  $\mu_0 = \max\{1, \mu\}$ ,  $\omega_1 = \sqrt{\mu^{1+\tau}} \max\{(\Gamma(1+\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1+\tau)^{-1}e^{-\tau}\}$ .

Оскільки  $1/\beta < 1$ , то скористатися відомими асимптотичними властивостями многочленів Лагерра не можна. Для того, щоб одержати потрібні оцінки, використаємо таке зображення многочленів  $\widehat{L}_{\alpha, 1, n}$  [8, с. 229]:

$$\widehat{L}_{\alpha, 1, n}(\lambda) = (-1)^n \frac{(n! \Gamma(n + \alpha + 1))^{1/2}}{n!} \times \\ \times \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(k + \alpha + 1)}, \quad \alpha > -1.$$

Нехай  $\alpha = -\tau$ . Зауважимо, що оскільки  $\tau = (\gamma + 2)^{-1}$ ,  $\gamma \geq 0$ , то  $\tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ , тобто  $-\tau \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ . Урахувавши співвідношення  $\widehat{L}_{-\tau, \mu, n}(\lambda) = \sqrt{\mu^{1-\tau}} \widehat{L}_{-\tau, 1, n}(\mu\lambda)$ , знайдемо, що

$$\varphi(n) \equiv \sup_{\lambda \geq 0} (\exp(-\mu \lambda^{1/\beta}) |\widehat{L}_{-\tau, \mu, n}(\lambda)|) \leq$$

$$\leq \sqrt{\mu^{1-\tau}} \frac{(n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2}}{n!} \times \\ \times \left( \frac{1}{\Gamma(1 - \tau)} + \mu_0^n \sum_{k=1}^n \frac{C_n^k}{\Gamma(k - \tau + 1)} \times \right. \\ \left. \times \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda^k \exp\{-\mu \lambda^{1/\beta}\}) \right),$$

$$\mu_0 = \max\{1, \mu\}.$$

Врахувавши формулу Стірлінга

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi} \lambda^{\lambda+1/2} \exp(-\lambda + \theta/(12\lambda)),$$

$$0 < \theta < 1, \lambda > 0,$$

та співвідношення  $\sup_{\lambda \geq 0} (\lambda^k \exp(-\mu \lambda^{1/\beta})) = (\beta^\beta \mu^{-\beta} e^{-\beta})^k k^{k\beta}$ , знайдемо, що

$$\varphi(n) \leq \sqrt{\mu^{1-\tau}} \frac{(n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2}}{n! \Gamma(1 - \tau)} +$$

$$+ \frac{(n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2}}{n!} \mu_0^n \sum_{k=1}^n \frac{C_n^k (\beta^\beta \mu^{-\beta} e^{-\beta})^k}{\Gamma(k - \tau + 1)} k^{k\beta} \leq$$

$$\leq \sqrt{\mu^{1-\tau}} (n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2} \left( \frac{1}{\Gamma(1 - \tau)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi} e^{n-\tau} \mu_0^n n^{n(\beta-2)} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^n \frac{C_n^k (\beta^\beta \mu^{-\beta} e^{-\beta})^k}{e^{-k} (1 - \tau/k)^k (1 - \tau/k)^{-\tau+1/2}} \right).$$

Оскільки  $(1 - \tau/k)^{-\tau+1/2} \geq (1 - \tau)^{-\tau+1/2}$ ,  $(1 - \tau/k)^k \geq e^{-\tau}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то

$$\varphi(n) \leq \sqrt{\mu^{1-\tau}} (n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2} \times$$

$$\times \left( \frac{1}{\Gamma(1 - \tau)} + \frac{(\mu_0 e)^n}{(1 - \tau)^{1/2-\tau}} \sum_{k=1}^n C_n^k (\beta^\beta \mu^{-\beta} e^{1-\beta})^k \right).$$

Покладемо  $\omega_0 = \sqrt{\mu^{1-\tau}} \max\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1-\tau)^{\tau-1/2}\}$ . Тоді

$$\varphi(n) \leq \omega_0 (n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2} (\mu_0 e)^n n^{n(\beta-2)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^n C_n^k (\beta^\beta \mu^{-\beta} e^{1-\beta})^k =$$

$$= \omega_0 (n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2} n^{n(\beta-2)} \times$$

$$\times (\mu_0 e + \beta^\beta \mu^{-\beta} e^{2-\beta} \mu_0)^n.$$

Нерівність (8) доводиться аналогічно.

Оскільки  $P_{\mu, t, n}^{(1)} \rightarrow G_1(t, \lambda)$  при  $n \rightarrow \infty$  у кожній точці  $\lambda \in (0, \infty)$ , то, взявши до уваги вигляд полінома  $P_{\mu, t, n}^{(1)}$ , а також нерівність (7), дістанемо, що

$$\varphi_1(t, n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(t, \mu, \gamma)| \times$$

$$\times \sup_{\lambda \geq 0} (\exp(-\mu \lambda^{1/\beta}) |\widehat{L}_{-\tau, \mu, k}(\gamma)|) \leq$$

$$\leq c_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (BL_0)^k k^{k(\beta-2)} \leq$$

$$\leq c_2 (BL_0)^{n+1} (n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де

$$c_2 = c_1 \sum_{k=1}^{\infty} (BL_0)^{k-1} k^{(k-1)(\beta-2)} < \infty,$$

$$c_1 = \pi\omega_0(\Gamma(\tau) \sin \pi\tau)^{-1} \mu^{-(1-\tau)/2},$$

$$B = T^{\gamma+2} \mu^{-1} (\gamma + 2)^{-1}.$$

Отже,  $\sup_{t \in [0, T]} \varphi_1(t, n) \leq c_2 (BL_0)^{n+1} (n + 1)^{(n+1)(\beta-2)}$ .

Аналогічно, скориставшись нерівністю (8), знайдемо, що

$$\sup_{t \in [0, T]} \varphi_2(t, n) \leq c_3 (BL_0)^{n+1} (n + 1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де

$$c_3 = \frac{\omega_1 T \Gamma(\tau)}{\sqrt{\mu^{1+\tau}}} \sum_{k=1}^{\infty} (BL_0)^{k-1} k^{(k-1)(\beta-2)} < \infty.$$

Тому

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - P_{\mu, t, n}^1(A)f - P_{\mu, t, n}^2(A)g\| &\leq \\ &\leq cL^{n+1} (n + 1)^{(n+1)(\beta-2)}, \end{aligned}$$

де  $c = c_2 \|f\|_{H_\mu} + c_3 \|g\|_{H_\mu}$ ,  $L = BL_0$ .

Навпаки, нехай для деякого  $T > 0$  існують сталі  $c, \mu > 0$  такі, що для  $u(t), t \in [0, T]$ , з  $u(0) = f \in H_\infty(A)$ ,  $u'(0) = 0$  виконується нерівність (6). Тоді для  $u(t)$  правильним є зображення

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t, \mu, \gamma) \widehat{L}_{-\tau, \mu, k}(A)f,$$

де

$$\begin{aligned} a_k(t, \mu, \gamma) &= \frac{\pi e^{-\delta} (-1)^k \delta^k}{\Gamma(\tau) \sin \pi\tau \sqrt{\mu^{1-\tau}} k! \Gamma(k - \tau + 1)}, \\ \delta &= \frac{t^{\gamma+2}}{\mu(\gamma + 2)^2}, \end{aligned}$$

при цьому

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|a_k(t, \mu, \gamma) \widehat{L}_{-\tau, \mu, k}(A)f\| &= \\ = \sup_{t \in [0, T]} \|P_{\mu, t, k}^{(1)}(A)f - P_{\mu, t, k-1}^{(1)}(A)f\| &\leq \\ \leq \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - P_{\mu, t, k}^{(1)}(A)f\| + & \\ + \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - P_{\mu, t, k-1}^{(1)}(A)f\| &\leq c(1+L)L^k k^{k(\beta-2)}. \end{aligned}$$

Зафіксуємо довільним чином  $t \in [0, T]$ , тоді з останньої нерівності випливає нерівність

$$\|\widehat{L}_{-\tau, \mu, k}(A)f\| \leq c_0 \sqrt{k! \Gamma(k - \tau + 1)} \tilde{L}_0^k k^{k(\beta-2)}, \quad (9)$$

де  $c_0 = c(1+L)\pi^{-1}e^\delta \Gamma(\tau) |\sin \pi\tau| \sqrt{\mu^{1-\tau}}$ ,  $\tilde{L}_0 = L/\delta$ . Далі скористаємося тим, що

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{-\tau, \mu, n}(\lambda) &= \sqrt{\mu^{1-\tau}} \widehat{L}_{-\tau, 1, n}(\mu\lambda) = \\ &= \sqrt{\mu^{1-\tau}} (-1)^n \frac{(n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2}}{n!} \times \\ &\times \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-\mu\lambda)^k}{\Gamma(k - \tau + 1)}. \end{aligned}$$

Звідси випливає співвідношення

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{-\tau, \mu, n}(A)f &= \sqrt{\mu^{1-\tau}} (-1)^n \frac{(n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2}}{n!} \times \\ &\times \left( \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \frac{(-\mu)^k}{\Gamma(k - \tau + 1)} A^k f + \frac{(-\mu)^n}{\Gamma(n - \tau + 1)} A^n f \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} A^n f &= \frac{n! \Gamma(n - \tau + 1)}{\mu^n \sqrt{\mu^{1-\tau}}} \frac{\widehat{L}_{-\tau, \mu, n}(A)f}{(n! \Gamma(n - \tau + 1))^{1/2}} - \\ &- \frac{\Gamma(n - \tau + 1)}{(-\mu)^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \frac{(-\mu)^k}{\Gamma(k - \tau + 1)} A^k f, \quad (10) \\ n &\in \mathbb{Z}_+, \quad f \in H_\infty(A). \end{aligned}$$

З (10) та (9) при  $n = 0$  знайдемо, що  $\|f\| \leq c_0 \frac{\Gamma(1 - \tau)}{\sqrt{\mu^{1-\tau}}}$ . Якщо  $n = 1$ , то

$$\begin{aligned} Af &= \frac{\Gamma(2 - \tau)}{\mu \sqrt{\mu^{1-\tau}} \sqrt{\Gamma(2 - \tau)}} \widehat{L}_{-\tau, \mu, 1}(A)f + \frac{\Gamma(2 - \tau)}{\mu \Gamma(1 - \tau)}, \\ \|Af\| &\leq 2c_0 \frac{\Gamma(2 - \tau)}{\mu \sqrt{\mu^{1-\tau}}} \tilde{L}_0^1 \cdot 1^{1(\beta-2)}; \quad \tilde{L}_0 = \max\{1, \tilde{L}_0\}. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \|A^2 f\| &\leq \frac{2\Gamma(3 - \tau)}{\mu^2 \sqrt{\mu^{1-\tau}} (2! \Gamma(3 - \tau))^{1/2}} \|\widehat{L}_{-\tau, \mu, 2}(A)f\| + \\ &+ \frac{\Gamma(3 - \tau)}{\mu^2 \Gamma(1 - \tau)} \|f\| + \frac{2\mu \Gamma(3 - \tau)}{\mu^2 \Gamma(2 - \tau)} \|Af\| \leq \\ &\leq c_0 \frac{2\Gamma(3 - \tau) \sqrt{2! \Gamma(3 - \tau)}}{\mu^2 \sqrt{\mu^{1-\tau}} \sqrt{2! \Gamma(3 - \tau)}} \tilde{L}_0^2 \cdot 2^{2(\beta-2)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_0 \frac{\Gamma(3-\tau)\Gamma(1-\tau)}{\mu^2 \sqrt{\mu^{1-\tau}} \Gamma(1-\tau)} + \\
& + 2c_0 \frac{2\Gamma(3-\tau)\Gamma(2-\tau)}{\mu \Gamma(2-\tau) \mu \sqrt{\mu^{1-\tau}}} \tilde{L}_0^1 \cdot 1^{1(\beta-2)} \leq \\
& \leq 2^2 c_0 \frac{2\Gamma(3-\tau)}{\mu^2 \sqrt{\mu^{1-\tau}}} \tilde{L}_0^2 \cdot 2^{2(\beta-2)},
\end{aligned}$$

і т.д. Методом математичної індукції доводимо правильність оцінок

$$\|A^n f\| \leq c_0 \frac{n! \Gamma(n-\tau+1)}{\mu^n \sqrt{\mu^{1-\tau}}} 2^n \tilde{L}_0^n \cdot n^{n(\beta-2)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Застосувавши формулу Стірлінга, знайдемо, що

$$\|A^n f\| \leq 2c_0 e^\tau \pi e^2 (1-\tau) \mu^{-(1-\tau)/2} (2e)^n \mu^{-n} \tilde{L}_0^n n^{2n} \times \\ \times n^{n(\beta-2)} = \alpha B^n n^{n\beta},$$

$$\alpha = 2c_0 e^\tau \pi e^2 (1-\tau) \mu^{-(1-\tau)/2}, B = 2e \tilde{L}_0 \mu^{-1}.$$

З останньої нерівності випливає належність елемента  $f$  до класу Жевре  $G_{\{\beta\}}(A)$ ,  $1 < \beta < 2$ .

Теорема доведена.

**Зауваження.** У випадку, коли початковий елемент належить до класу Жевре  $G_{\{\beta\}}(A)$ , де  $\beta \in [1, 2)$ , то похибка  $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - P_n(t, A)f\|$  спадає, як  $L^n n^{n(\beta-2)}$ ,

при цьому вказану оцінку швидкості збіжності покращити не можна.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабин А.В.* Представление решений дифференциальных уравнений в полиномиальной форме // *Успехи мат. наук.* – 1983. – Т. 38, № 2. – С. 228–229.
2. *Бабин А.В.* О полиномиальной разрешимости дифференциальных уравнений с коэффициентами из классов бесконечно дифференцируемых функций // *Мат. заметки.* – 1983. – Т. 34, № 2. – С. 249–260.
3. *Бабин А.В.* Решение задачи Коши при помощи весовых приближений экспонент многочленами // *Функц. анализ. и его прил.* – 1983. – Т. 17, № 4. – С. 75–76.
4. *Бабин А.В.* Построение и исследование решений дифференциальных уравнений методами теории приближения функций // *Матем. сб.* – 1984. – Т. 123, № 2. – С. 147–174.

5. *Горбачук М.Л., Городецкий В.В.* О решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // *Успехи мат. наук.* – 1984. – Т. 39, № 4. – С. 140.
6. *Городецкий В.В., Горбачук М.Л.* О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве // *Укр. мат. журн.* – 1984. – Т. 36, № 4. – С. 500–502.
7. *Городецкий В., Колісник Р., Мартинюк О.* Про наближені розв'язки задачі Коші для дифференціально-операторного рівняння гіперболічного типу // *Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації: Матеріали міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня, 2018 р., Чернівці, ЧНУ.* – 2018. – С. 55.
8. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
9. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.