

# Аналіз існуючих методик розрахунку панелей з перехресно-клеєної деревини за другим граничним станом

Денис Михайловський<sup>1</sup>, Андрій Комар<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури  
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037

<sup>1</sup> demyh.ubp@gmail.com, orcid.org/0000-0002-7404-4757

<sup>2</sup>komar.a.ubp@gmail.com

DOI: 10.32347/2522-4182.5.2019.24-31

**Анотація.** Зведення висотних будівель з панелей із перехресно-клеєної деревини набуває все більшого розповсюдження в усьому світі. Об'єми виготовлення панелей з перехресно-клеєної деревини за останні десять років зросли більше ніж в двічі. Однак, враховуючи досить малий, в порівнянні з іншими традиційними конструкційними матеріалами, досвід застосування цих панелей, методика їх розрахунку потребує подальшого розвитку і удосконалення. У вітчизняних нормах проектування як і у навчально-методичній літературі не міститься жодних даних щодо особливостей розрахунку панелей з перехресно-клеєної деревини.

В цій статті розглянуто наявні в світовій практиці методики розрахунку панелей з перехресно-клеєної деревини. Проведено чисельні дослідження і аналіз наявних методик для трьох, п'яти та семи шарових панелей різних прольотів під дією рівномірно розподіленого навантаження різної інтенсивності.

За результатом проведеного аналізу наявних в світовій практиці методик розрахунку панелей з перехресно-клеєної деревини за другим граничним станом, визначено діапазон їх застосування для різних прольотів та для різних рівнів інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження.

**Ключові слова.** Перехресно-клеєна деревина, другий граничний стан, панелі з перехресно-клеєної деревини, напружено-деформований стан.



**Денис Михайловський**  
доцент кафедри металевих та  
дерев'яних конструкцій  
к.т.н., доц.



**Андрій Комар**  
інженер кафедри металевих та  
дерев'яних конструкцій

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Панелі з перехресно-клеєної деревини (ППКД), більш відомі в світовій практиці як панелі із CLT (скорочено від англ. - cross laminated timber) набувають все ширшого застосування завдяки своїм високим міцнісним та архітектурно-естетичним властивостям [1, 2]. Перехресно-клеєна деревини (ПКД) - це конструкційний матеріал, одержаний в результаті склеювання під тиском розташованих взаємно перпендикулярно ламелей – дощок, можливо навіть з різних класів міцності і навіть порід деревини з вологістю 8-12%. ППКД як правило складаються з трьох, п'яти або семи шарів (рис. 1), в залежності від проектних вимог (навантаження, прольот тощо). Зазвичай зовнішні шари ППКД виготовляються з більш міцної деревини і розташовуються вздовж елементу для панелей перекриття і по висоті, - для стінових панелей.

ППКД використовують в якості несучих стін та плит перекриття і покриття в мало- та бага-

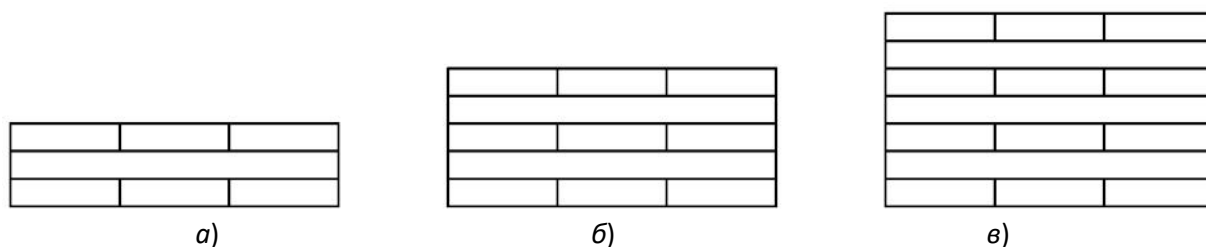
топоверхових будинках різноманітного призначення [3, 4].

Слід відзначити, що враховуючи досить малий, в порівнянні з іншими традиційними конструкційними матеріалами, досвід застосування цих панелей, методика їх розрахунку потребує подальшого розвитку і удосконалення. У вітчизняних нормах проектування як і у навчально-методичній літературі не міститься жодних даних щодо особливостей розрахунку панелей з перехресно-клеєної деревини.

#### АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Значний внесок в методику проектування та розрахунку ПКП внесли відомі Європейські вчені: Blass H.J. [5], Hofstetter K. [6], Schickhofer G. [7] та інші.

В світовій практиці існує чотири методики розрахунку ППКД за другим граничним станом або експлуатаційною придатністю [8, 9]: балочна теорія Тимошенко;  $\gamma$ -метод; композитний метод; теорія Крейзінгера.



**Рис.1.** Загальний вигляд поперечного перерізу панелі з перехресно-клеєної деревини: *a* – трьох шарової; *b* – п'яти шарової; *v* – семи шарової.

**Fig.1.** General view of the cross-section of the panel cross laminated timber: *a* – three layers; *b* – five layers; *v* – seven layers.

$\gamma$ -метод рекомендується використовувати для розрахунку простих механічно з'єднаних балок.

Прогин панелі за  $\gamma$ -методом задається як функція лише від моментів:

$$w = \int \frac{M \bar{M}}{EI_{ef}} dx. \quad (5)$$

Формула (5) при рівномірно розподіленому навантаженні набуває вигляду:

$$w = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot (EI)_{ef}}. \quad (6)$$

Використовуючи коефіцієнти  $\gamma$  в визначенні ефективної згинальної жорсткості  $(EI)_{ef}$  можна розрахувати механічно з'єднані балки (складена балка з'єднана за допомогою шпонок або болтів тощо) від трьох і більше окремих шарів за допомогою рівняння (7).

Теорія Тимошенко застосовується для визначення прогинів плит перекриття. Прогин панелі задається як функція від моментів та сил зсуву:

$$w = \int \frac{M \bar{M}}{EI_{net}} dx + \int \frac{V \bar{V}}{GA_s} dx. \quad (1)$$

Формула (1) при рівномірно розподіленому навантаженні набуває вигляду:

$$w = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I_{net}} + \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot G \cdot A_s}. \quad (2)$$

в якій:  $q$  – експлуатаційне рівномірно розподілене навантаження;  $L$  – прольот плити;  $EI_{net}$  – згинна жорсткість що визначається за формулою (3);  $GA_s$  – зсувна жорсткість, що визначається за формулою (4).

$$E \cdot I_{net} = \sum_{i=1}^n E_i I_i + E_i A_i a_i^2. \quad (3)$$

$$G \cdot A_s = k \sum_{i=1}^n G_i b_i t_i. \quad (4)$$

$$(E \cdot I)_{ef} = \sum_{i=1}^3 \left( \underbrace{E_i \cdot I_i}_A + \gamma_i \cdot \underbrace{E_i \cdot A_i \cdot a_i^2}_B \right). \quad (7)$$

Коефіцієнти  $\gamma_i$  враховують зсувні деформації в напівжорсткому з'єднанні окремих складових (рис. 2). Якщо маємо справу з складеною балкою з окремих дерев'яних елементів коефіцієнт  $\gamma = 0$ , а частина  $B$  у формулі 7 перетворюється в нуль. В цьому випадку загальна ефективна жорсткість враховує тільки жорсткість на згин окремих елементів складеної балки (рис. 2, в). Для балки з суцільної або клеєної деревини (монолітний поперечний переріз) коефіцієнт  $\gamma = 1$  (рис. 2, а). Для складених балок з з'єднанням що має певну податливість (механічні з'єднання за допомогою шпонок, стяжних болтів тощо) коефіцієнт  $0 < \gamma \leq 1$  (рис. 2, б).

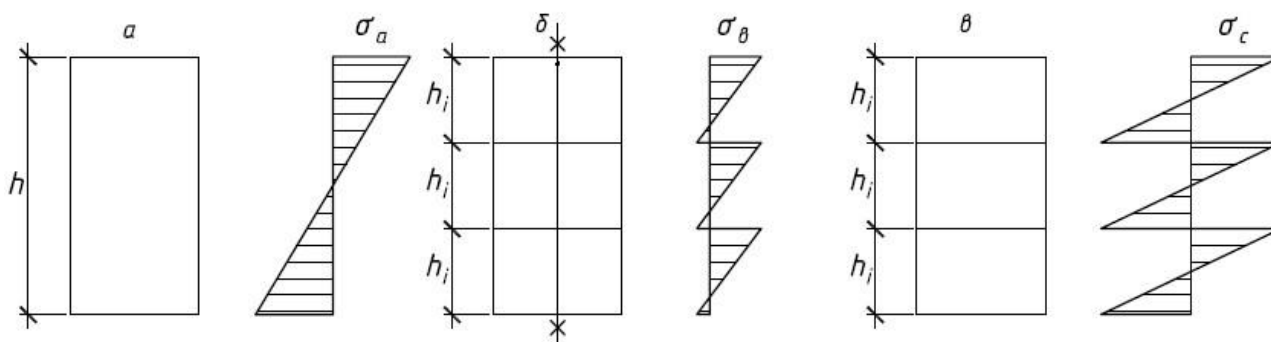
Саме останньому варіанту найбільше підходить робота ППКД.

Даний метод є дуже обмежений у використанні і забезпечує точне рішення диференційного рівняння лише для шарнірно обпертої панелі із рівномірно розподіленим навантаженням [10]. Також  $\gamma$ -метод не враховує зсувні деформації окремих шарів і відповідно точне рішення можна отримати для балок із прольотами настільки великим, що зсувні деформації стають мізерними. Проте даний метод є досить точний для співвідношення  $I_{ef}/I_{net}$  яке наближається до одиниці.

Композитний метод описаний в [8].

Прогин панелі за композитним методом задаються як функція лише від моментів з введенням коефіцієнту  $k_1$  до згинної жорсткості:

$$w = \int \frac{M \bar{M}}{EI \cdot k_1} dx. \quad (8)$$



**Рис.2.** Епюри нормальних напружень: *a* - цілого поперечного перерізу; *б* - поперечного перерізу, складеного із трьох окремих елементів з'єднаних за допомогою напівжорсткого з'єднання; *в* - поперечний переріз, складений за допомогою трьох вільно накладених елементів.

**Fig.2.** Diagrams of normal stresses: *a* - whole cross-section; *б* - cross-section made up of three separate elements connected by means of a semi-rigid connection; *в* - cross-section made up of three freely superimposed elements.

Метод Крейзінгера (метод аналогії зсуву) дуже схожий до методу Тимошенко з однією відмінністю, введенням коефіцієнту корекції зсуву. Він включений до національного додатку до EC5 Великої Британії [9].

Прогин панелі як і в теорії Тимошенко задається як функція від моментів та сил зсуву:

$$w = \int \frac{M \bar{M}}{EI_{net}} dx + \int \frac{V \bar{V} \cdot k}{GA_{ef}} dx. \quad (12)$$

Концепція розрахунку полягає у переході реальної ППКД як до складеної балки, що включає в себе декілька механічно – з'єднаних

Формула (8) при рівномірно розподіленому навантаженні набуває вигляду:

$$w = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I \cdot k_1}. \quad (9)$$

Формула (8) при зосередженому у вигляді сили навантаженні набуває вигляду:

$$w = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I \cdot k_1}. \quad (10)$$

В усіх формулах коефіцієнт  $k_1$  для плит з зовнішніми шарами вздовж основного прольоту визначається за формулою:

$$k_1 = 1 - \left( 1 - \frac{E_{90}}{E_0} \right) \cdot \frac{a_{m-2}^3 - a_{m-4}^3 + \dots \pm a_1^3}{a_m^3}. \quad (11)$$

Даний метод підходить для розрахунку елементів з будь-якою конфігурацією навантаження. Жорсткість при цьому не залежить від прольоту та умов закріплення.

елементів в єдиний фіктивний гомогенізований елемент (рис. 3).

Зсувні деформації окремих елементів визначаються в залежності від:  $(GA)_A = S_A = \infty$  - частина із нескінченною осовою жорсткістю;  $(GA)_B = S_B$  - жорсткість зсуву компоненту *B*.

Формула (12) при рівномірно розподіленому навантаженні набуває вигляду:

$$w = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I_{net}} + \frac{q \cdot L^2 \cdot k}{8 \cdot G \cdot A_{ef}}. \quad (13)$$

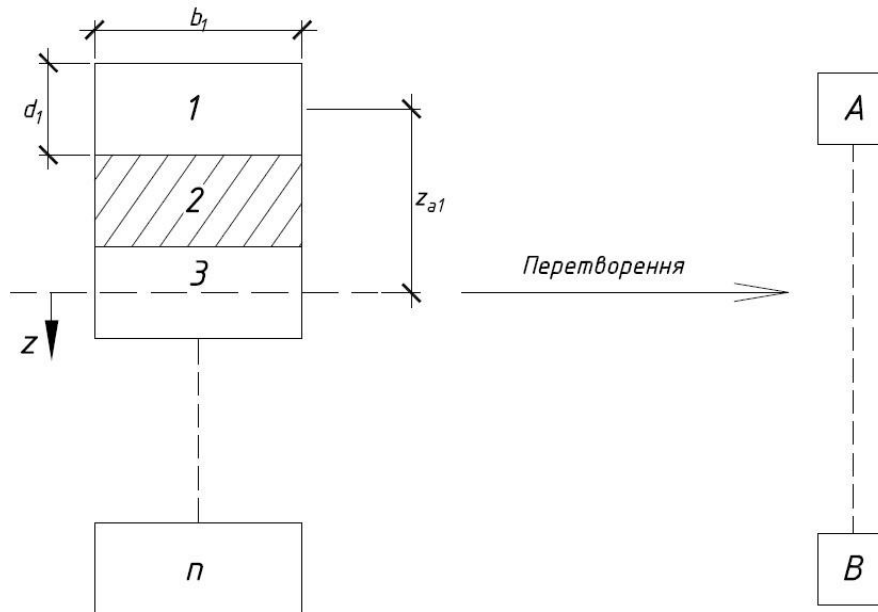
в якій:  $q$  – експлуатаційне рівномірно розподілене навантаження;  $L$  – прольот плити;  $EI_{net}$  – згинна жорсткість;  $GA_{ef}$  – зсувна жорсткість.

При навантаженні зосередженою силою формула (12) набуває вигляду:

$$w = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_{net}} + \frac{P \cdot L \cdot k}{4 \cdot G \cdot A_{ef}}. \quad (14)$$

В формулах (13) та (14) зсувна жорсткість визначається за формулою (15):

$$G \cdot A_{ef} = \frac{b \cdot a^2}{\frac{h_1}{2G_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{h_i}{G_i} + \frac{h_n}{2G_n}}, \quad (15)$$



**Рис.3.** Перетворення складеного перерізу у фіктивний елемент.

**Fig.3.** Convert composite section in the dummy element.

## ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

В попередньому параграфі описані існуючі методики розрахунку ППКД за другим граничним станом. Фактична різниця цих методик полягає в визначенні приведених геометричних характеристик плит та врахуванні зсуву.

$$\text{де } a = h_{total} - \frac{h_1}{2} - \frac{h_n}{2}.$$

Даний метод підходить для панелей під різним навантаженням, з різною кількістю шарів та при прольотах більше 8м. Причому рекомендується приймати коефіцієнт  $k = 1,2$  для прямокутних перерізів.

Нижче в табличній формі представлено порівняння існуючих методик для плит завантажених рівномірно розподіленим навантаженням (табл. 1).

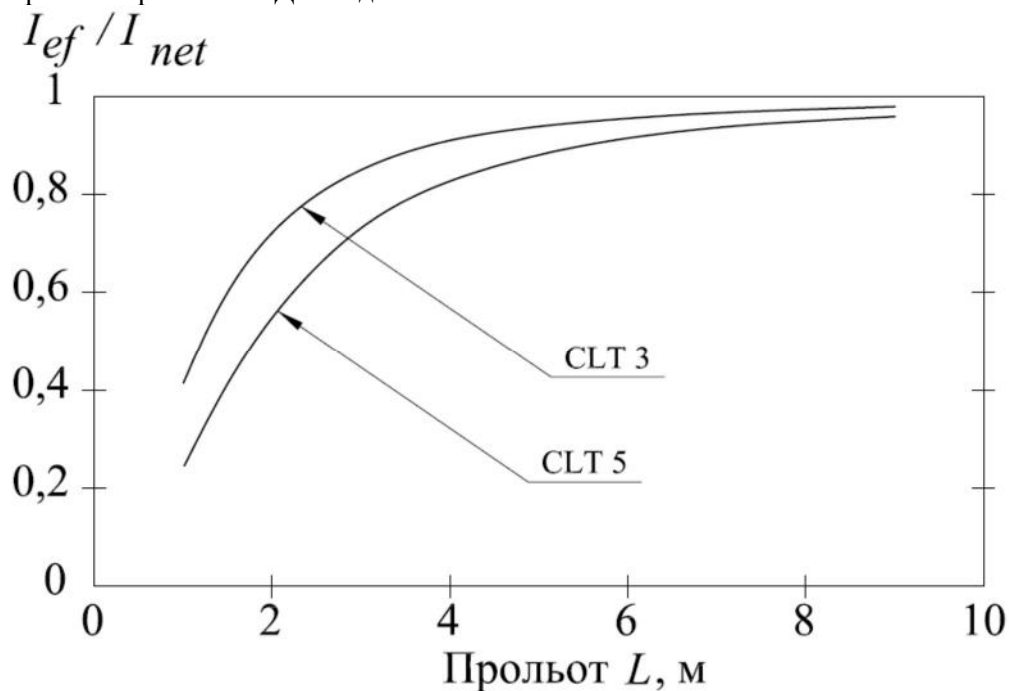
**Табл. 1.** Порівняльна таблиця існуючих методик розрахунку ППКД завантажених рівномірно розподіленим навантаженням

**Table 1.** Comparison table of existing methods for calculating CLT panels loaded evenly distributed load

1	Значення прогину, $w$	$EI_{net}, EI_{ef}, EI$	$GA_s, GA_{ef}$
2	3	4	
балочна теорія Тимошенко	$\frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I_{net}} + \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot G \cdot A_s}$	$\sum_{i=1}^n E_i I_i + E_i A_i a_i^2$	$k \sum_{i=1}^n G_i b_i t_i$
$\gamma$ - метод	$\frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I_{ef}}$	$\sum_{i=1}^n (E_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i^2)$	
Композитний метод	$\frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I \cdot k_1}$	$\sum_{i=1}^n E_i I_i + E_i A_i a_i^2$	
теорія Крейзі-нґера	$\frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I_{net}} + \frac{q \cdot L^2 \cdot k}{8 \cdot G \cdot A_{ef}}$	$\sum_{i=1}^n E_i I_i + E_i A_i a_i^2$	$\frac{b \cdot a^2}{\frac{h_1}{2G_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{h_i}{G_i} + \frac{h_n}{2G_n}}$

Для  $\gamma$  - методу, додатково проведено чисельні дослідження максимально допустимого прольоту двох типів ППКД в залежності від співвідношення  $I_{ef} / I_{net}$ . Критерієм який обмежує прольот елементу прийнята величина граничного відносного прогину 1/200. Для досліджень були прийняті наступні типи панелей: CLT 3 – трьох шарова ППКД з однакових

дошок завтовшки 40 мм; CLT 5 – п'яти шарова ППКД з однакових дошок завтовшки 40 мм. Результати проведених досліджень представлені на рис. 4. Як бачимо співвідношення  $I_{ef} / I_{net}$  більше впливає на панелі з меншою кількістю шарів дошок.



**Рис.4.** Графік порівняння ППКД в залежності від прольоту  $L$  та співвідношення  $I_{ef} / I_{net}$ .

**Fig.4.** Graph comparison of CLT panels depending on span  $L$  and  $I_{ef} / I_{net}$  ratio.

Для аналізу схожості методик наведених вище проведені чисельні дослідження змінюючи геометричні параметри плит (кількість шарів – товщину поперечного перерізу, розрахунковий прольот) та навантаження. Всі шари ППКД прийняті завтовшки 20 мм з деревини класу міцності С24, з наступними характеристиками матеріалу:  $E_{0,mean} = 11000$  МПа,  $E_{90,mean}$

$= 3700$  МПа,  $G_{mean} = 690$  МПа.

Дослідження стосувались 3-х, 5-ти та 7-ми шарових плит, шириною 1м, прольотами 3, 6 і 9 м, з рівномірно розподіленим по площі навантаженням  $1,5$  кН/м<sup>2</sup> та  $5,0$  кН/м<sup>2</sup>.

Результати розрахунків представлені в табличній формі (табл. 2, 3, 4).

**Табл. 2.** Значення прогинів для три шарових ППКД при рівномірно розподіленому навантаженні  
**Table 2.** Deformation values for three-layer CLT panels at evenly distributed load

Навантаження	1,5 кН/м <sup>2</sup>			5 кН/м <sup>2</sup>		
Прольот, м	3	6	9	3	6	9
	Значення прогину					
Показник	w, мм	w, мм	w, мм	w, мм	w, мм	w, мм
1	2	3	4	5	6	7
Балочна теорія Тимошенко	9,9	153,0	769,9	30,1	466,1	2345,7
γ - метод	9,5	152,4	766,7	29,0	461,9	2336,1
Композитний метод	9,5	151,3	766,2	28,8	461,1	2334,4
Теорія Крейзінгера	9,7	152,4	768,5	29,6	464,3	2341,5

**Табл. 3.** Значення прогинів для п'яти шарових ППКД при рівномірно розподіленому навантаженні  
**Table 3.** Deformation values for five-layer CLT panels at evenly distributed load

Навантаження	1,5 кН/м <sup>2</sup>			5 кН/м <sup>2</sup>		
Прольот, м	3	6	9	3	6	9
	Значення прогину					
Показник	w, мм	w, мм	w, мм	w, мм	w, мм	w, мм
1	2	3	4	5	6	7
Балочна теорія Тимошенко	2,9	44,2	220,3	8,5	127,24	636,0
γ - метод	2,7	43,1	217,9	7,8	124,6	636,0
Композитний метод	2,9	45,8	232,0	8,2	132,6	671,0
Теорія Крейзінгера	2,8	43,6	218,98	8,2	126,0	633,2

**Табл. 4.** Значення прогинів для семи шарових ППКД при рівномірно розподіленому навантаженні  
**Table 4.** Deformation values for seven-layer CLT panels at evenly distributed load

Навантаження	1,5 кН/м <sup>2</sup>			5 кН/м <sup>2</sup>		
Прольот, м	3	6	9	3	6	9
	Значення прогину					
Показник	w, мм	w, мм	w, мм	w, мм	w, мм	w, мм
1	2	3	4	5	6	7
Балочна теорія Тимошенко	1,3	19,5	96,6	3,2	53,7	266,4
γ - метод	1,2	18,8	95,1	3,3	51,9	262,3
Композитний метод	1,4	22,9	115,91	3,9	63,2	319,8
Теорія Крейзінгера	1,3	19,2	95,910	3,5	52,9	264,6

За проведеним аналізом одержаних результатів слід зазначити, що всі існуючі і прийняті для порівняння методики дають дуже близькі значення. Для тришарових панелей різниця в методах становить до 7% при малих прольотах і зменшується до 4% при збільшенні прольоту ППКД. Для п'ятишарових панелей також спостерігається найбільше розходження при малих прольотах до 10%, зі збільшенням прольоту розбіжність результатів становить вже 8%. Для семишарових панелей розбіжність в результатах одержаних за композитним методом і іншими наведеними вище зростає до 19%, однак слід зазначити, що скоріш за все методика композитного методу погано враховує особливості роботи семишарових ППКД. Якщо відкинути композитний метод, то при розрахунку прогинів за різними методиками різниця становить від 3-х до 5-ти % зі збільшенням пов'язаним зі збільшенням прольоту панелі.

Найбільш простим і таким що дає гарні результати розрахунку за будь якого складу ППКД при будь-яких прольотах і навантаженнях можна визнати метод Крейзінгера.

#### ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Як видно з проведених чисельних досліджень всі чотири методики розрахунку ППКД за другим граничним станом мають певні розбіжності.

Метод Тимошенко, γ-метод та композитний метод аналогії зсуву розроблені для розрахунку механічно – з'єднаних складених балок

(на шпонках, болтах тощо), і для розрахунку перехресно клеєдощатих панелей можуть застосовуватися з певними припущеннями. Розрахунок можна проводити тільки ототожнюючи напівжорстке з'єднання з поперечними шарами ППКД.

Всі чотири відомі на сьогодні в світовій практиці методики розрахунку ППКД за другим граничним станом мають певні обмеження в залежності від прольоту, кількості шарів панелей та виду прикладеного навантаження. На сьогодні існує нагальна потреба в розробці сучасної універсальної інженерної методики розрахунку ППКД як окремих елементів так і будівель з їх використанням в цілому.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. **Downing, B., Spickler K.** Timber tower research project. 2013. Chicago: Softwood Lumber Board, 72 p.
2. **Harch B.J.L.** The investigation into the optimisation of cross laminated timber panels for use in the Australia building industry. 2010. Australia: Queensland University of Technology, 119 p.
3. **Ashtari S.** In-plane stiffness of cross-laminated timber floors. 2012. Master Thesis. Vancouver: The University of British Columbia, 146 p.
4. **Joseph F. Miller.** Design and analysis of mechanically laminated timber beams using shear keys. 2009. USA, Michigan: Michigan technological University, 211 p.
5. **Blass H.J., Görlacher R.** Bemessung im

Holzbau:rettsperrholz-Berechnungsgrundlagen. Holzbau-Kalender. Bruder-Verlag, Karlsruhe. 2003. pp. 580-598.

6. **Stürzenbecher R., Hofstetter K., Eberhardsteiner J.** Structural design of Cross Laminated Timber (CLT) by advanced plate theories. Composites Science and Technology, 70(9). 2010. pp. 1368-1379.
7. **Bogensperger T., Moosbrugger T., Schickhofer G.** New test configuration for CLT-wall elements under shear load. CIB-W18 Timber Engineering. Karlsruhe, Germany. 2007. pp. 21-40.
8. The CLT Handbook. CLT structures – facts and planning. Föreningen Sveriges Skogsindustrier. Stockholm. 2019. 187 p.
9. **Blab H.J., Sandhaas C.** Timber engineering principles for design. KIT Scientific Publishing. 2017. 658 p.
10. **Ahvenainen J., Sousa H.S.** Multistorey building made of CLT: How to design it right?. In: Seminário: “Construir em madeira”, Guimarães, Portugal, 2016. pp. 95-118.

#### REFERENCES

1. **Downing, B., Spickler K.** Timber tower research project. 2013. Chicago: Softwood Lumber Board, 72 p.
2. **Harch B.J.L.** The investigation into the optimisation of cross laminated timber panels for use in the Australia building industry. 2010. Australia: Queensland University of Technology, 119 p.
3. **Ashtari S.** In-plane stiffness of cross-laminated timber floors. 2012. Master Thesis. Vancouver: The University of British Columbia, 146 p.
4. **Joseph F. Miller.** Design and analysis of mechanically laminated timber beams using shear keys. 2009. USA, Michigan: Michigan technological University, 211 p.
5. **Blass H.J., Görlacher R.** Bemessung im Holzbau: Brettsperrholz-Berechnungsgrundlagen. Holzbau-Kalender. Bruder-Verlag, Karlsruhe. 2003. pp. 580-598.
6. **Stürzenbecher R., Hofstetter K., Eberhardsteiner J.** Structural design of Cross Laminated Timber (CLT) by advanced plate theories. Composites Science and Technology, 70(9). 2010. pp. 1368-1379.
7. **Bogensperger T., Moosbrugger T., Schickhofer G.** New test configuration for CLT-wall elements under shear load. CIB-W18 Timber Engineering. Karlsruhe, Germany. 2007. pp. 21-40.
8. The CLT Handbook. CLT structures – facts and

planning. Föreningen Sveriges Skogsindustrier. Stockholm. 2019. 187 p.

9. **Blab H.J., Sandhaas C.** Timber engineering principles for design. KIT Scientific Publishing. 2017. 658 p.
10. **Ahvenainen J., Sousa H.S.** Multistorey building made of CLT: How to design it right?. In: Seminário: “Construir em madeira”, Guimarães, Portugal, 2016. pp. 95-118.

#### Analysis of existing methods of calculation of panels of cross-laminated timber by the serviceability limit state

*Denis Mykhaylovskyi, Andriy Komar*

**Summary.** The erection of high-rise buildings from cross-laminated timber panels is becoming more widespread worldwide. The production of cross-laminated timber panels has more than doubled in the last ten years. However, given the relatively small, compared to other traditional structural materials, the experience of using these panels, the method of their calculation requires further development and improvement. The national standards of design, as well as in the educational and methodical literature, do not contain any data on the features of the calculation of panels made of cross-laminated timber.

This article describes the methods of calculating cross-laminated timber panels available in the world. Numerical studies and analysis of available techniques for three, five and seven layered panels of different spans were conducted under the action of evenly distributed load of varying intensity.

As a result of the analysis of the methods of calculating cross-laminated timber panels available in the world practice according to the serviceability limit state, the range of their application for different spans and for different levels of intensity of uniformly distributed load is determined.

**Key words.** Cross-laminated timber, serviceability limit state, panels of cross-laminated timber, stress-strain state.