

## РАСЧЕТ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ЛИРА 10

Гераймович Ю.Д., Шполянский О.Г.  
ООО ПРАЙМ КАД

Евзеров И.Д.  
ООО ВЕГА КАД

Марченко Д.В.  
ООО ЛИРА софт  
г. Киев, Украина

**АНОТАЦІЯ:** Наведено огляд методів розрахунку на сейсмічні впливи, що реалізовані у програмному комплексі ЛІРА 10: розкладання за формами власних коливань і пряме інтегрування рівнянь руху.

**АННОТАЦИЯ:** Приведен обзор методов расчета на сейсмические воздействия, реализованных в программном комплексе ЛИРА 10: разложение по формам собственных колебаний и прямое интегрирование уравнений движения.

**ABSTRACT:** An overview of the methods for seismic design, implemented in software package LIRA 10: expansion in the forms of natural vibrations and direct integration of equations of motion is presented.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** расчеты на сейсмические воздействия, сейсмограмма, спектры реакции, не отражающая граница, Pushover.

Среди чрезвычайных природных явлений землетрясения занимают ведущее место, как по человеческим жертвам, так и по значительным материальным потерям. Немалая часть территории Украины [1] является сейсмически опасной. Масштабность и сложность задач сейсмостойкого проектирования объектов гражданского, промышленного и транспортного строительства требует соответствующих теоретических и программных разработок. На протяжении многих лет программный комп-

лекс (ПК) ЛИРА успешно справляется с задачами сейсмостойкого проектирования объектов строительной отрасли.

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Расчет на динамические воздействия основан, как известно [2], на решении системы дифференциальных уравнений

$$M u''(t) + C u'(t) + K u(t) + q(t) = 0, \quad (1)$$

где  $M, C, K$  – соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости системы,  $u(t), u'(t), u''(t), q(t)$ , – векторы узловых перемещений, скоростей, ускорений и внешней нагрузки в момент времени  $t$ .

Для решения системы (1) используют два основных метода: разложение по формам собственных колебаний и прямое интегрирование уравнений движения. Метод разложения по формам можно применять только для линейного расчета, так как принцип суперпозиций не применим в нелинейной теории. Методы прямого интегрирования носят общий характер и могут применяться для решения всех задач динамического расчета конструкций.

При расчете на сейсмическое воздействие предполагается, что внешние нагрузки равны нулю, а к искомым перемещениям добавлены перемещения  $\gamma \cdot s(t)$ , вызванные движением земной поверхности, где  $\gamma$  – вектор направляющих косинусов сейсмического воздействия,  $s(t)$  – заданный закон движения земной поверхности (сейсмограмма землетрясения). Уравнения движения имеют вид

$$M (u(t) + \gamma \cdot s(t))'' + C (u(t) + \gamma \cdot s(t))' + K (\bar{u}(t) + \gamma \cdot s(t)) = 0. \quad (2)$$

Обозначим  $a = s''(t)$  заданное ускорение, акселерограмму землетрясения, и предположим, что  $K\gamma = C\gamma = 0$ . Получаем аналогичные (1) уравнения для расчета по заданной акселерограмме землетрясения

$$M u''(t) + C u'(t) + K u(t) + M\gamma \cdot a(t) = 0, \quad (3)$$

внешняя нагрузка равна  $M\gamma \cdot a(t)$ .

В ПК ЛИРА 10.4 реализованы расчеты на сейсмические воздействия по строительным нормам Российской Федерации, Армении, Узбекистана, Украины, Туркменистана, Казахстана, Таджикистана, Азербайджана, Грузии, США, Eurocode, Израиля, Индии, Алжира и Турции. Также реализованы расчеты по однокомпонентной и трехкомпонентной акселерограммам землетрясений, расчеты по спектру реакции (ответ-спектр), трехкомпонентным графикам коэффициентов динамичности и прямое интегрирование уравнений движения.

## РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФОРМАМ КОЛЕБАНИЙ

Значительная часть методов расчета упругих систем (в том числе и регламентированных строительными нормами) основана на разложении решения по формам собственных колебаний в виде

$$\bar{u}(t) = \Phi \bar{y}(t).$$

Для определения форм собственных колебаний методом итерации подпространств [3] решается частичная проблема собственных значений

$$K \bar{\varphi}_i = \omega_i^2 M \bar{\varphi}_i,$$

где  $\omega_i^2$  – квадраты собственных частот, соответствующих собственным формам колебаний  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $\Phi = [\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m]$ . Собственные вектора удовлетворяют граничным условиям и обладают свойствами ортогональности

$$\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_j = 0, \quad \bar{\varphi}_i^T K \bar{\varphi}_j = 0, \quad \text{при } i \neq j.$$

Формы колебаний нормируются по отношению к матрице масс, то есть

$$\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_i = 1, \quad \bar{\varphi}_i^T K \bar{\varphi}_i = \omega_i^2.$$

Если условия ортогональности справедливы и для матрицы демпфирования  $C$ , то система (1) распадается на отдельные уравнения

$$y_i + 2\xi\omega_i y_i + \omega_i^2 y_i = -\Phi^T q(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Для импульса периодического воздействия, ветра, сеймики дальнейшие вычисления производятся согласно рекомендациям строительных норм.

Процент вклада модальной массы по  $i$ -той форме собственных колебаний вычисляется по формуле

$$m_i^{kpd} = \frac{(\gamma^T M \bar{\varphi}_i)^2}{(\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_i) \cdot (\gamma^T M \gamma)} \cdot 100\%.$$

Точность метода зависит от количества вычисленных форм и определяется суммой  $m_i^{kpd}$  по всем вычисленным формам. Влияние невычисленных форм в ПК ЛИРА 10 не учитывается.

## РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

При построении разностной схемы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) аппроксимируем скорости, ускорения и перемещения конечноразностными выражениями в перемещениях. Обозначим  $\theta$  – шаг по времени,

$$t_n = n\theta, u_n = u(t_n),$$

$$\delta_n u = (u_{n+1} - u_n) / \theta, \beta_n u = (u_{n+1} - u_{n-1}) / 2\theta = (\delta_n(u) + \delta_{n-1}(u)) / 2,$$

$$\gamma_n u = (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) / \theta^2, \alpha_n u = (u_{n+1} + u_{n-1}) / 2.$$

Заменив ускорения, скорости и перемещения в момент времени  $t$  разностными отношениями, получаем

$$\begin{aligned} u_n'' &= \gamma_n u = (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) / \theta^2, \\ u_n' &= \beta_n u = (u_{n+1} - u_{n-1}) / 2\theta, \\ u_n &= \alpha_n u = (u_{n+1} + u_{n-1}) / 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Погрешность по формулам (4) имеет порядок  $\theta^2$ . Подставляя (4) в (1), получим систему уравнений

$$M\gamma_n u + C\beta_n u + K\alpha_n u + q_n = 0. \quad (5)$$

Подобные разностные схемы называются неявными. Т. к. неизвестные в уравнениях (5) перемещения  $u_{n+1}$  определяются по ранее найденным  $u_n$ ,  $u_{n-1}$ . Схема (5) безусловно, устойчива [4], поэтому используется при решении как линейных, так и нелинейных задач прямым динамическим расчетом в ПК ЛИРА.

## ДИАГОНАЛЬНАЯ И СОГЛАСОВАННАЯ МАТРИЦЫ МАСС

В ПК ЛИРА начиная с версии 9.4 при решении задач динамики во времени и при определении собственных пар, наряду с диагональной используется и согласованная матрица масс, построенная по тем же аппроксимирующим функциям, что и строилась матрица жесткости. При таком подходе учитывается инерция вращения – появляются "крутильные" элементы матрицы масс.

При замене согласованной матрицы масс на диагональную вычисление собственных частот становится намного проще, но возрастает погрешность, особенно для высших собственных пар.

## КОНДЕНСАЦИЯ МАСС

Для конструкций с сильно отличающимися жесткостными характеристиками (металлические надстройки над железобетонными зданиями, довольно податливые перекрытия и т. д.) добавлена конденсация масс. При конденсации масс указываются элементы, с которых необходимо собрать массу, и узлы, в которые собранную массу необходимо распределить.

Конденсация масс позволяет избавиться от форм собственных колебаний с близким к нулю процентом вклада в реакцию сооружения.

## **ПОЭТАЖНЫЕ СПЕКТРЫ РЕАКЦИИ**

При необходимости выполнить сейсмический расчет установленного в здании оборудования используются так называемые поэтажные акселерограммы и поэтажные спектры отклика. После расчета здания или сооружения на сейсмическое воздействие для точек прикрепления оборудования получают законы колебаний – обычно акселерограммы. Их можно непосредственно использовать для расчета оборудования методом прямого интегрирования или по модулям расчета на акселерограммы землетрясений. Если же необходим расчет по спектральной теории сейсмостойкости, то вычисляют поэтажные спектры отклика от поэтажных акселерограмм с дальнейшей возможностью использования полученных спектров отклика в 41 модуле динамики. Поэтажные спектры отклика строятся для 27 и 29 модулей динамики и для прямого интегрирования уравнений движения.

## **НОВЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕ ОТРАЖАЮЩИХ ГРАНИЦ**

Сейсмическая реакция системы "грунт-сооружение" может быть определена методами численного интегрирования общих уравнений движения. Для этого составляется расчетная модель, куда входит само сооружение и область основания. При статических расчетах достаточно выбрать такой размер грунтовой области, чтобы краевые эффекты на ее внешних границах не сказывались на напряжениях под сооружением. Если же задать такую ограниченную область основания для интегрирования уравнений движения при сейсмических расчетах, то волны будут отражаться от границ области и возвращаться к сооружению, тем самым искажая его колебания. Чтобы этого не происходило, следовало бы удалить границы грунтовой области настолько, чтобы отраженные волны за время землетрясения не успели дойти обратно. Но даже при теперешнем уровне развития компьютерной техники создание и расчет такой модели будут невозможны, т. к. расчетная схема превысит все допустимые размеры.

Для возможности расчета таких задач в ПК ЛИРА 10 были реализованы конечные элементы не отражающих границ. Они обеспечивают беспрепятственное прохождение волн через границу грунтовой области. Для плоских расчетных схем – это двухузловые КЭ, для пространственных – трех- и четырех-узловые КЭ. Не отражающие граничные условия задаются в виде [5]

$$\sigma_n = c_n \rho u_n', \quad \sigma_\tau = c_\tau \rho u_\tau'$$

где  $c_n$ ,  $c_\tau$  – скорости продольной и поперечной волн,  $\rho$  – плотность грунта

Учитывая факт нелинейного деформирования грунтов в системе "грунт-сооружение", задача определения напряженно-деформированного состояния сооружения должна решаться с помощью нелинейных плоских и пространственных КЭ грунта, имеющихся в библиотеке конечных элементов ПК ЛИРА. КЭ грунта учитывают особенности физико-механических свойств грунта: ветвь нагрузки не совпадает с ветвью разгрузки. Использование данных КЭ совместно с системой МОНТАЖ позволяет моделировать широкий спектр геотехнических задач: выемку грунта, анкеровку шпунтовых ограждений, работу основания конструкций с учетом сложных геологических условий, осадку грунта и т.д.

В КЭ грунта реализованы следующие модели поведения материала:

- модель Боткина;
- модель Друкера-Прагера;
- модель Кулона-Мора;
- аналитическая теория прочности [6].

## МОДУЛИ РАСЧЕТА ПО АКСЕЛЕРОГРАММАМ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

При задании параметров расчета особое внимание следует обратить на масштабный множитель к акселерограмме, это произведение двух коэффициентов, первый из которых – коэффициент перевода значений акселерограммы в  $\text{м/с}^2$ , второй – коэффициент масштабирования акселерограммы на заданную балльность площадки.

Так, например, если для семибалльной акселерограммы ординаты заданы относительными величинами (в долях  $g$ ), а здание необходимо посчитать на восьмибалльной площадке, масштабный множитель должен приниматься  $2g$ .

Время интегрирования можно задавать равным или большим времени длительности акселерограммы землетрясения.

Распавшиеся уравнения интегрируются методом Ньюмарка с получением максимумов перемещений  $y_i^{\max}$

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi\omega_i\dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = -p_{i,r} \cdot a_r(t) - p_{i,t} \cdot a_t(t) - p_{i,z} \cdot a_z(t),$$

$$p_{i,r} = \bar{\varphi}_i^T \cdot M \cdot \bar{v}_r,$$

$$p_{i,t} = \bar{\varphi}_i^T \cdot M \cdot \bar{v}_t,$$

$$p_{i,z} = \bar{\varphi}_i^T \cdot M \cdot \bar{v}_z,$$

$$\bar{v}_r = \{\cos X, \cos Y, 0, 0, 0, 0, \dots, \cos X, \cos Y, 0, 0, 0, 0\}^T,$$

$$\bar{v}_t = \{\cos Y, \cos X, 0, 0, 0, 0, \dots, \cos Y, \cos X, 0, 0, 0, 0\}^T,$$

$$\bar{v}_z = \{0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1, 0, 0, 0\}^T.$$

Формулы приведены для 29 модуля – расчет по трехкомпонентной акселерограмме землетрясений. При расчете по однокомпонентной акселерограмме (модуль 27) в формуле пропадают два последних слагаемых в правой части уравнения, и несколько видоизменяется вектор  $\bar{v}_r$ .

Инерционные силы вычисляются по формуле

$$\bar{S}_i = y_i^{\max} \omega_i^2 M \bar{\varphi}_i.$$

Расчет на полученные сейсмические силы выполняется в случаях

- если это первая форма собственных колебаний;
- если модальная масса превышает 1%.

Погрешность, вносимая этими условиями, несущественна, а анализировать полученные результаты становится намного проще.

## **РАСЧЕТ ПО СЕЙСМОГРАММАМ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ**

Уравнения движения при расчете по сейсмограммам имеют вид (2). Предлагаемый подход к расчету является более естественным, нежели расчет на переносные силы инерции от акселерограмм, он также дает возможность учесть скорость распространения сейсмической волны. Существенные различия при расчетах по акселерограмме и сейсмограмме землетрясений следует ожидать в протяженных конструкциях, таких как мосты и большепролетные сооружения, за счет скорости распространения сейсмической волны (задается для расчета по сейсмограмме). Т. е. опорные части, в которые приложена сейсмограмма, включаются в работу не одновременно, а по мере прохождения сейсмической волны. Это дает качественно другое распределение усилий, чем при расчете по акселерограмме.

Но следует отметить, что до настоящего времени отсутствует общепринятый подход к определению ординат сейсмограмм по ординатам акселерограмм.

## ДИНАМИКА НА СМОНТИРОВАННОЕ СООРУЖЕНИЕ

Кроме решения линейных и нелинейных задач прямым динамическим расчетом в версии ПК ЛИРА 10 была добавлена возможность расчета по динамике во времени для смонтированной конструкции. После окончания возведения здания выполняется расчет на нагрузку, изменяющуюся во времени, в том числе на акселерограммы и сейсмограммы землетрясения. В результатах расчета - перемещения и усилия на стадиях монтажа и в моменты времени по динамическому расчету.

Для облегчения сравнения результатов динамического расчета по акселерограммам и сейсмограммам землетрясений (имеются в виду перемещения – при расчете на сейсмограмму землетрясения они абсолютны  $(\vec{u}(t) + \gamma \cdot s(t))$ ) введено понятие реперного узла: когда от абсолютных перемещений отнимаются перемещения узла указанного как реперный.

### PUSHOVER ANALYSIS

В последнее время для оценки поведения конструкций при сейсмическом воздействии за пределами упругости инженеры используют нелинейный статический метод, называемый Pushover Analysis.

При проведении нелинейного статического расчета в качестве внешнего воздействия принимается распределение инерционных нагрузок по определяющей форме колебаний и/или распределение горизонтальных сил из статического нагружения. В результате нелинейного статического расчета определяются значения перемещений  $d_i$  для каждого  $i$ -того узла на каждом  $k$ -м шаге нагружения

$$S_{ak} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i \cdot d_{ik}^2)}{\left[ \sum_{i=1}^n (m_i \cdot d_{ik}) \right]^2} \sum_{i=1}^n S_{ik}, \quad S_{dk} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i \cdot d_{ik}^2)}{\sum_{i=1}^n (S_{ik} \cdot d_{ik})} S_{ak}.$$

По приведенным формулам для каждого шага нагружения вычисляется точка на графике спектра несущей способности сооружения в координатах "спектральное ускорение – спектральное перемещение". Спектр несущей способности называют также графиком "способности" здания.

Переводя график спектрального коэффициента динамичности для заданной сейсмичности площадки строительства в графики спектра перемещений и спектра ускорений, строим зависимость спектра ускорений от



спектра перемещений. Этот график еще называют графиком "сейсмического требования".

Совмещая диаграмму "способности" здания с диаграммой "сейсмическое требование" получают суммарную диаграмму, характеризующую резервы или отсутствие резервов сооружения к упругопластическому деформированию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Будівництво у сейсмічних районах України: ДБН В.1.1 – 14:2014 / науковий керівник Ю.І. Немчинов. - [Чинні від 2014-10-01]. – К.: Мінрегіон України, 2014. - VI, – 110 с. – (Будівельні норми України).
2. Клаф Р. Динамика сооружений / Клаф Р., Пензиен Дж. - М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
3. Писсанецки С. Технология разреженных матриц / Писсанецки С. - М.: Мир, 1988. – 411 с.
4. Городецкий А.С. Компьютерные модели конструкций / Городецкий А.С., Евзеров И.Д. - Киев: Факт, 2007. – 393 с.
5. Дятловицкий Л.И. Формирование напряжений в гравитационных плотинах / Дятловицкий Л.И., Вайнберг А.И. - Киев: Наукова Думка, 1975. – 264 с.
6. Литвинский Г. Г. Аналитическая теория прочности горных пород и массивов: монография / ДонГТУ. – Донецк: Норд-Пресс, 2008. – 207 с.

## REFERENCES

1. Construction in seismic regions of Ukraine: State building codes B. 1.1–14: 2014. – Kyiv: Minbud of Ukraine, 2014 / scientific chief Yu.I. Nemchinov. - [Valid from 2014-10-01]. – K.: Minregion of Ukraine, 2014. - VI, – 110 p. – (Building norms of Ukraine).
2. Clough R. Dynamics of structures / Clough R., Penzien J. - M.: Stroyizdat, 1979. - 320 p.
3. Pissanetzky S. Sparse matrix technology /Pissanetzky S. - M.: Mir, 1988. – 411 p.
4. Gorodetsky A.S. Computer models of structures / Gorodetsky A.S., Ievzerov I.D. - Kiev: Fakt, 2007. – 393 p.
5. Dyatlovitsky L.I. Stresses formation in gravity dams / Dyatlovitsky L.I., Vaynberg A.I. - Kiev: Naukova Dumka, 1975. – 264 p.
6. Litvinsky G. G. Analytical strength theory of rocks and arrays. - Monograph / DonSTU. – Donetsk: Nord-Press, 2008. – 207 p.

Статья поступила в редакцию 12.08.2015 г.