

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОНСТРУКЦИЙ

Шмуклер В.С.

Харьковская национальная академия городского хозяйства

Резник П.А.

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры
г. Харьков, Украина

АННОТАЦИЯ: У роботі побудовано метод вирішення температурної задачі теорії конструкцій. У його основі лежить спеціальна ітераційна процедура, яка використовує на кожному кроці метод В.М. Майзеля. Наведено теоретичні основи метода, скінченоелементна модель конструкції, алгоритм реалізації.

АННОТАЦИЯ: В работе построен метод решения температурной задачи теории конструкций. В его основе лежит специальная итерационная процедура, использующая на каждом шаге метод В.М. Майзеля. Приведены теоретические основы метода, конечноэлементная модель конструкции, алгоритм реализации.

ABSTRACT: The method of solution temperature problem of the theory of structures is built. It is based on a special iterative procedure which uses at each step the method of V.M. Maizel. The theoretical bases of the procedure solution, mathematical model of the design, algorithm implementation are presented.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: температура, инварианты тензора деформаций и напряжений, плотность потенциальной энергии.

Решение температурной задачи теории конструкций представляет собой достаточно сложную и актуальную проблему, алгоритмы реализации которой еще далеки до совершенства. Процедуры, используемые в известных вычислительных комплексах, в основном, базируются на подходе С.П. Тимошенко, представляющим температурное воздействие в виде “дополнительной” нагрузки, либо на теореме Н.И. Мухелишвили,

устанавливающей связь между температурными напряжениями и дислокациями [1, 4, 5]. Анализ полученных решений (в особенности, для задачи огнестойкости) также указывает на целый ряд несоответствий и парадоксов количественного, а зачастую, качественного характера [7]. Перечисленное является поводом для поиска, отличной от традиционной, идеологии, фундамирующей методологию определения температурных перемещений и напряжений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть рассматривается соответствующим образом закрепленная, занимающая многосвязную область конструкция (тело), подверженная действию объемных и поверхностных нагрузок, а также температуры $T=T(x,y,z,t)$. Здесь x,y,z – координаты декартовой системы, а t – время. Материалы конструкции, в общем случае, физически нелинейны, изотропны, а их физико-механические параметры E (модуль деформаций 1-го рода) и ν (коэффициент поперечных деформаций) являются функциями температуры и времени. Считается, что для материалов известны диаграммы-изотермы-изохроны (рис. 1) [6, 8]. Известна также зависимость от температуры коэффициента температурной линейной деформации. Требуется найти перемещения и напряжения.

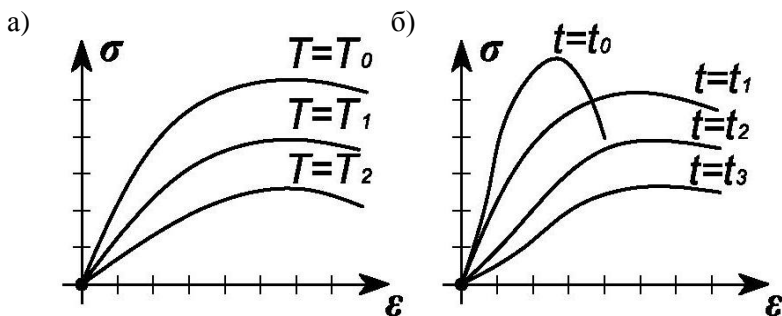


Рис. 1. Диаграммы "напряжения-деформации" для применяемых материалов: а) диаграммы-изотермы; б) диаграммы-изохроны

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Модель конструкции строится в конечноэлементной форме (рис. 2) [7].

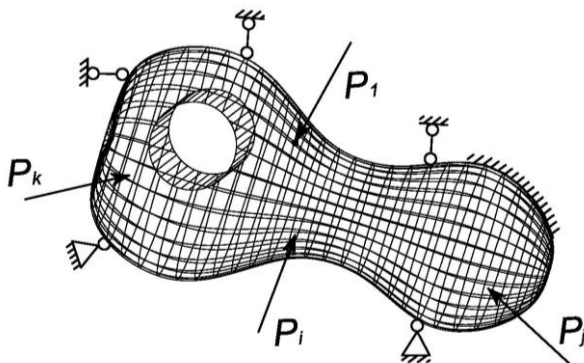


Рис. 2. Конечноэлементная модель конструкции

Далее в соответствии исходному физически нелинейному телу ставится некоторая физически линейная, но неоднородная среда, свойства которой зависят от распределения температуры и времени, т.е. в конечном итоге от координат:

$$\begin{aligned} E &= E[T(x, y, z), t], \\ \nu &= \nu[T(x, y, z), t]. \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве теоретической основы решения используется метод В.М. Майзеля, базирующийся на теореме взаимности Бетти-Максвелла [2, 3]. Суть метода сводится к следующему. Наряду с *нагретым* телом рассматривается точно такое же *ненагретое*. Решение сводится к статической задаче о *ненагретом* теле, находящимся под действием одной силы. Показано, что перемещение *нагретого* тела в заданной точке и по заданному направлению в точности равно перемещению *ненагретого* тела, нагруженного единичной силой в этом же направлении. При этом, данное решение определяется формулой [2]:

$$U(x, y, z, t) = \iiint_{(V)} \frac{\alpha E}{1-2\nu} \cdot T(x, y, z, t) \cdot I_{1\epsilon} dV = \iiint_{(V)} \alpha T(x, y, z, t) \cdot I_{1\sigma} dV, \quad (2)$$

где $U(x, y, z, t)$ – перемещение в точке с координатами x, y, z и в момент времени t , в направлении приложенной единичной силы;

$\alpha = \alpha(x, y, z, t)$ – коэффициент линейной температурной деформации;

V – объем, занятый телом;

$I_{1\varepsilon}$ – первый инвариант тензора деформаций;

$I_{1\sigma}$ – первый инвариант тензора напряжений.

Формула (2) охватывает всю проблему в наиболее общей постановке и пригодна для одного, двух и трехмерных тел, одно и многосвязных, свободных и закрепленных, с постоянными и переменными физико-механическими характеристиками, зависящими от температуры. В свою очередь, температурные поля могут быть любых типов, стационарные и нестационарные.

Определив по формуле (2) перемещение, его следует приложить к конструкции и найти от него все компоненты напряженно-деформированного состояния.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Задача решается методом последовательных приближений. По заданному стартовому температурному полю $T(x,y,z,t)$ и диаграммам-изотермам и диаграммам-изохронам назначаются физико-механические характеристики для каждого конечного элемента. Затем стандартным образом формируется решение задачи о загрузении тела единичной силой, приложенной в заданной точке:

$$\{u\}_j = [K]_j^{-1} \{P\}_j, \quad (3)$$

где $\{u\}_j$ – вектор перемещений;

$[K]_j$ – матрица жесткости системы;

$\{P\}_j = \{0, 0, P_i, 0, 0\}$ – вектор внешних нагрузок, содержащий только одну единичную силу;

i – номер узла, в котором приложена единичная сила;

j – номер итерации.

Далее в каждом элементе определяется первый инвариант тензора деформаций:

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (4)$$

либо, на основании закон Гука, первый инвариант тензора напряжений:

$$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (5)$$

Здесь $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z\}$ – вектор линейных деформаций;

$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z\}$ – вектор нормальных напряжений.

На следующем этапе по формуле (2) определяется температурное перемещение в заданной точке конструкции, а затем выполняется расчет системы на заданное перемещение. Определив все компоненты напряженно-деформированного состояния от заданного перемещения, определяются физико-механические характеристики конечных элементов для следующего шага [7]:

$$\begin{aligned} E_{j+1} &= E_j \cdot e_j \cdot e_{jn}^{-1} \\ \nu_{j+1} &= \nu_j \cdot e_j \cdot e_{jn}^{-1} \\ \alpha_{j+1} &= \alpha_j \cdot e_j \cdot e_{jn}^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где e_j – плотность энергии деформации (ПЭД) в i -том конечном элементе, определяется площадью диаграмм-изотерм и диаграмм-изохрон;

e_{jn} – нормируемое значение плотности энергии деформаций, формируемое в соответствии с принятым критерием предельного состояния.

В частности, нормируемая величина ПЭД может быть определена [7, 9]:

$$e_n = 0.5\chi_\varepsilon^2[(\chi_\varepsilon + 1)e_{nc} - (\chi_\varepsilon - 1)e_{nt}] - (1 - \chi_\varepsilon^2)e_{nsh}, \quad (7)$$

где $\chi_\varepsilon \in [-1; 1]$ – параметр Лоде-Надаи;

e_{nc} ; e_{nt} ; e_{nsh} – частные нормируемые значения ПЭД для одноосного сжатия, растяжения, сдвига. В случае линейного и упругого деформирования: $e_{nc} = 0.5R_c^2 E^{-1}$; $e_{nt} = 0.5R_t^2 E^{-1}$; $e_{nsh} = 0.625R_c R_t E^{-1}$, где R_c ; R_t – нормируемые напряжения на сжатие и растяжение.

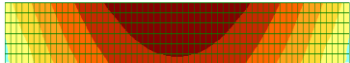
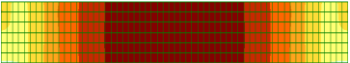
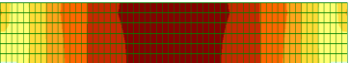
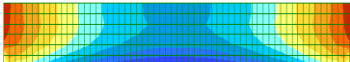


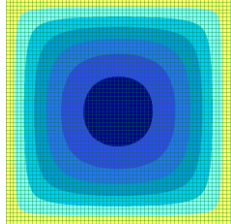
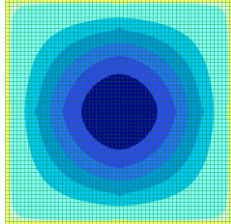
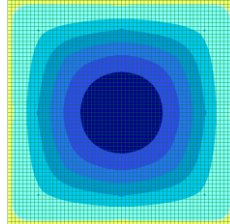
Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока найденное поле перемещений (напряжений) не совпадет на предыдущей и последующей итерациях с заданной точностью:

$$\max |u_{j+1} - u_j| \leq \varepsilon, \quad (8)$$

где ε – заданная точность.

Для проверки составленного алгоритма было решено несколько примеров. При этом, варьировалось количество узлов приложения температурного перемещения. Результаты, полученные предложенным методом, сопоставлены с результатами расчета этих же задач при использовании ПК «Лира». Проведенные расчеты иллюстрируются полями перемещений (табл. 1).

Таблица 1

	Поле перемещений		Максимальное расхождение, %	
	ПК «Лира»	Предложенный метод с приложением перемещений в		
Пример 1		I – 14 точках	II – 24 точках	I – 39.1 II – 12.2
				
Пример 2		I – 24 точках	II – 56 точках	I – 28.25 II – 14.18
				
Пример 3		I – 21 точке	II – 41 точке	I – 50.91 II – 28.61
				

Пример 1. Рассматривается шарнирно опертая бетонная 3-х метровая балка постоянного сечения ($b=150$ мм, $h=300$ мм). Бетон класса C20/25. Балка нагрета до постоянной температуры 500°C .

Пример 2. Рассматривается шарнирно опертая железобетонная 3-х метровая балка постоянного сечения ($b=150$ мм, $h=300$ мм). Бетон класса C20/25. Верхняя арматура $2\varnothing 12\text{A}400\text{C}$, представлена слоем в сечении толщиной 3 мм. Нижняя арматура $2\varnothing 16\text{A}400\text{C}$, представлена слоем в сечении толщиной 3,5 мм. Высота среднего (бетонного) слоя 232,5 мм. Распределение температуры по высоте сечения (сверху вниз: 20°C , 100°C , 200°C , 400°C , 600°C).

Пример 3. Рассматривается шарнирно опертая по контуру железобетонная плита высотой 200 м с размерами в плане $3\text{м}\times 3$ м. Бетон класса C20/25. Нижняя арматура $\varnothing 12\text{A}400\text{C}$ с шагом 200 мм по обоим осям, представлена слоем в сечении толщиной 3 мм. Высота среднего (бетонного) слоя 167 мм. Распределение температуры по высоте сечения (сверху вниз: 20°C , 100°C , 300°C , 600°C).

ВЫВОД

Предложенный метод открывает широкие возможности для решения нелинейных и линейных, стационарных и нестационарных температурных задач. Он физически прозрачен и логически последователен. Без каких-либо трудностей программные модули, составленные на основе данного метода, адаптируются к существующим вычислительным комплексам. Можно констатировать, что количество вычислительных операций метода, по меньшей мере, не превышает количество операций в известных алгоритмах. При этом, его комбинаторные возможности существенно шире и разнообразнее, чем упомянутые модификации соответствующих решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Городецкий А.С. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций / Городецкий А.С., Шмуклер В.С., Бондарев А.В. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2003. – 889 с.
2. Майзель В.М. Температурная задача теории упругости / Майзель В.М. – К.: АНУССР, 1951, – 150 с.
3. Новацкий В. Теория упругости / Новацкий В. – М.: МИР, 1975. – 872 с.
4. Тимошенко С.П. Теория упругости / Тимошенко С.П., Гудьер Дж. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

5. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мусхелишвили Н.И. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
6. Шмуклер В.С. К упрощению нелинейного расчета железобетонных элементов / Шмуклер В.С. // Бетон и железобетон в Украине. – 2012. – Вып. №4 – С. 17-20.
7. Шмуклер В.С. Каркасные системы облегченного типа / Шмуклер В.С., Климов Ю.А., Бурак Н.П. – Харьков: Золотые страницы, 2008. – 336 с.
8. Клованич С.Ф. Модель деформирования бетона при реальных воздействиях / Клованич С.Ф. // Бетон и железобетон в Украине. – 2011. – Вып. №5. – С.13-18.
9. Васильков Г.В. Эволюционная теория жизненного цикла механических систем: Теория сооружений / Васильков Г.В. – М.: ЛКИ, 2008. – 320 с.

Статья поступила в редакцию 25.02.2013г.