УДК 624.501

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРСКИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Асланов Л.Ф.

Азербайджанский архитектурно-строительный университет
г. Баку, Республика Азербайджан

АНОТАЦІЯ: Розглянуто проблеми математичного моделювання морських гравітаційних хвиль на поверхні рідини. Запропонована можливість складання та рішення диференційного рівняння потенціалів швидкостей гравітаційної морської хвилі на поверхні.

АННОТАЦИЯ: Рассмотрены проблемы математического моделирования морских гравитационных волн на поверхности жидкости. Предложена возможность составления и решения дифференциального уравнения потенциалов скоростей гравитационной морской волны на поверхности.

ABSTRACT: The problems of mathematical modeling of marine gravity waves on the surface of the liquid are considered. The possibility of drawing up and solve the differential equations of the gravitational potential rate of sea waves on the surface is offered.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Волна, гравитационные потенциалы скоростей, свайные фундаменты, морские сооружения.

**Цель работы** – теоретически изучить волновые процессы, влияющие на колебания морских сооружений и математически смоделировать эти явления.

## АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ

В настоящее время в Каспийском море строятся морские сооружения специалистами Азербайджана. При строительстве морских сооружений на свайных фундаментах встречаются многие виды морских волн, которые по-разному действуют на несущую способность этих свайных фундаментов. Поэтому для расчета и проектирования свайных фундаментов необходимо наиболее подробно проанализировать эти волновые процессы и дать оценку влияния на конструкцию свайных фундаментов, которые являются основанием морских сооружений. Эти волновые процессы приведены на рис. 1 (формы приняты условно).

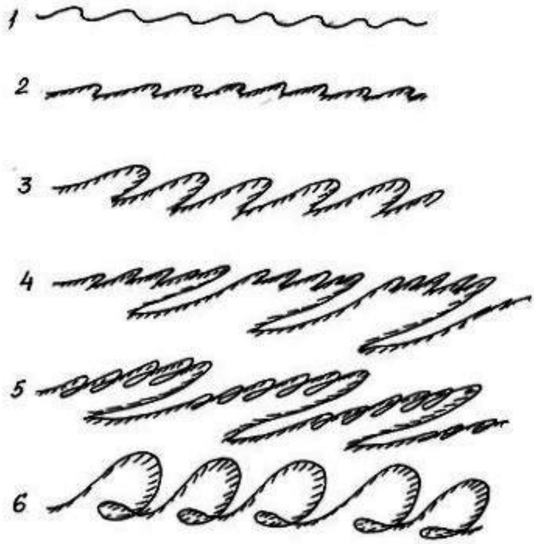


Рис. 1. Волновые процессы:
1 – гравитационные волны; 2 – малые волны, малые потенциалы скоростей, влияние на конструкции которыми можно условно пренебречь; 3 – двумерные волны, ось $x$ направлена перпендикулярно к гребням волны; 4 – дисперсные волны, дисперсии которых распространяются с разной скоростью; 5 – групповые волны (гребни и впадины) бегут со скоростью $\omega_0$ $к_0$, длины волн не отстают от группы и не опережают ее (где $к_0$ - начальное волновое число); 6 – кольцевые волны

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для изучения волнового процесса сначала рассмотрим **гравитационные волны**, которые считаются **безвихревыми** и поэтому существует потенциал скоростей Ф, т.е. компонента $\boldsymbol{v_l}$ скорости жидкости (воды) по направлению $\boldsymbol{l}$ и может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{v_l} = -\frac{\partial Ф}{\partial l}, \qquad (1)$$

где $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}; \boldsymbol{t})$ – некоторая функция координат и времени, удовлетворяющая (по пространственным координатам $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$) уравнение Лапласа:

$$\Delta\Phi=\mathbf{0}. \tag{2}$$

При гравитационных волнах, волнение жидкости можно считать малым, т.е. все производные потенциалы скоростей: $\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \frac{\partial\Phi}{\partial t}$, а также смещения свободной поверхности при волнении достаточно малы, чтобы их квадратами и производными можно было пренебрегать, не внося существенной погрешности в решение. При перечисленных условиях задачу о волнении на свободной поверхности жидкости для **гравитационной волны** можно привести к граничной задаче по уравнению Лапласа (2). Граничные условия, которые должны удовлетворять потенциалы скоростей $\Phi$ при **гравитационной волне** (рис. 1 – линия 1) на неподвижной границе жидкости в силу (1):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

так как жидкость не может пересекать твердые стенки (в нашем случае стенки сваи). На свободной поверхности должно удовлетворяться условие:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{p}$ – гидростатическое давление в жидкости,

$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\gamma}_w \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{\gamma}_w = \mathbf{10}$ кН/м$^3$ – удельный вес жидкости (воды),

$\boldsymbol{h}$ – глубина воды, м;

$\boldsymbol{p}_0$ – атмосферное давление.

Чтобы преобразовать условие (4) к более удобному виду, воспользуемся уравнениями Эйлера, описывающими движение идеальной жидкости. Возьмем из этих уравнений то, в которое входят производные компоненты скорости $\boldsymbol{v}_z$. Запишем здесь это уравнение в виде:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = N - \frac{1}{\rho_w} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{N}$ – внешняя сила, действующая на единицу массы жидкости вдоль оси $\boldsymbol{z}$, а $\boldsymbol{\rho}_w$ – плотность жидкости. При действии на жидкость только силы тяжести $\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{g}$, где $\boldsymbol{g} = \mathbf{9{,}81}$ м/с$^2$ – ускорение силы тяжести. Далее в силу (1), имеем:

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}, \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial z \partial t},$$

так что при наличии потенциала скоростей уравнение Эйлера (5) можно записать в форме:

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z \partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho_w} \cdot \frac{\partial p}{\partial z},$$

допускающей непосредственное интегрирование по $\boldsymbol{z}$. Произведем это последнее, получим:

$$\frac{p}{\rho_w} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} - gz - \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + C, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{C}$ – произвольная функция времени. Так как добавление к потенциалу любой функции времени не вызывает нарушения соотношения (1), то функцию $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{t})$ можно выбрать произвольно.

Допустим, в виде $\boldsymbol{C} = \frac{\rho_w}{p_0}$. Так как волны малые (рис. 1, линия 2), по сказанному выше, мы можем пренебречь. Тогда, обозначив через $\eta$ координату z свободной поверхности, получим:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{g}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=\eta}.$$

Пренебрегая членами высшего порядка малости, это выражение можем записать в виде:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{g}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=0}. \tag{7}$$

С той же степенью приближения, принимая во внимание, что нормаль к свободной поверхности составляет с осью $\boldsymbol{z}$ малый угол, нормальную компоненту скорости жидкости на свободной поверхности можно положить равной:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0}. \tag{8}$$

Дифференцируя (7) по времени $\boldsymbol{t}$ и подставляя $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ из (8), получим:

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \mathbf{0}. \tag{9}$$

Формула (9) и представляет граничное условие на свободной поверхности, записанное в удобной для дальнейшего форме. Соотношение же (7) позволяет определить форму свободной поверхности, если решение для Ф известно.

Находим сначала решение задачи о гравитационной волне, представляющее в каждой точке занятого жидкостью пространства чисто периодическое колебание с одной и той же круговой частотой $\omega$, но с меняющейся от точки к точке амплитудой и фазой. Для этого примем:

$$\Phi = \boldsymbol{Re}\cdot\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}^{-i\omega t}, \tag{10}$$

где «$\boldsymbol{Re}$» **– символ, который характеризует принятые функции вещественными, а «$\boldsymbol{Im}$» мнимым**; $\boldsymbol{u}$ – комплексная функция координат, количество частот $\boldsymbol{\omega}$ во времени $\boldsymbol{t}$.

Так как

$$\boldsymbol{Re}\cdot\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}^{-i\omega t} = \boldsymbol{u}'\cos\omega t + \boldsymbol{u}''\sin\omega t,$$

здесь $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{Re}\cdot\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{Im}\cdot\boldsymbol{u}$, то соотношение (10) действительно описывает гармоническое колебание с фазой и амплитудой, зависящими от координат. Чтобы найти уравнение и граничные условия, которым должна удовлетворять функция $\boldsymbol{u}$, подставим в соотношения (2), (3) и (9) вместо Ф произведение $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}^{-i\omega t}$. Это даст в точках внутри жидкости:

$$\Delta\boldsymbol{u} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

на поверхность стенки сваи:

$$\frac{du}{dn} = 0, \qquad (12)$$

на свободной поверхности жидкости:

$$g\frac{du}{dz}_{z=0} - \omega^2 u_{z=0} = 0 \qquad (13)$$

Таким образом, гравитационная волна на поверхности жидкости имеет малые волновые явления, подчиняется уравнениям Лапласа и решается с помощью уравнения Эйлера, удовлетворяют граничным условиям (12) - (13).

## ВЫВОДЫ

1. При строительстве морских сооружений, обычно применяются свайные фундаменты, которые подвергаются различным видам морских волн. Одним из этих видов волн являются гравитационные волны, которые считаются безвихревыми, но обладающими определенной величиной потенциальной скорости, но мало влияющим на устойчивость и несущую способность свайных фундаментов.
2. Математически смоделировано состояние потенциалов скоростей гравитационной волны. Для этого использовано уравнение Эйлера, описывающее движение идеальной жидкости, которая содержит производные компоненты скоростей по осям системы координат.
3. Составлены и решены дифференциальные уравнения по определению потенциалов скоростей гравитационной волны, его назначенным граничным условиям гармонических колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Самедов А.М. Описание нелинейного процесса консолидации шельфовых грунтов комбинированными реологическими моделями / Самедов А.М, Асланов Л.Ф. – К.: Вісник НТУУ «КПІ», серія «Гірництво». - Вип. 22, 2012. - С. 37 - 45.
2. Асланов Л.Ф. Комбинирон реологическим модел за описане на линейно еластично напрегнато състояние на шельфа (на болгарском яз.) / Асланов Л.Ф. // Сб. с доклади II. Шеста международна научна конференция «Архитектура, строительство - съвременност», 30 май – 1 юни 2013г. - г. Варна, Болгария. – С.159 - 167.
3. Фигаров Н.Г. Колебания жидкости в элептическом резервуаре / Фигаров Н.Г. // Динамика сооружений: сб. трудов ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко; под. ред. д.т.н., проф. Б.Г.Коренева. - М.: Стройиздат, 1971.


Статья поступила в редакцию 05.09.2013 г.