РОЗДІЛ 9. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА-ХИКСА

ON ONE METHOD OF INVESTIGATION OF THE INSTABILITY OF THE DYNAMIC MODEL OF SAMUELSON-HIKS

УДК 519.86

Семенов А.С.
к.ф.-м.н., доцент кафедры
экономической кибернетики
и информационных технологий
Одесский национальный
политехнический университет
Ивченко И.Ю.
к.э.н., доцент кафедры
экономической кибернетики
и информационных технологий
Одесский национальный
политехнический университет

Непрерывным аналогом модели Самуэльсона-Хикса является линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Детально исследованы условия устойчивости модели, когда коэффициенты уравнения являются константами. В работе предлагается метод исследования, когда коэффициент потребности в инвестициях является функцией времени. Решение нелинейного в этом случае уравнения ищется методом интегрального преобразования Лапласа. Получено строгое аналитическое решение задачи. Выводы и численные результаты по найденной формуле в частных случаях совпадают с известными ранее.

Ключевые слова: *модель Самуэльсона-Хикса, дифференциальное уравнение, инвестиции, нелинейность, функции времени, устойчивость.*

Безперервним аналогом моделі Самуельсона-Хікса є лінійне неоднорідне диференційне рівняння другого порядку. Детально досліджено умови стійкості моделі, коли коефіцієнти рівняння є константами. У роботі пропонується метод дослідження, коли коефіцієнт потреби в інвестиціях є функцією часу. Рішення нелінійного в цьому разі рівняння шукається методом інтегрального перетворення Лапласа. Отримано точне аналітичне рішення задачі. Висновки і чисельні результати за знайденою формулою в окремих випадках збігаються з відомими раніше.

Ключові слова: *модель Самуельсона-Хікса, диференційне рівняння, інвестиції, нелінійність, функції часу, стійкість.*

A continuous non-homogeneous differential equation of the second order is a continuous analogue of the Samuelson-Hicks model. The stability conditions of the model are studied in detail, when the coefficients of the equation are constants. The paper proposes a research method, when the demand ratio for investments is a function of time. The solution of the nonlinear equation in this case is sought by the Laplace integral transformation method. A rigorous analytical solution of the problem is obtained. Conclusions and numerical results on the found formula in special cases coincide with those known earlier.

Key words: *Samuelson-Hicks model, differential equation, investment, nonlinearity, time functions, stability.*

Постановка проблемы. К одной из моделей делового цикла, описывающих изменение национального дохода при взаимодействии мультипликатора и акселератора, относится модель Самуэльсона-Хикса, где акселератор с запаздыванием представляет собой функцию ожидаемых инвестиций [1]. В теоретических исследованиях экономической динамики наибольшее внимание уделяется инвестиционному поведению, представленному в виде некоторой зависимости между размерами инвестиций и характеристиками состояния экономической системы. Поведение решения уравнения модели изучено достаточно полно при фиксированных величинах автономных расходов и затрат на инвестиции [1; 2]. В настоящей работе предлагается вариант метода исследования устойчивости решения, когда коэффициенты уравнения являются функциями времени.

Анализ последних исследований и публикаций. В модели Самуэльсона-Хикса наиболее полно реализовано взаимодействие мультипликатора и акселератора. Основная предпосылка модели – осуществление планов потребления. В полной мере в модели вводится запаздывание спроса на потребление, и плановые величины потребления и капиталовложений превращаются в фактические затраты, дающие в сумме выпуск продукции. В модели Самуэльсона-Хикса весь комплекс запаздываний, в отличие от некоторых других похожих моделей, например модели Филлипса, на стороне инвестиций объединен в зависимости акселерации, что требует особой тщательности в формулировке и интерпретации этой зависимости. Осуществляются планы капиталовложений так, что ожидаемые инвестиции равны общей величине фактических сбережений и капиталовложений. Акселератор с запаздыванием представляет собой в этом случае функцию ожидаемых инвестиций. Вследствие текущих изменений в выпуске продукции принимается решение об инвестициях, и необходимые для этого затраты планируются на несколько будущих интервалов времени.

Все сведения о возможных вариантах поведения динамической экономической системы содержатся в уравнении модели этой системы. Для моделирования экономических процессов, зависящих от времени, используется, в частности, аппарат теории дифференциальных уравнений. Такое моделирование допускает возможность аналитического исследования решения уравнения, а вместе с ним и поведение экономической системы. К одной из наиболее известных моделей делового цикла относится модель Самуэльсона-Хикса, несколько отличающаяся от модели Филлипса, например, тем, что плановые потребления и капиталовложения с запаздываниями превращаются в фактические затраты, дающие в сумме выпуск продукции. Непрерывным аналогом модели Самуэльсона-Хикса является линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка [1]:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(1-r)\frac{dy}{dt}+(1-c)y=C^*+I, \qquad (1)$$

где $y(t)$ – ВВП, C^* – минимальный объем фонда потребления, I – инвестиции, c – склонность к потреблению, r – коэффициент прироста потребности в инвестициях при увеличении ВВП на единицу. Модель учитывает меру инерции хозяйственной системы, меру сопротивления переменам, происходящим под действием входных параметров, норму накопления.

Наиболее частым и важным является вопрос устойчивости системы, в частности, вопрос устойчивости решения уравнения (1) в окрестности точки равновесия $y_E=\left(C^*+I\right)/(1-c)$. Согласно теории линейных дифференциальных уравнений общее решение неоднородного уравнения (1) имеет вид:

$$y(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}+\frac{C^*+I}{1-c} \qquad (2)$$

где выбранное частное решение $y_E=\left(C^*+I\right)/(1-c)$ неоднородного уравнения является одновременно и его стационарным решением.

В настоящей работе предлагается метод исследования устойчивости решения, когда коэффициенты уравнения c и r являются функциями времени, в частности, когда непрерывно со временем меняется потребность в инвестициях, т. е. коэффициент $r=r(t)$. Временная зависимость коэффициентов позволяет наряду с другими предположениями говорить о динамическом поведении системы.

Постановка задачи. Исследуем поведение решения уравнения (1) в окрестности точки равновесия $(y_E, 0)$ при импульсном воздействии на систему $\delta(t)=(\eta_0,u_0)$, причем возможны любые начальные условия, в том числе и $\eta_0<0$, $u_0<0$, т. е. значение ВВП уменьшается, и скорость его изменения в начальный момент отрицательна [1; 2]. При таких значениях начального возмущения обеспечить рост ВВП возможно, например, за счет значительных инвестиций. Решение уравнения (1) представим в виде $y(t)=y_E+\eta(t)$ при начальных условиях $y(0)=y_E+\eta_0;\quad y'(0)=u_0$. Тогда приращение ВВП относительно стационарного значения будет определяться решением следующей задачи Коши:

$$\frac{1}{1-c}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{1-r}{1-c}\frac{d\eta}{dt}+\eta=0; \qquad (3)$$

$$\eta(0)=\eta_0;\quad \eta'(0)=u_0$$

Характер решения (3) зависит от типа корней λ_1,λ_2 рактеристического уравнения, соответствующего уравнению, которые в свою очередь обусловливаются значениями параметров c и r.

Полагая $c>3/4$ рассмотрим поведение решения при различных значениях коэффициента r.

При $0<r<1-2\sqrt{1-c}$ искриминант характеристического уравнения положителен, а его корни действительны и различны. В начале переходного процесса при отрицательных значениях начальных условий выпуск, а следовательно, потребление и инвестиции некоторое время продолжают убывать, затем начинается их монотонный рост, который заканчивается достижением стационарного значения.

При $r=1-2\sqrt{1-c}$ искриминант равен нулю, корни уравнения действительные и равные. Выпуск, потребление и инвестиции ведут себя на протяжении переходного режима аналогично поведению в предыдущем случае. Система по завершении переходного процесса возвращается в исходное состояние, т. е. является устойчивой

При $1-2\sqrt{1-c}<r<1$ искриминант отрицателен, и корни уравнения комплексно сопряжены с отрицательной действительной частью. Система после затухающих гармонических колебаний возвращается в первоначальное состояние. Выпуск, потребление, инвестиции вначале продолжают убывать, затем начинают расти и достигают стационарных значений после достаточно длительных затухающих автоколебаний.

При $r=1$ корни характеристического уравнения мнимые взаимно сопряженные. Этот случай означает, что весь выпуск продукции за год целиком идет на инвестиции. Система будет находиться в незатухающих гармонических колебаниях, не возвращаясь в исходное состояние, т. е. система неустойчива. Выпуск колеблется около стационарного значения, потребление остается постоянным, равным стационарному значению, а инвестиции находятся в незатухающих автоколебаниях.

При $1<r<1+2\sqrt{1-c}$ искриминант уравнения отрицателен, корни характеристического уравнения комплексно сопряжены с положительной действительной частью. В этом случае дополнительные инвестиции обеспечиваются не только текущим выпуском, но и за счет сокращения потребления. Система будет находиться в гармонических автоколебаниях с экспоненциально возрастающей амплитудой, т. е. система в этом случае неустойчивая, синергетическая.

Изложение основного материала исследования. Предположим, что в модели Самуэльсона-Хикса, т. е. в уравнении (3), на дополнительные инвестиции (сверх постоянного значения I) непрерывно затрачивается больше ВВП, чем его прирост ($|r(t)|>1$), что может осуществляться лишь за счет соответствующего непрерывного сокращения потребления.

Ограничимся для иллюстрации метода исследования степенной зависимостью коэффициента от времени (например $r(t)=1+at^n,\ a>0$). Тогда уравнение задачи (3) примет вид:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}-at^n\frac{d\eta}{dt}+(1-c)\eta=0. \qquad (4)$$

Зависимость коэффициента прироста инвестиций от времени может быть и иной, например вида $r(t)=1-at^n,\ a>0$. Тогда коэффициент r становится меньше единицы. Кроме того, временная зависимость может иметь иной функциональный вид, например, синусоидальный, экспоненциальный и т. д. Уравнение (4) в этом случае, естественно, будет иметь несколько иной вид. Так или иначе, при определенных значениях параметров эта модель может проявлять свойства синергетического характера, хотя и является линейной динамической системой второго порядка.

Одним из эффективных методов решения дифференциальных уравнений и исследования динамических моделей является метод интегрального преобразования Лапласа, операционный метод. Применим его к решению уравнения (4) при $r(t)=1+at^n,\ a>0$. Уравнение нелинейное, и для использования интегрального преобразования Лапласа необходим специальный подход. Известна формула операционного исчисления, представляющая операторное изображение функции $t^n\,y^{(m)}(t)$ [3]:

$$t^n\,y^{(m)}(t)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu\,n!}{\nu!}\frac{\left[s^m\overline{y}(s)-s^m y(0)-\ldots-sy^{(m-1)}(0)\right]^{\nu}}{s^{n-\nu}}, \qquad (5)$$

где $\overline{y(s)}$ трансформанта Лапласа функции *y(x), s* – параметр преобразования.

Используя (5), применим преобразование Лапласа к уравнению (4), полагая $r(t)=1+at,\ a>0$. Полагая в (5) $n=1, m=1$ получим:

$$t\dot{y}(t)=-s\frac{d\overline{y(s)}}{ds}.$$

Следовательно, операторное изображение для уравнения (4) имеет вид

$$s^2\left[\overline{\eta(s)}-\eta(0)-\frac{1}{s}\eta'(0)\right]+as\frac{d\overline{\eta}}{ds}+(1-c)\overline{\eta}(s)=0$$

или

$$\frac{d\overline{\eta}}{ds}=-\left(\frac{s}{a}+\frac{1-c}{as}\right)\overline{\eta}(s)+\frac{s}{a}\eta(0)+\frac{1}{a}\eta'(0). \qquad (6)$$

Учитывая соотношение $1>c>0$ выберем дробь $(1-c)/a=n$ виде целого положительного числа. В этом случае решение уравнения (6)

$$\overline{\eta}(s)=As^{-n}e^{-\frac{s^2}{2}}+s^{-n}e^{-\frac{s^2}{2}}\int\left[s\eta(0)/a+\dot{\eta}(0)/a\right]s^n e^{\frac{s^2}{2}}ds$$

Анализ показывает, что при $A\neq 0$ решение не представимо интегралом Лапласа, поэтому полагаем A = 0 и получаем окончательное решение в преобразованном по Лапласу виде [4, с. 192]:

$$\eta(t)=(\eta(0)/a)\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu(2)^\nu\nu!C_k^\nu\frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}+$$
$$+(\eta'(0)/a)\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu(2)^\nu\nu!C_k^\nu\frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \qquad (7)$$

где *n=2k* для первого слагаемого и *n=2k*+1 для второго слагаемого.

Громоздкость формулы не должна пугать исследователя. Наличие компьютерной техники существенно облегчает численный анализ, а представление решения в виде аналитической формулы позволяет провести строгий детальный анализ для различных промежутков времени, в том числе сделать прогнозы.

Для конкретных значений параметров *a, c*, а значит и *r*, был проведен расчет $\eta(t)$ формуле (7), представляющей точное решение и сравнение этого $\eta(t)$ приближенным решением, полученным численно из уравнения (4). Расчеты показали достаточно хорошее совпадение результатов. На графиках приведены расчеты при *a* = 0.1, *c* = 0.8: на рисунке 1 приведено решение уравнения (4) и на рисунке 2 – $\eta(t)$ рассчитанное по формуле (7). Изменение знака начальных условий приводит лишь к изменению направления стремления к бесконечности с плюса на минус. Следует также отметить чувствительность решения уравнения (4) в этом случае к изменениям величины начальных условий.

Таким образом, расчеты показали, что при значениях коэффициента прироста потребности в инвестициях больших единицы модель Самуэльсона-Хикса обладает синергетическими свойствами (неустойчива). Эти выводы совпадают с выводами, проведенными ранее для постоянных коэффициентов, где было показано, что система неустойчива при коэффициенте $r>1$. Остается открытым вопрос о поведении системы и характере решения уравнения модели при зависимом от времени коэффициенте *c* – предельной склонности к потреблению.

В случае, когда зависимость от времени коэффициентов уравнения, в частности коэффициента *r(t)*, не степенная, исследование поведения системы и решения уравнения модели можно проводить численно, используя, например, достаточно мощный программный продукт Matlab. В качестве примера рассмотрена зависимости коэффициента *r* от времени в виде $r(t)=1-at,\ a>0$.

Решение уравнения (4) становится регулярным, и система возвращается в состояние равновесия. Выпуск, потребление и инвестиции

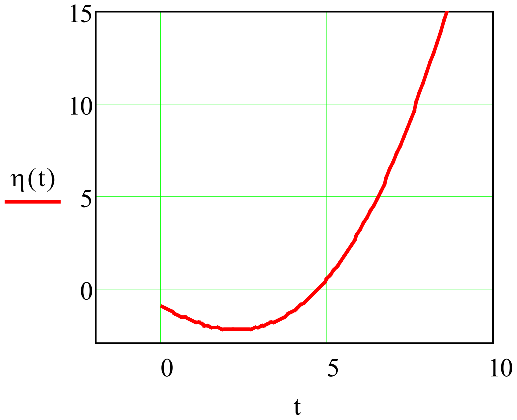

Рис. 1. Валовый выпуск, рассчитанный по уравнению (4)

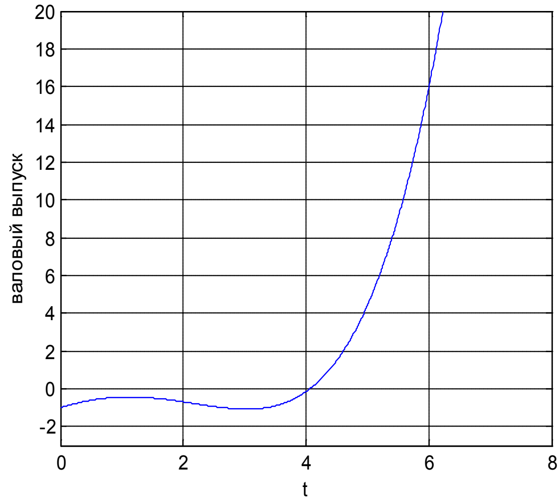

Рис. 2. Валовый выпуск, рассчитанный по формуле (7)

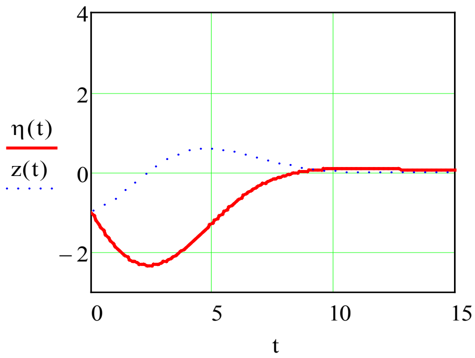

Рис. 3. Валовый выпуск и скорость его изменения

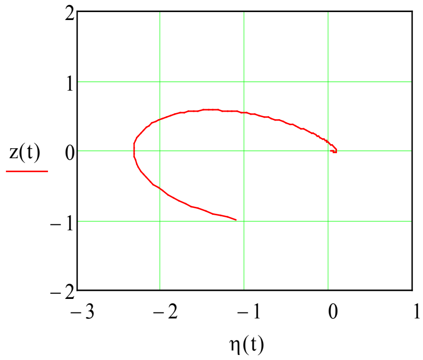

Рис. 4. Фазовый портрет решения уравнения (4)

после монотонного роста достигают своих стационарных значений. На рисунках 3 и 4 приводится решение уравнения (4) и фазовый портрет в этом случае при прежних значениях кэффициентов: $a = 0.1$, $c = 0.8$.

Таким образом, экономика, описываемая моделью Самуэльсона-Хикса, устойчива при $0 < r < 1$.

Выводы из проведенного исследования. Рассматривая интервалы времени, включающие затраты на новый основной капитал, т. е. интервалы достаточно длительные для нейтрализации первоначального влияния изменения выпуска продукции на оборотный капитал, в модели Самуэльсона-Хикса, предложено коэффициент прироста потребности в инвестициях считать зависимым от времени. Уравнение модели в этом случае становится нелинейным. Для определенного вида этой функциональной зависимости в работе предложена методика поиска решения поставленной задачи, основанная на интегральном преобразовании Лапласа. Выведена формула для расчета ВВП, позволяющая одновременно проводить расчеты потребления и инвестиций. Получены выводы, совпадающие в частных случаях с известными ранее результатами. Показано, что эта модель при определенных значениях параметров является синергетической.

Предполагается в дальнейшем исследовать случай зависимости от времени как одного, так и всех коэффициентов уравнения, проследить их взаимовлияние и причины выхода на неустойчивый режим работы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование / Колемаев В.А. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 295 с.

2. Красс И.А. Математические модели экономической динамики / Красс И.А. М.: Сов. радио, 1985. 240 с.

3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. Учебн. пособие для вузов / Диткин В.А., Прудников А.П. М.: Высшая школа, 1975. 407 с.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / Бейтмен Г., Эрдейи А. М.: Наука, 1974. 296 с.