РОЗДІЛ 11. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЗБОРУ ВРОЖАЮ

STOCHASTIC MODELING OF OPTIMAL HARVESTING

УДК 330.101: 519.866

Бойчук М.В.
к.ф.-м.н., доцент кафедри
економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
Маханець Л.Л.
к.е.н., доцент кафедри
економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Запропонована найпростіша стохастична модель оптимального збору врожаю з вінерівським та пуассонівським процесами та проведено її дослідження. Встановлено, що запропонована стохастична модель має два крайові економічні режими та умови, за яких модель має одну або дві часткові економічні умови для вибору пріоритетного режиму на початковій стадії протікання досліджуваного економічного процесу.

***Ключові слова:** стохастичне моделювання, коефіцієнт збору врожаю, кількість осіб популяції, магістральне та праве керування, оптимальне керування, магістральна та права траєкторія, оптимальна траєкторія, оптимальний процес.*

Предложена простейшая стохастическая модель оптимального сбора урожая с винеровским и пуассоновским процессами и проведено ее исследование. Установлено, что предложенная стохастическая модель имеет два краевых экономических режима и условия, при которых модель имеет одно или два частичных условия для выбора приоритетного режима на начальной стадии протекания исследуемого экономического процесса.

***Ключевые слова:** стохастическое моделирование, коэффициент сбора урожая, количество особей популяции, магистральное и правое управления, оптимальное управление, магистральная и правая траектория, оптимальная траектория, оптимальный процесс.*

A simple stochastic model of optimal harvest with Wiener and Poisson processes is proposed. This model was investigated. It was found that the proposed stochastic model has two marginal economic regimes. In addition, it has the conditions under which it has one or two partial conditions for selection the priority state on the initial stage of the economic process.

***Key words:** stochastic modeling, harvest rate, the number of individuals in the population, the main and right control, optimal control, the main and right trajectory, optimal trajectory, the optimal process.*

Постановка проблеми. Неврахування деяких економічних показників, невизначеність та неточність щодо вхідної інформації, коефіцієнтів моделі та початкових умов тощо в економіко-математичній моделі приводять до розгляду стохастичного моделювання. Зокрема, для економіко-математичної моделі оптимального збору врожаю.

Тому актуальним як у теоретичному, так і практичному плані є стохастичне моделювання оптимального збору врожаю. Оптимальний врожай – це та кількість біомаси популяції, без якої частина залишеної популяції здатна відновити баланс в екосистемі шляхом розмноження та виживання [1]. Врожай може вимірюватися числом осіб, вагою, об'ємом тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У навчальних посібниках [1, 2] запропонована детермінована найпростіша модель оптимального збору врожаю та проведено її дослідження за певних обмежень з допомогою необхідних і достатніх умов оптимальності.

У даній статті запропонована стохастична модель оптимального збору врожаю за певних обмежень при вінерівському та пуассонівському процесах та проведено її дослідження з допомогою стохастичних достатніх умов оптимальності.

Постановка завдання. Запропонована стохастична модель оптимального збору врожаю та проведено її дослідження з допомогою достатніх умов оптимальності.

Виклад основного матеріалу дослідження. Спершу формалізуємо детерміновану найпростішу модель оптимального збору врожаю, а потім на її основі формалізуємо стохастичну модель.

Розглянемо одну з найпростіших моделей оптимального збору врожаю для локальної однорідної популяції (так звану модель Ферхюльста). Ця модель відображає антропогенний вплив на динаміку популяції, а тому в певному розумінні належить до класу моделей, що описують економічну чи соціально-економічну діяльність людини та її вплив на стан екосистем.

Нехай $Q(t)$ – кількість осіб популяції в момент часу $t \in [t_0, T]$ (t_0, T – початок відліку, $T > t_o$ – горизонт планування), α – коефіцієнт природного приросту чисельності осіб популяції як різниця між коефіцієнтом народжуваності та коефіцієнтом смертності, β – коефіцієнт внутрішньопопуляційної конкуренції, причому надалі будемо вважати, що $\alpha \in (0; 1)$ і $\beta \in (0; 1)$. Будемо вважати, що зі збільшенням чисельності популяції приріст зменшується пропорційно квадрату чисельності з коефіцієнтом β, що відповідає числу зустрічей між особами.

Нехай у популяції здійснюється збір урожаю шляхом відбору частини біомаси і виведення її з репродукційного циклу. Позначивши через $u \in (0; 1)$ коефіцієнт збору врожаю (відбору популяції) в момент t ($u(t)$ – функція часу t) рівняння динаміки популяції формалізується диференціальною моделлю

$$\dot{Q}(t) = \alpha Q(t) - \beta Q^2(t) - u(t)Q(t),\ t \in [t_0, T], \quad (1)$$

де $\dot{Q}(t) = dQ/dt$ – приріст кількості осіб популяції.

Припустимо, що відомі початковий та кінцевий стани популяції

$$Q(t_0) = Q_0,\ Q(T) = Q_T, \quad (2)$$

де $Q_0 > Q_T \geq 0$.

Детермінована математична модель збору врожаю набуває вигляду

$$\dot{Q}(t) = \alpha Q(t) - \beta Q^2(t) - u(t)Q(t),\ t \in [t_0, T],$$
$$Q(t_0) = Q_0,\ Q(T) = Q_T$$
$$0 \leq u(t) \leq 1,\ t \in [t_0, T]. \quad (3)$$

У роботі [3] економічно обґрунтовано, що при стохастичному моделюванні можна використовувати вінерівські та пуассонівські процеси [4, с. 7-8].

Використаємо цей факт для формалізації стохастичної моделі оптимального збору врожаю.

Стохастична модель

Нехай $\{\Omega, F, P\}$ – ймовірністний простір з σ-алгеброю $\{F_t,\ t \in [t_0, T]\} \subset \sigma$, з множиною елементарних подій Ω та мірою (ймовірністю) P, $\xi(t) \equiv \xi(t,\omega) \in$ R (P – множина дійсних чисел) є F_t-вимірний стандартний вінерівський процес із нульовим математичним сподіванням і дисперсією $M(\xi^2(t)) = 1$, $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$; $\eta(t) \equiv \eta(t, \omega) \in R$ є F_t-вимірний пуассонівський процес із математичними сподіваннями $M(\eta(t)) = \lambda(t - t_0)$, $\lambda \equiv const$, $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$; випадкові процеси $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є незалежними.

На ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$ заданий випадковий процес чисельності осіб популяції $Q(t) \equiv Q(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$, який задовольняє:

– диференціальну модель в формі Іто [4, с. 163; 5, с. 258];

– рівняння стохастичної динаміки чисельності осіб популяції

$$\dot{Q}(t) = \alpha Q(t) - \beta Q^2(t) - u(t)Q(t) + W_1\dot{\xi}(t) + W_2\dot{\eta}(t),$$
$$t \in [t_0, T]; \quad (4)$$

– стохастичні початкову і кінцеву умови

$$Q(t_0) = Q_0,\ Q(T) = Q_T,\ Q_0 \in F_{t_0}, \quad (5)$$

де похідні вінерівського процесу $\xi(t)$ і пуассонівського процесу $\dot{\eta}(t)$ слід розуміти як узагальнені, тобто похідні від функціоналів [6, с. 205-209].

На коефіцієнт збору врожаю (відбору популяції) накладається обмеження

$$0 \leq u(t) \leq 1,\ t \in [t_0, T]. \quad (6)$$

Величина збору врожаю або дохід визначається функцією $\Phi(Q, u) = uQ$. Тому за критерій мети можна взяти максимізацію середнього сумарного (інтегрального) на досліджуваному проміжку часу доходу

$$M\int_{t_0}^{T} u(t)Q(t)dt \to \max_{0 \leq u \leq 1}, \quad (7)$$

де M – математичне сподівання.

Дослідження стохастичної економіко-математичної моделі здійснюємо в три етапи:

1) визначення магістрального процесу;
2) знаходження правого процесу;
3) побудова оптимального процесу.

Для дослідження стохастичної оптимальної моделі (4)-(7) використаємо стохастичні достатні умови оптимальності [7, с. 117-119].

1. Магістральний процес

Магістральний процес містить магістральне керування за коефіцієнтом збору врожаю (відбору популяції) $u_{маг}(t)$ та відповідної магістральної траєкторії (магістралі) за чисельністю осіб популяції $Q_{маг}(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Магістральне керування. За стохастичними достатніми умовами оптимальності запишемо співвідношення (без урахування обмеження $Q(T) = Q_T$):

$$\inf_u R(t,Q,u,V) \equiv \inf_u \{\partial V/\partial t + \partial V/\partial Q[\alpha Q - \beta Q^2 - uQ] +$$
$$+ 0{,}5W_1^2\, \partial^2 V/\partial Q^2 + \lambda[V(t,Q+W_2) - V(t,Q)] - uQ\} = 0,\quad t \in [t_0, T],$$
$$V(T, Q_T) = 0$$
$$\dot{Q}(t) = \alpha Q(t) - \beta Q^2(t) - u(t)Q(t) + \lambda W_2. \quad (8)$$

Перше співвідношення системи (8) є рівнянням Беллмана, друге – крайова умова, а третє – формально середня динаміка чисельності осіб популяції.

Функція R є лінійною за керуванням u, а тому найменшого значення функція R по u на $[0;1]$ досягає при

$$u_{маг}(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } -\partial V/\partial Q - 1 < 0, \\ 0 \text{ при } -\partial V/\partial Q - 1 > 0, \\ \text{довільне } [0,1] \text{ при } \partial V/\partial Q + 1 = 0, \end{cases} \quad t \in [t_0, T]. \quad (9)$$

Розглянемо випадок $\partial V/\partial Q = -1$. Після інтегрування отримаємо $V(T, Q_T) = -Q$ і підставимо V у рівняння Беллмана (8). Запишемо його

$$-(\alpha Q - \beta Q^2) + \lambda W_2 = 0,\ Q > 0$$

– це квадратне рівняння, яке може мати

– один корінь (розв'язок) при $\lambda W_2 \leq 0$ і $\lambda W_2 = \alpha^2/(4\beta^2)$

$$\tilde{Q} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda\beta^2 W_2}}{2\beta};$$

– два корені (розв'язки) при $0 < \lambda W_2 < \alpha^2/(4\beta^2)$

$$\tilde{Q}_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda\beta^2 W_2}}{2\beta},\quad \tilde{Q}_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda\beta^2 W_2}}{2\beta}.$$

За оптимізаційними величинами $\tilde{Q}$ (при $0 \geq \lambda W_2$ і $\lambda W_2 = \alpha^2/(4\beta^2)$) або $\tilde{Q}_1$ і $\tilde{Q}_2$ (при $0 < \lambda W_2 < \alpha^2/(4\beta^2)$) знайдемо керування з середньої динаміки чисельності осіб популяції системи (8) (третє співвідношення системи (8))

– при $\lambda W_2 \leq 0$ або $\lambda W_2 = \alpha^2/(4\beta^2)$

$$\tilde{u}(t) = \tilde{Q}^{-1}[\lambda W_2 + \alpha\tilde{Q} - \beta\tilde{Q}^2],\ t \in [t_0, T];$$

– при $0 < \lambda W_2 < \alpha^2/(4\beta^2)$

$$\tilde{u}_1(t) = \tilde{Q}_1^{-1}[\lambda W_2 + \alpha\tilde{Q}_1 - \beta\tilde{Q}_1^2],$$
$$\tilde{u}_2(t) = \tilde{Q}_2^{-1}[\lambda W_2 + \alpha\tilde{Q}_2 - \beta\tilde{Q}_2^2],\ t \in [t_0, T].$$

А відповідно отримаємо магістральні траєкторії:

– при $\lambda W_2 \leq 0$ або $\lambda W_2 = \alpha^2/(4\beta^2)$

$$u_{маг}(t)=\begin{cases}0 \text{ при } \tilde{u}(t)\le 0,\\ 1 \text{ при } \tilde{u}(t)\ge 1,\\ \tilde{u}(t) \text{ при } 0<\tilde{u}(t)<1,\end{cases} \quad t\in[t_0,T];$$

– при $\lambda W_2 < 0$ або $\lambda W_2 < \alpha^2/(4\beta^2)$

$$u^{(1)}_{маг}(t)=\begin{cases}\tilde{u}_1(t) \text{ при } 0<\tilde{u}_1(t)<1,\\ 0 \text{ при } \tilde{u}_1(t)\le 0,\\ 1 \text{ при } \tilde{u}_1(t)\ge 1,\end{cases}$$

$$u^{(2)}_{маг}(t)=\begin{cases}\tilde{u}_2(t) \text{ при } 0<\tilde{u}_2(t)<1,\\ 0 \text{ при } \tilde{u}_2(t)\le 0,\\ 1 \text{ при } \tilde{u}_2(t)\ge 1,\end{cases} \quad t\in[t_0,T].$$

Таким чином одержали два крайові магістральні керування

$u_{маг}(t) = 0$ – відсутній збір врожаю (відбір популяції),

$u_{маг}(t) = 1$ – повністю проходить збір врожаю

та часткові магістральні керування

– при $0 < \lambda W_2 < \alpha^2/(4\beta^2)$ або одне часткове магістральне керування $u_{маг}$;

– при два часткові магістральні керування $u^{(1)}_{маг}$ і $u^{(2)}_{маг}$.

Відповідні стохастичні магістральні траєкторії (магістралі) $Q_{маг}(t)$, $t\in[t_0,T]$ обчислюються одним із числових методів [5, с. 258-276; 8] із стохастичної початкової задачі (4)-(5) при керуванні $u = u_{маг}(t)$, $t\in[t_0,T]$. Зауважимо, що ці стохастичні початкові задачі мають неперевно-диференційований на $[t_0,T]$ єдиний розв'язок $Q_{маг}(t)$, $t\in[t_0,T]$ у сенсі стохастичної еквівалентності [5, с. 258; 4, с. 163; 9]. А середні магістралі $Q^{(c)}_{маг}(t)$, $t\in[t_0,T]$ знаходяться як $Q^{(c)}_{маг}(t) = M[Q_{маг}(t)]$, $t\in[t_0,T]$.

Отже, $\{Q_{маг}(t),\ u_{маг}(t),\ t\in[t_0,T]\}$ одержали стохастичні та середні магістральні процеси , тобто отримали економічні режими для вибору пріоритетного на магістральному відрізку часу – на початковій стадії протікання популяції:

а) два крайових режими

– економічний режим відсутності збору врожаю

$$П_{ВЗ} = \{Q_{маг}(t),\ u_{маг}(t),\ t\in[t_0,T]\};$$

– економічний режим повного збору врожаю

$$П_{ПЗ} = \{Q_{маг}(t),\ u_{маг}(t),\ t\in[t_0,T]\};$$

б) один частковий режим при або

$$П_{ЧЗ} = \{Q_{маг}(t),\ u_{маг}(t),\ t\in[t_0,T]\};$$

в) два часткові режими – економічні режими часткового збору врожаю при $0 < \lambda W_2 < \alpha^2/(4\beta^2)$

$$П^{(1)}_{ЧЗ} = \{Q_{маг}(t), u^{(1)}_{маг}(t), t\in[t_0,T]\},$$

$$П^{(2)}_{ЧЗ} = \{Q_{маг}(t), u^{(2)}_{маг}(t), t\in[t_0,T]\}.$$

Але магістральні процеси отримані без урахування обмеження на кінцевий стан системи $Q(T) = Q_T$.

Для вибраного економічного режиму, а відповідно для вибраного магістрального процесу, перевіримо виконання цього обмеження для середньої магістралі чисельності осіб популяції, тобто $Q^{(c)}_{маг}(t) = Q_T$.

Якщо виконується ця рівність або нерівність $Q^{(c)}_{маг}(t) > Q_T$, вибраний економічний режим (відповідно вибраний стохастичний і середній магістральний процес) $П_В = \{Q_{маг}(t),\ u_{маг}(t),\ t\in[t_0,T]\}$ є оптимальним процесом $П_{ОП} = \{Q_{ОП}(t),\ Q_{маг}(t),\ u_{маг}(t),\ t\in[t_0,T]\}$.

При виконанні нерівності $Q^{(c)}_{маг}(t) = M[Q_{маг}(t)] < Q_T$ необхідно проводити правий процес $П_{ПР} = \{Q_{ПР}(t),\ u_{ПР}(t),\ t\in[t_0,T]\}$: праве керування за коефіцієнтом збору врожаю $u_{пр}$, що відповідає правій траєкторії за кількістю осіб у популяції $Q_{ПР}(t)$, $t\in[\zeta,T]$ та моменту перемикання керування ζ.

2. Правий процес

Праве керування. При виконанні нерівності $Q^{(c)}_{маг}(t) > Q_T$ права траєкторія визначена із середньої динаміки руху (третє співвідношення системи (8)) Q_T повинна монотонно зростати ($\dot{Q}_T > 0$), тобто повинна виконуватись нерівність

$$\dot{Q}(t)=\alpha Q(t)-\beta Q^2(t)-u(t)Q(t)+\lambda W_2>0,\ t\in[t_0,T]. \quad (10)$$

Із нерівності (10), обмеження на керування $0 \le u(t) \le 1$ та обмеження на стан системи $Q^{(c)}_{маг}(t) \le Q(t) \le Q_T$, $t\in[t_0,T]$ сформуємо задачу нелінійного програмування

$$\max(-y(t)),$$
$$\alpha Q(t) - \beta Q^2(t) - u(t)Q(t) + \lambda W_2 - y(t) = \varepsilon_0,$$
$$0 \le u(t) \le 1,\ Q^{(c)}_{маг}(t) \le Q(t) \le Q_T,\ y(t) \ge 0,\ t\in[t_0,T]. \quad (11)$$

для визначення правого керування $u_{ПР}$, де $\varepsilon_0 > 0$ – досить мале задане число.

Задачу нелінійного програмування (11) можна розв'язати одним із числових методів [10].

Відзначимо, що праве керування $u_{ПР}$ є неперервною функцією на $[t_0, T]$ та не залежить від коефіцієнта W_1 при прирості вінерівського процесу $\dot{\xi}(t)$ у динаміці (3).

Якщо для вибраного економічного режиму задача нелінійного програмування немає розв'язку, то необхідно перейти на наступний економічний режим або послабити умови на вхідну інформацію економіко-математичної моделі (4)-(7).

Зауважимо, що при розв'язуванні задачі нелінійного програмування (11) визначається момент перемикання керування ζ, але з великою похибкою.

Нехай існує розв'язок задачі нелінійного програмування (11). Цей розв'язок $u_{пр}$, $t\in[t_0,T]$ буде слугувати за праве керування.

Права траєкторія на момент перемикання керування. Позначимо через

$$D_\varepsilon=\{Q\in \mathrm{R}\,|\,Q^{(c)}_{маг}(\zeta)-\varepsilon\le Q(t)\le Q^{(c)}_{маг}(\zeta)+\varepsilon,\ t\in[t_0,T]\}$$

замкнений ε-окіл середньої магістралі.

Стохастична права траєкторія $Q_{ПР}(t)$, $t\in[\zeta,T]$, і момент перемикання керування ζ визначаються із такої стохастичної задачі

$$\dot{Q}(t)=\alpha Q(t)-\beta Q^2(t)-u_{ПР}(t)Q(t)+W_1\dot{\xi}(t)+W_2\dot{\eta}(t),$$
$$t\in[t_0,T],$$
$$Q(T) = Q_T,\ Q(\zeta)\in D_\varepsilon,\ \zeta\in(t_0, T). \quad (12)$$

одним із числових методів [5, с. 258-276; 8].

Зазначимо, що стохастична права траєкторія за кількістю осіб популяції є неперервно-диференційованою функцією на $[t_0, T]$, оскільки коефіцієнт збору врожаю $u_{ПР}$ є неперервною функцією $[t_0, T]$ [5, с. 258; 4, с. 163; 9]. А середня права траєкторія $Q_{ПР}^{(c)}(t),\ t\in[\zeta, T]$ знаходиться як $Q_{ПР}^{(c)}(t) = M[Q_{ПР}^{(c)}(t)]$, $t\in[\zeta, T]$.

Таким чином, отримали стохастичний і середній правий процес $П_{ПР} = \{Q_{ПР}(t), u_{ПР}(t),\ t\in[t_0, T]\}$ для вибраного стохастичного і правого магістрального процесу $П_В$.

3. Оптимальний процес

Згідно з результатами [7, с. 117-119; 11, с. 185-192] стохастичним і середнім оптимальним процесом $П_{ОП} = \{Q_{ОП}(t), u_{ОП}(t),\ t\in[t_0, T]\}$ є склейка у момент перемикання керування ζ вибраного стохастичного і середнього магістрального процесу $П_{маг} = \{Q_{маг}(t), u_{маг}(t),\ t\in[t_0, T]\}$ та стохастичного і середнього правого процесу $П_{ПР} = \{Q_{ПР}(t), u_{ПР}(t),$ $t\in[t_0, T]$, тобто

$$Q_{ОП}(t)=\begin{cases}Q_{маг}(t)\ при\ t\in[t_0,\zeta],\\ Q_{ПР}(t)\ при\ t\in[\zeta,T],\end{cases}$$

$$u_{ОП}(t)=\begin{cases}u_{маг}(t)\ при\ t\in[t_0,\zeta],\\ u_{ПР}(t)\ при\ t\in[\zeta,T].\end{cases}$$

Причому, оптимальне керування за коефіцієнтом збору врожаю $u_{ОП}$ є кусково-неперервною функцією, а оптимальна траєкторія за кількістю осіб популяції $Q_{ОП}$ – неперервна та кусково-диференційована функція на $[t_0,T]$. Оптимальне керування $u_{ОП}$ і момент перемикання керування ζ є детермінованими величинами та не залежать від коефіцієнта W_1 при прирості вінерівського процесу $\dot{\xi}(t)$ у рівнянні динаміки (3), а оптимальна траєкторія $Q_{ОП}$ – стохастичною величиною.

При стохастичному моделюванні необхідно знати довірчі проміжки за заданою ймовірністю середнього значення та дисперсії нормальної генеральної сукупності оптимальної траєкторії за кількістю осіб популяції.

Нехай проведено обчислювальний експеримент по визначенню оптимальної траєкторії за кількістю осіб популяції та знайдено N ансамблів $Q_{ОП}(t),\ t\in[t_0, T],\ i=\overline{1, N}$.

Обчислимо вибіркові статистики оптимальної траєкторії за кількістю осіб популяції [12, с. 213]

– вибіркове середнє

$$\overline{Q}_{ОП}(t)=N^{-1}\sum_{i=1}^{N}Q_{ОП}^{(i)}(t),\ t\in[t_0,T],$$

– вибіркова дисперсія

$$\sigma^2_{Q_{ОП}}(t)=(N-1)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Q_{ОП}^{(i)}(t)-\overline{Q}_{ОП}(t)\right)^2,\ t\in[t_0,T].$$

Зазначимо, що вибіркова середня оптимальної траєкторії за кількістю осіб популяції дорівнює (збігається) середній оптимальній траєкторії за кількістю осіб популяції $Q_{ОП}^{(c)}(t),\ t\in[t_0, T]$, вище визначеній.

Довірчим проміжком за заданою ймовірністю $\Theta\in(0, 1)$ дисперсії нормальної генеральної сукупності оптимальної траєкторії за кількістю осіб популяції є [12, с. 219]

$$\left(\frac{(N-1)\sigma^2_{Q_{ОП}}(t)}{\chi^2_{1-\Theta/2}(N-1)};\frac{(N-1)\sigma^2_{Q_{ОП}}(t)}{\chi^2_{\Theta/2}(N-1)}\right),\ t\in[t_0,T],$$

де $\chi^2_{\Theta/2}(N-1)\left|\chi^2_{1-\Theta/2}(N-1)\right|$ – $\Theta/2[1-\Theta/2]$-квантиль розподілу Пірсона χ^2 із (N – 1) ступенем вільності та довірчим рівнем $\Theta\in(0, 1)$ [12, с. 238-239].

Тоді довірчий проміжок за заданою ймовірністю $\Theta\in(0, 1)$ для реального значення оптимальної траєкторії за кількість осіб популяції $Q_{ОП}^{(P)}(t)$, $t\in[t_0, T]$ набуває вигляду [12, с. 219]

$$Q_{ОП}^{(P)}(t)\in\left(Q_{ОП}^{(c)}(t)-\frac{t_\Theta(N-1)\sigma^2_{Q_{ОП}}(t)}{\sqrt{N}};Q_{ОП}^{(c)}(t)+\frac{t_\Theta(N-1)\sigma^2_{Q_{ОП}}(t)}{\sqrt{N}}\right),$$
$$t\in[t_0,T],$$

де $t_\Theta(N-1)$ – Θ-квантиль двостороннього розподілу Ст'юдента з (N – 1)-ступенями вільності та довірчим рівнем $\Theta\in(0,1)$ [12, с. 236-237].

Вище описане сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай вхідна інформація стохастичної економіко-математичної моделі (3)–(7) задовольняє умови:

1) детерміновані сталі: $\alpha\in(0,1)$, $\beta\in(0,1)$, W_1, W_2, λ, $\lambda\, W_2, \le\alpha^2/(4\beta^2)$, $n > 0$, $t_0\ge 0$, $T > t_0,$ $Q_T\ge 0$;

стохастична стала: $Q_0\ge 0$;

2) задача нелінійного програмування (11) має розв'язок.

Тоді стохастична економіко-математична модель (3)–(7) має оптимальний процес, де оптимальне керування за коефіцієнтом збору врожаю є кусково-неперервною функцією на $[t_0, T]$, а оптимальна траєкторія за кількістю осіб популяції – неперервною та кусково-неперервною функцією на $[t_0, T]$.

Крім того, оптимальне керування та момент перемикання керування є детермінованими величинами та не залежать від коефіцієнта при прирості вінерівського процесу в стохастичній динаміці кількості осіб популяції, а оптимальна траєкторія – стохастичною функцією.

Зауваження. Вищеописана методика дослідження стохастичної економіко-математичної моделі має місце для моделі (3)–(7) при кусково-неперервних на $[t_0, T]$ функцій $W_1(t)$ і $W_2(t)$.

Висновки з проведеного дослідження. Запропонована стохастична модель оптимального збору врожаю з використанням вінерівського та пуассонівського процесів і проведено її дослідження.

Запропонована стохастична економіко-математична модель має оптимальний процес, де оптимальне керування за коефіцієнтом збору врожаю є кусково-неперервною функцією на $[t_0, T]$, а оптимальна траєкторія за кількістю осіб популяції – неперервною та кусково-диференційованою функцією на $[t_0, T]$.

Для запропонованої стохастичної економіко-математичної моделі показано, що оптимальне керування та момент перемикання керування є детермінованими величинами і не залежать від коефіцієнта при прирості вінерівського процесу в рівнянні динаміки кількості осіб популяції, а оптимальна траєкторія – стохастичною функцією.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Ляшенко І.М. Моделювання біологічних та екологічних процесів: Навчальний посібник / І.М. Ляшенко, А.П. Мукоєд. – К.: Видавничо-поліграфічний цент «Київський університет», 2002. – 340 с.
2. Григорків В.С. Моделювання економіки: навчальний посібник / В.С. Григорків. – Чернівці: ЧНУ, 2009. – 320 с.
3. Бойчук М.В. Стохастическая модель оптимальной однопродуктовой экономики роста при нелинейном эколого-экономическом критерии с винеровскими и пуассоновскими процессами / М.В. Бойчук, А.Р. Семчук // Проблемы управления и информатики, 2015. – № 3. – С. 136-148.
4. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів / А.В. Скороход. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.
5. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів / В.К. Ясинський. – Чернівці: Золоті литаври, 2005. – 396 с.
6. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
7. Андреева Е.А. Управление системами с последействием / Е.А. Андреева, В.Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет. – М. : Наука, 1992. – 336 с.
8. Никитин Н.Н. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешности / Н.Н. Никитин // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1978. – Т. 18, № 1. – С. 106-117.
9. Ясинський В.К. Стохастичні динамічно-функціональні системи зі всією передісторією / В.К. Ясинський. – К.: ТВ і МС, 2003. – 304 с.
10. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
11. Григорків В.С. Оптимальне керування в економіці: навчальний посібник / В.С. Григорків. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. – 200 с.
12. Магнус Я.Р. Эконометрика. Начальный курс: Учебное пособие / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – М.: Дело, 1998. – 248 с.