

УДК 624.014

**ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА РОЗРАХУНКОВОЇ ДОВЖИНИ
СТЕРЖНЯ ШАРНІРНО ЗАКРІПЛЕНОГО В НИЖНІЙ ЧАСТИНІ**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА РАСЧЕТНОЙ ДЛИНЫ
СТЕРЖНЯ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОГО В НИЖНЕЙ ЧАСТИ**

**DETERMINATION OF COEFFICIENT OF CALCULATION LENGTH O
F BAR GIMBALLED IN BOTTOM PART**

**Білик С.І. д.т.н., проф., Білик А.С. к.т.н., доц., Ключниченко Т.О.
ст.викл., Джанов Л.В. маг. (Київський національний університет
будівництва і архітектури)**

**Билык С.И. д.т.н., проф., Билык А.С. к.т.н., доц., Ключниченко Т.А.
ст. преп., Джанов Л.В. маг. (Киевский национальный университет
строительства и архитектуры)**

**Bilyk S.I. doctor of technical sciences, professor, Bilyk A.S. candidate of
technical sciences, associate professor., Klushnichenko T.A. senior lecturer,
Dzhanov L.V. graduate student (Kyiv National University of Construction
and Architecture, Kyiv)**

У статті приведено загальне рішення рівняння стійкості стержня шарнірно закріпленого на нижньому кінці та пружно закріпленого на верхньому кінці. Надано обґрунтування отриманого узагальненого критерію стійкості та наведено рішення тестових задач.

В статье приведено общее решение уравнения устойчивости стержня шарнирно закрепленного на нижнем конце и упруго закрепленного на верхнем конце. Предоставлено обоснование метода и приведены решения тестовых задач.

The article gives a general solution of the equilibrium stability of the rod hinged on the lower end and elastically secured to the upper end. The justification of the method is provided and the solution of the test tasks is given.

Ключові слова:

Критична сила, коефіцієнт розрахункової довжини, рівняння стійкості, метод початкових параметрів, стержень, шарнір, пружні опори.

Критическая сила, коэффициент расчетной длины, уравнение устойчивости, метод начальных параметров, стержень, шарнир, упругие опоры.

Critical force, coefficient of estimated length, stability equation, method of initial parameters, rod, hinge, elastic support.

Актуальність роботи полягає в узагальненні теоретичного методу розрахунку стійкості стержня, що одним кінцем закріплений шарнірно.

Аналіз основних досліджень та публікацій.

У статті розглянуто загальне рішення втрати стійкості стержня шарнірно закріпленого в одному кінці та на пружних опорах з іншого. У витоків теорії стійкості стояв Л. Ейлер, отримав формулу для визначення критичної сили шарнірно закріпленого стержня [1]. Для ряду випадків стрижнів постійного і змінного перерізу з жорсткими [1,2,3,11] і пружними опорами отримані відповідні критерії наукових розробках [3,6,7,11]. Розроблені узагальнені методики визначення стійкості стрижнів за експериментальними даними при різних граничних умовах [5,12]. Стійкості стрижнів з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій і початкових недосконалостей та місцевої стійкості присвячені роботи [8,9,10,13].

Постановка задачі. Отримати узагальнений критерій стійкості стрижня шарнірно закріпленого на нижньому кінці та пружно закріпленого на верхньому кінці при сприйманні згинального моменту та поперечних сил.

Мета і задача досліджень. Отримати на основі методу початкових параметрів узагальнений критерій стійкості стрижня шарнірно закріпленого на нижньому кінці та пружно закріпленого на верхньому кінці при сприйманні згинального моменту та поперечних сил.

Методика досліджень будується на аналітичних дослідженнях стержнів методом початкових параметрів [3].

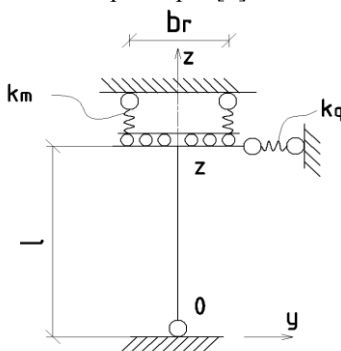


Рис.1.

Напишемо загальне рівняння прогинів, кутів повороту та згинальних моментів за методом початкових параметрів при використанні загального вигляду і позначення параметрів за [4,7].

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_z = \eta_0 + \frac{\eta'_0}{\alpha_N} \sin(\alpha_N z) - \frac{M_{x0}}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N z)] - Q_0 [\alpha_N z - \sin(\alpha_N z)] \\ \eta'_z = \eta'_0 \cos(\alpha_N z) - \frac{M_{x0}}{\alpha_N EI_x} \sin(\alpha_N z) - \frac{Q_0}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N z)] \\ \eta''_z = -\alpha_N \eta'_0 \sin(\alpha_N z) - \frac{M_{x0}}{EI_x} \cos(\alpha_N z) - \frac{Q_0}{\alpha_N EI_x} \sin(\alpha_N z) \\ M_{xz} = -EI_x \eta''_z = \alpha_N EI_x \eta'_0 \sin(\alpha_N z) + M_{x0} \cos(\alpha_N z) + \frac{Q_0}{\alpha_N} \sin(\alpha_N z) \end{array} \right. \quad (1)$$

У рівняннях (1) використані позначення параметрів стійкості: η_z – переміщення поточного перерізу, η'_z – кути о перерізів з довільною координатою z , M_{xz} – згинальний момент в поточному перерізі, η_0 ; η'_0 ; M_{x0} ; Q_0 – відповідно початкові переміщення, кути повороту перерізу, згинальний момент, і попечена сила в перерізі з координатою $z=0$. Параметр стійкості прийнято в загальному відомому вигляді.

$$\alpha_N^2 = \frac{N}{EI_x} \rightarrow \alpha_N^2 l^2 = \frac{Nl^2}{EI_x} \rightarrow \alpha_N^2 EI_x = N \quad (2)$$

Рівняння рівноваги у загальному вигляді стрижня з граничними умовами (рис.1) мають вид.

$$\begin{aligned} \eta_0 = 0 \rightarrow M_{x0} = 0 \rightarrow Q_0 = k_q \eta_n \rightarrow M_{xn} - Q_0 l - N \eta_n = 0 \rightarrow M_{xn} = R_M b_r \\ = k_M \frac{b_r^2}{2} \eta'_0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} k_M \frac{b_r^2}{2} \eta'_0 - k_q \eta_n l - N \eta_n = 0 \rightarrow \alpha_N^2 EI_x \\ = N \rightarrow k_M \frac{b_r^2}{2} \eta'_0 - k_q \eta_n l - \alpha_N^2 EI_x \eta_n = 0 \end{aligned}$$

$$k_M \frac{b_r^2}{2} \eta'_0 - \eta_n (k_q l + \alpha_N^2 EI_x) = 0 \quad (4)$$

Відповідно при граничних умовах (3) рівняння методу початкових параметрів (1) для стрижня (рис.1) приймають спрощений вид.

$$\left\{ \begin{array}{l} k_M \frac{b_r^2}{2} \eta'_n + \eta_n (k_q l - \alpha_N^2 EI_x) = 0 \\ \eta'_z = \eta'_0 \cos(\alpha_N z) - \frac{k_q \eta_n}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N z)] \\ M_{xz} = -EI_x \eta''_z = \alpha_N EI_x \eta'_0 \sin(\alpha_N z) + \frac{-k_q \eta_n}{\alpha_N} \sin(\alpha_N z) \end{array} \right. \quad (5)$$

Таким чином, об'єднання першого і другого рівняння при граничних умовах $z=l$ в системі рівняння (5) приводить до рівняння рівноваги (4). Для граничних умов $z=l$ система рівнянь (5) може бути записана так.

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_n \frac{k_q}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N l)] + \eta'_0 \cos(\alpha_N l) - \eta'_n = 0 \\ \frac{k_q \eta_n}{\alpha_N} \sin(\alpha_N l) - \alpha_N EI_x \eta'_0 \sin(\alpha_N l) + k_M \frac{b_r^2}{2} \eta'_n = 0 \\ k_M \frac{b_r^2}{2} \eta'_n + \eta_n (k_q l - \alpha_N^2 EI_x) = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Нетривіальне рішення системи рівнянь (6) буде дійсним при рівності нулю визначника системи при невизначених коефіцієнтах:

$$\frac{k_q}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N l)] [-\alpha_N EI_x \sin(\alpha_N l)] k_M \frac{b_r^2}{2} + \cos(\alpha_N l) k_M \frac{b_r^2}{2} (k_q l - \alpha_N^2 EI_x) - (-1) (-\alpha_N EI_x \sin(\alpha_N l)) (k_q l - \alpha_N^2 EI_x) - \frac{k_q}{\alpha_N} \sin(\alpha_N l) \cos(\alpha_N l) k_M \frac{b_r^2}{2} = 0$$

Виносимо за дужки $\sin(\alpha_N l)$.

$$\begin{vmatrix} \frac{k_q}{\alpha_N^2 EI_x} \left[1 - \cos(\alpha_N l) \right] & \cos(\alpha_N l) & -1 \\ \frac{k_q}{\alpha_N} \sin(\alpha_N l) & -\alpha_N EI_{x0} \sin(\alpha_N l) & k_M \frac{b_r^2}{2} \\ \left(k_q l - \alpha_N^2 EI_x \right) & 0 & k_M \frac{b_r^2}{2} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Загальний критерій стійкості стрижня при пружному защемленні верхньої опри і шарнірно опертому нижнього кінця матиме остаточно такий запис трансцендентного рівняння.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_N l) k_M \frac{b_r^2}{2} \left\{ -\frac{k_q}{\alpha_N} + \operatorname{ctg}(\alpha_N l) \left(k_q l - \alpha_N^2 EI_x \right) + \left(-k_q l + \alpha_N^2 EI_{x0} \right) \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \right\} &= 0 \\ \sin(\alpha_N l) k_M \frac{b_r^2}{2} \left\{ -\frac{k_q}{\alpha_N} + \operatorname{ctg}(\alpha_N l) \left(k_q l - \alpha_N^2 EI_x \right) - \left(k_q l - \alpha_N^2 EI_{x0} \right) \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \right\} &= 0 \\ \sin(\alpha_N l) \frac{k_M b_r^2}{2} \frac{k_q}{\alpha_N} \left\{ -1 + \left(\alpha_N l - \frac{\alpha_N^3 EI_x}{k_q} \right) \left[\operatorname{ctg}(\alpha_N l) - \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \right] \right\} &= 0 \\ \sin(\alpha_N l) \frac{k_M b_r^2}{2} \left\{ -\frac{k_q}{\alpha_N} + \left(k_q l - \alpha_N^2 EI_x \right) \left[\operatorname{ctg}(\alpha_N l) - \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \right] \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Випадок 1, тест1. Шарнірно обертий стрижень $k_M = 0$, $k_q \rightarrow \infty$ (рис. 2,а).

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_N l) k_M \frac{b_r^2}{2} \left\{ -\frac{k_q}{\alpha_N} + \operatorname{ctg}(\alpha_N l) \left(k_q l - \alpha_N^2 EI_x \right) + \left(-k_q l + \alpha_N^2 EI_{x0} \right) \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \right\} &= 0 \\ \sin(\alpha_N l) &= 0 \rightarrow \alpha_N l = \pi \end{aligned} \quad (9)$$

Отримано традиційний критерій стійкості шарнірно-опертого стрижня [1].

Випадок 2, тест 2. Стрижень шарнірно обертий нижнім кінцем і жорстко защемлений на верхніх вільних котках $k_M \rightarrow \infty$, $k_q = 0$ (рис. 2,б).

$$\sin(\alpha_N l) \frac{k_M b_r^2}{2} \left\{ -\frac{k_q}{\alpha_N} + (k_q l - \alpha_N^2 EI_x) \left[\operatorname{ctg}(\alpha_N l) - \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \right] \right\} = 0 \quad (10)$$

$$\sin(\alpha_N l) \frac{k_M b_r^2}{2} \alpha_N^2 EI_x \operatorname{ctg}(\alpha_N l) = 0 \rightarrow \cos(\alpha_N l) = 0 \rightarrow \alpha_N l = \pi / 2$$

Отримано традиційний критерій стійкості з однією шарнірною опорою інший кінець жорстко защемлений на вільних котках, що аналогічно консольно-защемленому стрижню [1,2].

Випадок 3, тест 3. Стрижень шарнірно обертий нижнім кінцем і жорстко защемлений на верхній опорі $k_M \rightarrow \infty$ $k_q \rightarrow \infty$ (рис. 2,в).

$$k_M \frac{b_r^2}{2} k_q l \left\{ -\frac{1}{\alpha_N l} \sin(\alpha_N l) + \cos(\alpha_N l) \left(1 - \frac{\alpha_N^2 EI_x}{k_q l} \right) \right\} = 0$$

$$-\frac{1}{\alpha_N l} \sin(\alpha_N l) + \cos(\alpha_N l) \left(1 - \frac{\alpha_N^2 EI_x}{k_q l} \right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow k_q \rightarrow \infty \rightarrow \frac{\cos(\alpha_N l)}{\alpha_N l} \left\{ -\operatorname{tg}(\alpha_N l) + \alpha_N l \right\} = 0$$

$$-\operatorname{tg}(\alpha_N l) + \alpha_N l = 0 \quad (11)$$

Отримано традиційний критерій стійкості з однією шарнірною опорою і жорстко защемленим кінцем [1,2].

Випадок 4, тест 4. Стрижень шарнірно опертий нижнім кінцем і пружно защемлений на вільних котках опори: $k_M \neq 0$ $k_q = 0$ (рис. 2,г).

$$k_q = 0 \rightarrow \sin(\alpha_N l) k_M \frac{b_r^2}{2} \alpha_N^2 EI_{x0} \left\{ -\operatorname{ctg}(\alpha_N l) + \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \right\} = 0$$

$$k_M \frac{b_r^2}{2} \alpha_N^2 EI_{x0} \cos(\alpha_N l) \left\{ -1 + \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \operatorname{tg}(\alpha_N l) \right\} = 0$$

$$\cos(\alpha_N l) \left\{ -1 + \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \operatorname{tg}(\alpha_N l) \right\} = 0 \quad (12)$$

Критерій (11) співпадає з критерієм, отриманим у роботі [2,7].

Випадок 5, тест 5. Стрижень шарнірно обертий нижнім кінцем і пружно защемлений, горизонтальні переміщення відсутні $k_M \neq 0$ $k_q \rightarrow \infty$ (рис.2,д).

$$\sin(\alpha_N l) \frac{k_M b_r^2}{2} \frac{k_q}{\alpha_N} \left\{ -1 + \left(\alpha_N l - \frac{\alpha_N^3 EI_x}{k_q} \right) \left[\operatorname{ctg}(\alpha_N l) - \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \right] \right\} = 0$$

$$\frac{k_M b_r^2}{2} \frac{k_q}{\alpha_N} \left\{ -\sin(\alpha_N l) + \alpha_N l \left[\cos(\alpha_N l) - \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \sin(\alpha_N l) \right] \right\} = 0$$

$$\frac{k_M b_r^2}{2} \frac{k_q}{\alpha_N} \cos(\alpha_N l) \left\{ -\operatorname{tg}(\alpha_N l) + \alpha_N l \left[1 - \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \operatorname{tg}(\alpha_N l) \right] \right\} = 0 \quad (12.a)$$

$$-\operatorname{tg}(\alpha_N l) + \alpha_N l \left[1 - \frac{2\alpha_N EI_{x0}}{k_M b_r^2} \operatorname{tg}(\alpha_N l) \right] = 0. \quad (12.б)$$

Критерій (12) співпадає з критерієм отриманим у роботі [2,7].

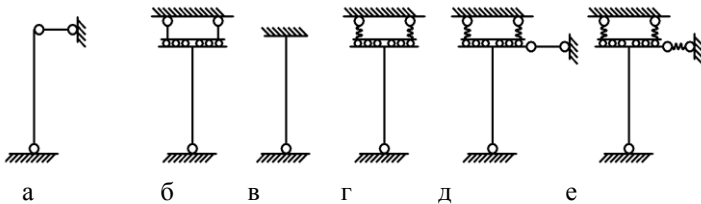


Рис.2. Випадки закріплення опор: а) випадок 1; б) випадок 2; в) випадок 3; г) випадок 4; д) випадок 5; е) загальний випадок

Висновок. Виведений загальний критерій (8) втрати стійкості стержня з шарнірно закріпленим нижнім кінцем та пружно закріпленого на верхньому кінці при можливості горизонтальних переміщень і куту повороту защемленої опори в окремих розглянутих випадках співпадає з критеріями стійкості отриманими іншими авторами. Тестові задачі показують правильність отриманого критерію.

1. Timoshenko S.P., Gere J.M., 1961. Theory of Elastic Stability, McGraw Hill Kogakusha Ltd., New York. 2. Баженов В.А. Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії / В.А. Баженов, Ю.В. Ворона, А.В. Перельмутер. – К.: Каравела, 2016. – 428 с. 3. Киселев В.А. Строительная механика: Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений 3-е изд., испр. и доп. — М.: Стройиздат, 1980. — 616 с. 4. Bilyk S., 2006. The peculiarities of buckling and strength analysis of

frame elements of I-shaped cross-section with variable web height. Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures. Proceeding of the XI international conference on metal structures (ICMS-2006), Pzeszow, Poland, 21-23 June, 144-145. **5.** Bilyk S., 2016. Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data/ S.Bilyk // Underwater technologies. Industrial and civil engineering. 2016. Vol. 04, 89-96. **6.** Білик С. І. Рациональні сталеві каркаси малоенергоємних будівель із двотаврів змінного перерізу : дис. доктора. техн. наук : 05.23.01 /С.І. Білик – Київ, 2008. – 460 с. **7.** Снитко Н.К. Расчет сжато-изогнутых стержней. Проект и стандарт, 1938, № 1, с.28-31. **8.** Білик С.І. Залишкові напруження в сталевих холодно-гнутих швелерах / Білик С.І., Білик А.С., Усенко М.В., Куземко В.В., Нужний В.В. // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№61. - Дн-вск., ПГАСА, 2011.-С.43-49. **9.** Білик С.І. Білик А.С. Коефіцієнт стійкості центрально-стиснутих сталевих елементів з урахуванням початкових деформацій та геометричних недосконалостей / Білик С.І., Білик А.С.// Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№82. - Дн-вск., ПГАСА, 2015.-С.32-37. **10.** Білик С.І. Білик А.С., Усенко М.В., Золотопольський О.Є. Стійкість холодногнутих швелерів з урахуванням пластичних властивостей мало вуглецевих сталей //Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М.Шимановського. Вип.7. – К.: Вид-во «Сталь», 2011. – С.26-35. **11.** Бутенко Ю.И. (ред.) Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. – Ю.И. Бутенко К.:Вища школа, 1984 . –328с. **12.** Білик С.І. Порівняння о місцевої стійкості стінок двотаврових балок за ДБН В.2.6-198-2014 і Єврокодом 3 (ДСТУ-Н Б EN 1993-1-1:2010) при пружній роботі сталі/ С.І. Білик, Л.І. Лавриненко, Н. Альтайе // Будівельні конструкції. Теорія і практика. Зб. наук. пр. Вип. 1. – Київ. МОН України, КНУБ, 2017. – С. 36–47. **13.** Білик С.І. Теоретичне порівняння фактора стійкості і коефіцієнта поздовжнього згину центрально-стиснутих сталевих колон з урахуванням початкових деформацій та вигинів//Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського. Вип. 15. – К. : Вид-во «Сталь», 2015. – С. 48-61.