

2. Вініченко О.М. Характеристика, види та сутність розвитку підприємства. *Агросвіт*. 2015. № 15. С. 49–57. URL: http://www.agrosvit.info/pdf/15_2015/10.pdf.

3. Державна служба статистики України. URL: <http://www.ukrstat.gov.ua>.

4. Дідорук М. Проблеми та основні тенденції розвитку вітчизняного ринку ювелірних товарів. Реформування економіки України як фактор забезпечення сталого розвитку: матеріали VI Всеукраїнської студентської наукової Інтернет-конференції (Чернівці, 31 березня 2017 р.). Чернівці: ЧТЕІ КНТЕУ, 2017. С. 173–175.

5. Коротков Э.М. Концепция менеджмента: учеб. пособ. для студентов и слушателей по направлению «Менеджмент». Москва: Дека, 1997. 304 с.

6. Луців Н.В. Проблеми та основні тенденції розвитку вітчизняного ринку ювелірних виробів. *Товарознавство та інновації*. 2012. Вип. 4. С. 79–89.

7. Офіційний сайт союзу ювелірів України. URL: <http://juvelir.org.ua>.

8. Попівняк Ю.М. Проблеми функціонування ювелірної промисловості України у світовому контексті та шляхи їх розв'язання. Актуальні проблеми економіки. 2013. № 9. С. 62–69. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ape_2013_9_10.

9. Семенюк К.М. Державне регулювання розвитку ювелірної галузі в Україні: автореф. дис. ... канд. наук з держ. упр.: 25.00.02; Нац. акад. держ. упр. при Президентові України, Харків. регіон. ін-т держ. упр. Харків, 2015. 20 с.

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ВАЛОВОГО ПРОДУКТА, ОПИСУВАЕМОГО УРАВНЕНИЕМ ДУФФИНГА

MODEL OF DYNAMICS OF GROSS PRODUCTS, DESCRIBED BY DUFFING EQUATION

УДК 519.86

Семенов А.С.

к. к.ф.-м.н., доцент кафедры экономической кибернетики и информационных технологий
Одесский национальный политехнический университет

Обобщенная нелинейная модель валового продукта содержит уравнение Дуффинга, описывающего в том числе хаотический режим и странный аттрактор. Предложен метод приведения системы к регулярному режиму с помощью небольшого параметрического возмущения подходящей частоты. Возмущение представляется небольшим периодическим колебанием, входящим в кубическую нелинейность уравнения.

Ключевые слова: нелинейная динамическая экономическая система, уравнение Дуффинга, регуляризация, подавление хаоса, численная реализация.

Узагальнена нелінійна модель валового продукту містить рівняння Дуффінга, що описує у тому числі хаотичний режим і дивний аттрактор. Пропонується метод приведення системи до регулярного режиму за

допомогою невеликого параметричного збурення відповідної частоти. Обурення представляється невеликим періодичним коливанням, що входить у кубічну нелінійність рівняння.

Ключові слова: нелінійна динамічна економічна система, рівняння Дуффінга, регуляризація, придушення хаосу, чисельна реалізація.

A generalized nonlinear model of the gross product contains the Duffing equation, including a chaotic regime and a strange attractor. A method is proposed for reducing the system to a regular regime by means of a small parametric perturbation of a suitable frequency. The perturbation is a small periodic oscillation entering into the cubic nonlinearity of the equation.

Key words: nonlinear dynamic economic system, Duffing equation, regularization, suppression of chaos, numerical implementation.

Постановка проблемы. Требования адекватного отражения функционирования экономической системы привели к необходимости учета в динамических моделях нелинейных зависимостей. Для таких систем в математике разработаны методы отыскания устойчивых и неустойчивых режимов при одних и тех же параметрах системы и внешнего воздействия. Классическим примером является модель, описываемая уравнением Дуффинга с кубической нелинейностью, в которой обнаруживаются весьма сложные субгармонические колебания. При определенных значениях параметров уравнение Дуффинга описывает странный аттрактор и хаос. Еще в 80-х годах обнаружена возможность подавления хаоса путем подачи гармонического воздействия на систему [1]. В предлагаемой работе в свете развития этой

идеи рассмотрено влияние малого параметрического возмущения входящего в кубическую нелинейность уравнения Дуффинга, входящего в описание динамики валового продукта.

Анализ последних исследований и публикаций. Линейная модель динамики валового продукта, предложенная Р.М. Нижегородцевым [2], может быть обобщена путем введения в модель нелинейного уравнения:

$$m(x,t)\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + C(x) = F(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ – совокупный общественный продукт, t – непрерывное время, $F(t)$ – совокупный объем инвестиций, $m(x,t)$ – мера инерции хозяйственной системы, $B\frac{dx}{dt}$ – мера сопротивления переменам, происходящим под воздействием инвестиций $F(t)$,

$C(x)$ – функция накопления. В частном случае при $m(x,t)=const$, $B\left(\frac{dx}{dt}\right) = b\dot{x}$ ($b = const$), $C(x)=-cx$ ($c=const$), $F(t)=f$ получаем линейную модель [2].

В случае когда $F(t) = \gamma \sin(\omega t)$, $m = const$, $c(x) = \alpha x + \beta x^3$, уравнение (1) рассматриваемой модели становится классическим уравнением Дюффинга:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \sin(\omega t) \quad (2)$$

Проведем качественный анализ поведения системы на основе энергетических соображений. Известно, что применительно к экономическим системам эквивалентом кинетической энергии является половина произведения меры инертности экономической системы m на квадрат скорости изменения совокупного общественного продукта. Эквивалентом потенциальной функции является интеграл от функции накопления $c(x)$. Если обозначить $y = \frac{dx}{dt}$, то полную энергию системы можно представить соотношением:

$$E = U(x) + \frac{y^2 m}{2}, \quad (3)$$

где $U(x) = \int c(x) dx$, E – полная энергия системы.

Методику исследования, не нарушая общности, рассмотрим на несколько упрощенном уравнении (2):

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = f \quad (4)$$

Потенциальная энергия системы, описываемой уравнением (3), имеет вид:

$$U(x) = \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4} \quad (5)$$

Картина на фазовой плоскости (при $\alpha > 0$), а значит, и поведение системы, существенно зависит от знака коэффициента ангармоничности β .

Полагаем, прежде всего, что $\alpha > 0$.

В случае $\beta > 0$ (жесткая восстанавливающая сила) и малых x потенциальная энергия $U(x) \approx \frac{\alpha x^2}{2}$ и фазовые траектории – семейство эллипсов. По мере увеличения амплитуды колебаний (совокупного общественного продукта $x(t)$) фазовые траектории все больше отличаются от эллипсов, а период колебаний начинает зависеть от амплитуды (неизохронность колебаний).

Из соотношения (3) вытекает $\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}$ т.е. $dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$. В силу симметрии семейства фазовых траекторий, получаем:

$$T = \sqrt{1/2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

Таким образом, период колебаний зависит от полной энергии системы E , т. е. от ампли-

туды колебаний. Точное вычисление периода требует использования эллиптических функций Якоби.

В случае $\beta < 0$ (мягкая восстанавливающая сила) фазовая плоскость качественно отличается от предыдущего случая $\beta > 0$. Кроме периодического движения системы вокруг устойчивого положения равновесия при полной энергии системы меньше критического значения E_0 , реализуются при $E > E_0$ уходящие в бесконечность фазовые траектории при $t \rightarrow \infty$ и при $t \rightarrow -\infty$, т.е. реализуется неустойчивость. При $E = E_0$ соответствующие фазовые кривые проходят через неустойчивые состояния равновесия типа седла и относятся к числу сепаратрис, разделяющих области с качественно различным характером движения. Связанные с сепаратрисными многообразиями бифуркации могут приводить к возникновению странных аттракторов.

При $\alpha < 0$ вид фазовой плоскости и потенциальная энергия качественно отличаются от предыдущего случая. На фазовой плоскости системы

существуют уже три особых точки: два центра с

координатами $\left(\pm \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}}, 0 \right)$ и седло с координатами

$(0,0)$. При плавном уменьшении α в точке $\alpha = 0$ возникает бифуркация. При $\alpha < 0$ вместо одного устойчивого состояния равновесия типа центра плавно возникают два центра, все более удаляющиеся от начала координат. В системе возможны следующие состояния: вынужденные колебания около центров – устойчивые или неустойчивые, вынужденные колебания, охватывающие оба центра, – устойчивые или неустойчивые, положение равновесия, соответствующее седловой точке, – всегда неустойчивое. Положения равновесия, соответствующие особым точкам типа «центр», неустойчивы в силу наличия внешнего воздействия. Странный аттрактор в этой системе реализуется при тех значениях параметра f из (4), когда все перечисленные режимы, которые могут быть устойчивыми, становятся неустойчивыми. Так как нет ни одного устойчивого состояния, решение (и система) вечно будет «блуждать» между всеми неустойчивыми состояниями. Выйти из этой зоны не позволяют потенциальные барьеры по краям, т. е. нелинейная детерминированная система описывает в этом случае весьма сложное движение – ограниченные непериодические колебания, т. е. хаос.

Постановка задания. Различные математические описания и определения хаоса обладают общим свойством чувствительности решения к начальным условиям: с течением времени близкие траектории расходятся на конечное расстояние, т. е. прогноз на длительное время оказы-

вається неможливим. Вместе с тем обнаружена [3] возможность существенного изменения поведения системы путем даже малого изменения ее параметров. Достаточно малыми изменениями параметров системы или внешних воздействий можно хаотическую траекторию преобразовать в периодическую («хаос нельзя прогнозировать, но им можно управлять»). Эта идея управления хаосом породила большое количество исследований и публикаций, частичный обзор которых приводится в [4].

Одним из методов управления является метод управления без обратной связи, когда управляющий сигнал формируется без учета значений управляемого процесса, т. е. поведение нелинейной системы является результатом воздействия заранее выбранного внешнего сигнала. Разработан целый ряд методов управления хаотическим движением в разомкнутом контуре (управление программным воздействием). Большинство из этих методов исследовано численно в частных случаях, и общая задача подавления хаотического движения с помощью сигнала управления остается открытой.

Обратимся к уравнению (2) модели и выберем параметр управления функционирования системы. Запишем уравнение с учетом $\alpha < 0$ в виде ($\alpha = -1$):

$$\dot{x} + \delta \dot{x} - x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (6)$$

Частичный анализ такого уравнения при некоторых численных значениях параметров приводится в [5].

Правую часть уравнения рассматриваем как малое возмущение, действующее на невозмущенную систему. Определяются внешние параметры, при которых поведение системы становится хаотическим. Затем вводится внешнее дополнительное возмущение путем замены параметра нелинейности β на $\beta(1 + \eta \cos(\Omega t))$. При этом хаотическое движение можно подавить выбором частоты Ω дополнительного возмущения, близкого к частоте исходного возбуждения [6; 7]. На нелинейную систему, совершающую колебания, действует внешнее воздействие определенной частоты, тогда система получает энергию от внешнего источника, и малые вначале колебания нарастают. Однако поскольку осциллятор неизохронный, большей энергии соответствует уже другая частота. В результате система выходит из резонанса. Таким образом, выход из резонанса происходит за счет нелинейного сдвига частоты. Можно добавить, что частота собственных колебаний осциллятора Дуффинга зависит от его амплитуды и при увеличении амплитуды знак изменения частоты зависит от параметра нелинейности β , коэффициента, ответственного за функцию накопления.

Изложение основного материала исследования. Используя идею подавления хаоса [5], рассмотрим модифицированное уравнение Дуффинга (6):

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + \beta(1 + \eta \cos(\Omega t))x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (7)$$

Частота ω характеризует (не обязательно периодический) колебательный характер поступления инвестиций, а выбранная специальным образом частота Ω соответствует изменениям накоплений и является эндогенной вполне регулируемой переменной. Исследование поведения решения (7) проводим в предположении малости возмущения, т. е. $\eta \ll 1$. Коэффициент δ , характеризующий сопротивление переменам, происходящим под воздействием инвестиций, может быть и малым, и большим в соответствии с характеристиками рассматриваемой конкретной экономической системы. Коэффициент γ может быть и отрицательным, если инвестиции изымаются из экономики.

Проведены численные расчеты при следующих неизменных внешних параметрах:

$$\beta = 0.1, \delta = 0.05, \alpha = -1, \gamma = 0.5, \eta = 0.01$$

При этом ищется решение уравнения (6) с численными коэффициентами:

$$\ddot{x} + 0.05\dot{x} - x + 0.1(1 + 0.01\cos(\Omega t))x^3 = 0.5\cos(\omega t) \quad (8)$$

при начальных условиях (x_0, \dot{x}_0) . Расчеты проводились с использованием программного продукта Matlab. Составлена программа решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Решение уравнения представляется в виде таблицы значений неизвестной функции, графиков ее изменения и фазовых портретов решения. Расчеты показали весьма существенную зависимость поведения решения от начальных условий. В качестве начального условия выбирались координаты особых точек $\left(\pm \left(-\alpha/\beta \right)^{\frac{1}{2}}, 0 \right)$ и седло с координатами $(0,0)$.

Поведение решения соответствует в этом случае поведению, описанному выше в качественном анализе. Обнаружилось существенное влияние на решение уравнения значений возмущения η . Например, с ростом этого параметра значения валового выпуска становятся отрицательными и значительно отрицательными. Также ничего удивительного не проявилось при изменении начальных условий: характер решения существенно меняется с изменением начальных условий. Не менее существенные изменения решения наблюдаются при изменении параметра γ , характеризующего интенсивность инвестиций: обнаруживается странный аттрактор (устойчивое многообразие неустойчивых траекторий) при значениях параметра больше единицы. «Закачивание» в макроэкономическую систему больше

инвестиционных ресурсов, чем это необходимо для поддержания темпов роста экономики, выводит ее на неустойчивый режим работы. При неизменных в уравнении всех выше приведенных параметрах проводился анализ поведения решения при различных соотношениях между частотами ω и Ω . На рис. 1 приводится пример хаотического решения (8) при начальных условиях (3,16;0) и произвольных частотах, а на рис. 2 – фазовый портрет решения.

Для подавления хаоса выбиралась частота внешнего дополнительного возмущения в соответствии с рекомендациями [6] равная: $\omega = 0.2; \Omega = 0,5\omega; 1,5 \omega; 2,5 \omega, \dots$. На рис. 3 приведено решение уравнения (7) для $\omega = 0.2; \Omega = 0,5\omega$ и на рис. 4 – фазовый портрет решения.

На рис. 5, который представляет собой график рис. 3, при изменении времени от нуля до ста единиц ясно видно, как внешнее дополнительное воздействие накладывается на основное и в силу неизохронности осциллятора подавляет резонанс и выводит решение на устойчивый режим.

Выводы из проведенного исследования.

Таким образом, рассмотрено влияние малого параметрического возмущения на поведение решения уравнения Дуффинга, описывающего в данном случае модель динамики валового продукта. Уравнение модели при невозмущенном состоянии ($\eta = 0$) описывает динамику хаотического движения. Путем добавления в уравнение малого параметрического возмущения оказалось возможным погасить хаос и сделать движение регулярным. Динамика становится регулярной при условии, что амплитуда возмущения мала и частота параметрического возмущения выбирается в соответствии с требованием равенства нулю показателя Ляпунова (Ляпуновской экспоненты). Входящее в кубическую нелинейность параметрическое возмущение фактически представляет функцию накопления. Следовательно, управляя накоплением, можно вывести систему на регулярный режим работы. С помощью варьирования всей совокупности параметров, входящих в уравнение, или их части можно моделировать, таким образом, функционирование экономической системы.

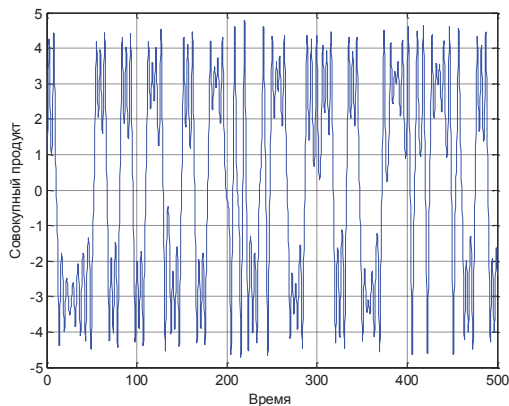


Рис. 1. График изменения совокупного продукта при $\omega = 1.1$

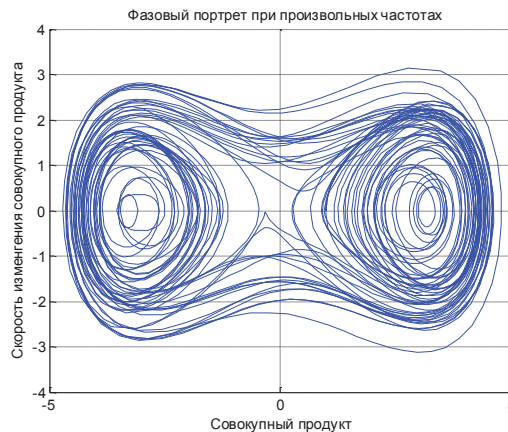


Рис. 2. Фазовый портрет решения при $\omega = 1.1$

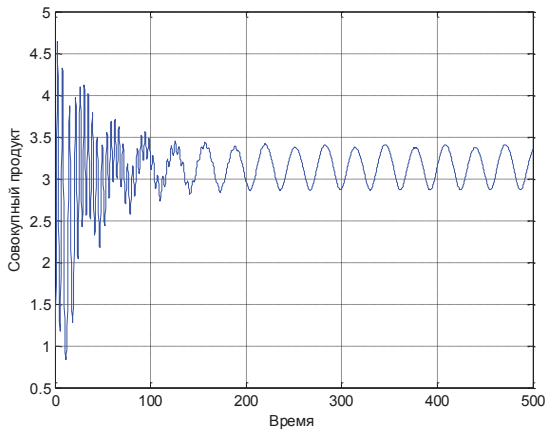


Рис. 3. График изменения совокупного продукта при $\omega = 0.2$

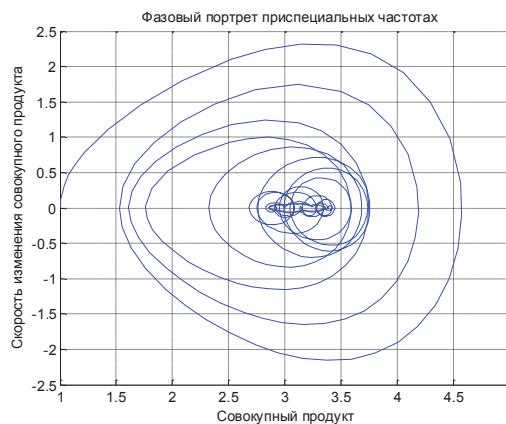


Рис. 4. Фазовый портрет решения при $\omega = 0.2, \Omega = 0,1$

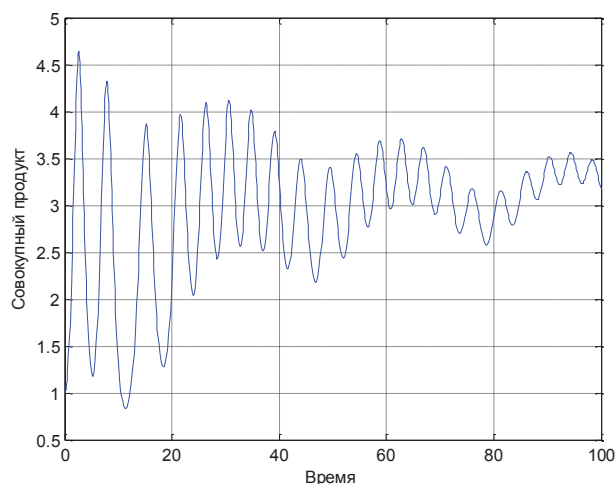


Рис. 5. Начальный участок графика изменения совокупного продукта при $\omega = 0,2$, $\Omega = 0,1$

В дальнейшем предполагается строго теоретически обосновать вывод системы на регулярный режим с помощью параметрического малого воздействия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. Дудник Е.Н., Кузнецов Ю.И., Минакова И.И., Романовский Ю.М. Синхронизация в системах со странным аттрактором. Вестник МГУ. Физика. Астрономия. 1983. Т. 24. № 4. С. 84–87.
2. Нижегородцев Р.М. Вариационные методы макроэкономической оптимизации инвестиционных процессов. Финансовая математика; под ред. Ю.М. Осипова, М.В. Грачевой, Р.М. Нижегородцева. Е.С. Зотовой. М.: ТЕИС, 2001.

3. Ott T., Grebogi C., Yorke G. Controlling chaos. Phys.Rev.Lett. 1990. V. 64. № 11. P. 1196–1199.
4. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. Методы. Автом. и Телемех. 2003. № 5. С. 3–45; Autom.Remote Control 64: 5(2003). 673-713.
5. Holmes P.J. A nonlinear oscillator with a strange attractor. Philosophical Transaction of the Royal Society. London, 2003. Vol. 292.
6. Lima R., Pettini M. Suppression of chaos by resonant parametric perturbation. Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 726–733.
7. Pettini M. Controlling chaos through parametric excitations. Dynamic and Stochastic Processes Eds. Lima R., Streit L., and Villa-Mends, R.V. Springer – Verlag. N.Y., 1988. P. 242–250.