УДК 69.05:658.562:728.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СКЛОНОВ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Гришин А.В., Сипливец А.А.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры
г. Одесса, Украина

АНОТАЦІЯ: У цій статті розглядаються питання математичного моделювання ґрунтових схилів при їх геометричній і фізичній нелінійності від сейсмічного впливу.

АННОТАЦИЯ: В данной статье рассматриваются вопросы математического моделирования грунтовых склонов при их геометрической и физической нелинейности от сейсмического воздействия.

ABSTRACT: In this article discusses mathematical modeling of ground slopes with their geometric and physical nonlinearities from seismic impact.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: математическое моделирование, сейсмическая нагрузка, грунтовый склон

В работах [5, 6] рассматривалось математическое моделирование склонов при действии на них статических нагрузок. В данной статье будут исследоваться те же задачи, но при больших деформациях и перемещениях склонов и действии на них динамической нагрузки. Под динамической нагрузкой понимается переменная нагрузка, изменяющаяся во времени быстрее, чем рассеиваются вызванные нагрузкой в грунте склона напряжения.

Так как грунты склонов являются нелинейной сложной средой, то их напряженно-деформированное состояние очень зависит от пути, времени и вида нагружения. Поэтому желательно, чтобы из бесконечного числа факторов, характеризующих эту реальную сложную систему, были учтены в расчетной модели только конечное число факторов, отражающее важнейшие свойства системы. При этом выделенные свойства должны быть реально определяемыми из опытных данных и допускающими в дальнейшем численную реализацию с применением ЭВМ. Следовательно, выбираемая нами расчетная модель не будет точно совпадать с реальной системой, но должна отражать основные свойства системы. Хотя модель “беднее” и неоднозначна материальному объекту, но, как правило, модель доступнее, информативнее и удобнее для пользователя. Система также позволяет часто лучше понять основные свойства исследуемого объекта, прогнозировать последствия при изменении свойств его материалов и различных на него воздействий.

В настоящее время наблюдается бурное развитие методов математического моделирования, которое привело к появлению огромного количества моделей самого разного типа. Наиболее подробное их описание и классификация изложены, например, в работах [2, 7, 8]. Следует отметить, что такой подход в научных исследованиях является сейчас наиболее применяемым и результативным. Как показано в [8], постановку вопроса о математическом моделировании можно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа. Кратко рассмотрим эти этапы применительно к склонам, которые находятся под воздействием собственного веса и приложенных ранее статических, а затем сейсмических нагрузок.

На первом этапе строится модель рассматриваемой сложной системы, которая в математической форме отображает важнейшие свойства системы, формулируемых в виде фундаментальных законов природы. В работе [3] показано, что грунты склонов даже под действием собственного веса находятся в упругопластическом состоянии, поэтому модель грунтов должна учитывать этот фактор. Кроме того, грунты склонов подвержены сложным нагружениям, поэтому деформационные теории пластичности не применимы, следовательно, должна использоваться более сложная теория пластического течения с упрочнением [3]. Определение физико-механических параметров грунтов, характеризующих их свойства, которые необходимы для этой теории, изложено, например, в работе [1].

Под действием статических и динамических нагрузок в склонах могут возникать большие деформации и перемещения, которые также должны быть учтены в модели и определены из расчетов. В этом случае, используя лагранжев (материальный) подход, связь между тензором деформации Коши-Грина $\boldsymbol{C}$ и вектором перемещений $\boldsymbol{u}$ будет иметь вид [3]

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}\boldsymbol{u} + \overset{\circ}{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\nabla}\boldsymbol{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \right), \;\; \gamma_{\kappa s} = \frac{1}{2}\left(u_{\kappa,s} + u_{s,\kappa} + u_{t,\kappa}u_{t,s} \right). \quad (1)$$

При решении нелинейных задач возникают сложности, связанные с отсутствием информации об актуальной конфигурации V_t, в которой определяется тензор напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$. Поэтому при решении нелинейных задач удобнее находить напряженное состояние с применением отсчетной конфигурации V_0, которая описывается исходными данными. В связи с этим, приходится оперировать с возникающими тензорами напряжений, определенными в этой конфигурации. Здесь будет использоваться симметричный тензор напряжений Кирхгофа **K**, который определяется через тензор напряжений Коши следующим образом

$$\mathbf{K} = \sqrt{D}\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \boldsymbol{x}. \; \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{D}} \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{X}. \tag{2}$$

Уравнение движения, равновесия и статические граничные условия с применением тензора Кирхгофа **K** являются нелинейными, они зависят от деформированного состояния сплошной среды.

Соотношение принципа виртуальной работы в полных напряжениях и в приращениях с применением тензора Кирхгофа определяются в компонентной форме в следующем виде:

$$\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \left[\kappa_{\mathbf{sm}} \delta\gamma_{\mathbf{sm}} + \left(\rho \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}} + \mathbf{c}_{\mathbf{m}} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}} - \overset{\circ}{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}} \right) \delta \mathbf{u}_{\mathbf{m}} \right] \mathbf{d}\overset{\circ}{V} - \int\limits_{\overset{\circ}{S}_1} \overset{\circ}{\mathbf{q}}_{\mathbf{m}} \delta \mathbf{u}_{\mathbf{m}} \mathbf{d}\overset{\circ}{\mathbf{S}} - \int\limits_{\overset{\circ}{S}_p} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\mathbf{m}} \delta \mathbf{u}_{\mathbf{m}} \mathbf{d}\overset{\circ}{\mathbf{S}} = 0, \quad \mathbf{t} \in (0, \infty),$$

$$\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \left\{ \begin{array}{l} \Delta\kappa_{sm}\, \delta\, \Delta\gamma_{sm}^{\Lambda} + \underline{(\rho\, \Delta \ddot{u}_s + c_s\, \Delta \dot{u}_s)\delta\, u_s} + \dfrac{1}{2} \kappa_{sm}\, \delta(\Delta u_{n,s}\, \Delta u_{n,m}) - \Delta \overset{\circ}{F}_s\, \delta\, \Delta u_s + \\ \left[\kappa_{sm}\, \delta\, \Delta\gamma_{sm}^{\Lambda} + \left(\rho\, \ddot{u}_s + c_s\, \dot{u}_s - \overset{\circ}{F}_s \right) \delta\, \Delta u_s \right] \end{array} \right\} d\overset{\circ}{V} - \tag{3}$$

$$- \int\limits_{\overset{\circ}{S}_1} \left(\Delta \overset{\circ}{q}_s + \overset{\circ}{q}_s \right) \delta\, \Delta u_s\, d\overset{\circ}{S} - \int\limits_{\overset{\circ}{S}_p} \left(\Delta \overset{\circ}{p}_s + \overset{\circ}{p}_s \right) \delta\, \Delta u_s\, d\overset{\circ}{S} = 0, \quad t \in (0, \infty).$$

Уравнение состояния в приращениях можно записать в следующем виде [3]

$$\Delta\kappa_{\mathbf{ij}} = \bar{D}_{ijnm}\, \Delta\gamma_{nm}^{\Lambda}, \tag{4}$$

$$\bar{D}_{ijnm} = D^{(N)} D_{\alpha\beta\xi\eta} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} x_{n,\xi} x_{m,\eta}, \quad \frac{dV}{d\overset{\circ}{V}} = \sqrt{D} = \left| X_{\kappa,s} \right|.$$

При исследовании задач с малыми удлинениями и сдвигами принимается, что актуальные конфигурации тела V_t совпадают с его отсчетной конфигурацией V_0. Это существенно облегчает решение. Но при деформировании с более 10% градиентами перемещений такой подход может привести к качественно и количественно неверным результатам. Поэтому процесс решения задач с большими деформациями порождает дополнительные трудности, связанные, во-первых, с геометрической нелинейностью исходных уравнений и, во-вторых, с отсутствием информации об актуальных конфигурациях тела V_t.

Первая проблема приводит к введению различных тензоров напряжений и деформаций и к двум основным подходам в исследовании задач механики: лагранжеву и эйлерову. Вторая проблема порождает широко используемые методы решения задач инкрементального (скоростного) типа. Такой подход позволяют одно полное загружение заменить на эквивалентный ряд малых последовательных шагов и определять конфигурацию тела, а также напряжения и деформации, на последующем шаге из предыдущего, на котором они известны. В этом случае в качестве отсчетной конфигурации последующего нагружения принимается актуальная конфигурация предыдущего. Это дает возможность процесс определения результатов для каждого нагружения записывать в виде однотипных операций, используя алгоритм решения геометрически линейных задач.

Рассмотрим основные уравнения, используемые при решении рассматриваемой задачи в лагранжевой формулировке. Основным преимуществом такого подхода является постоянство области изменения пространственных переменных. Хотя информация об актуальных конфигурациях в процессе расчета необходима, но применение методов инкрементального типа вносит существенные упрощения в реализацию проблемы решения.

Поставленная задача решается в два этапа. На первом этапе рассматривается статическая задача определения напряженно-деформированного состояния склона от действия собственного веса грунтового массива и приложенных к нему статических нагрузок. На втором этапе решается динамическая задача от действия сейсмических сил. На этих этапах необходимо реализовать две проблемы: 1) дискретизацию области, занимаемой склоном, и дискретизацию исходных уравнений; 2) построение итерационного процесса для определения искомых функций, характеризующих напряженно-деформированное состояние тела с наперед заданной прочностью.

Решение первой проблемы позволяет представить рассматриваемую задачу в алгебраической форме, т.е. перейти от бесконечного числа степеней свободы склона к конечному числу. Ее можно реализовать, используя различные проекционные методы. Здесь будет применен метод конечных элементов. Решение второй проблемы дает возможность произвести линеаризацию исходных нелинейных уравнений. При этом операцию по корректировке их коэффициентов можно выполнять на каждой итерации решения или через их заданное число.

Дискретизация уравнений методом конечных элементов и статические методы расчета склонов подробно рассмотрены, например, в монографиях [3, 4], поэтому перейдем к решению динамических задач. В матричной форме в момент времени t_n уравнение движения тела преобразуется к следующему виду

$$\left(\boldsymbol{M} + \frac{1}{\rho}[\boldsymbol{h}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}]^{-1}\boldsymbol{h} \right)\ddot{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{n}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{n}}. \tag{5}$$

Здесь первое слагаемое в круглых скобках есть матрица масс, которая для каждого конечного элемента равна

$$M^{ij}_{(e)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[N^{i}_{(e)}\right]^{m} \rho_{(e)} \left[N^{j}_{(e)}\right] h_{(e)} \, det\mathbf{J}_{(e)} \, d\eta_1 \, d\eta_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} m^{ij}_{(e)} \, d\eta_1 \, d\eta_2 .$$

Второе слагаемое в этих скобках называется матрицей присоединенных масс, она учитывает влияние водной среды на склон при его колебаниях [3]. Обозначим сумму в скобках через $\overline{\boldsymbol{M}}$ и назовем ее приведенной массой.

Второе слагаемое в (5) есть матрица демпфирования, которая для каждого конечного элемента равна

$$C^{ij}_{(e)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[N^{i}_{(e)}\right]^{m} c_{(e)} \left[N^{j}_{(e)}\right] h_{(e)} \, det\mathbf{J}_{(e)} \, d\eta_1 \, d\eta_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} c^{ij}_{(e)} \, d\eta_1 \, d\eta_2 .$$

$\mathbf{K}(\boldsymbol{\delta})$ называется матрицей жесткости системы, которая зависит через матрицу $\boldsymbol{D}$ от вектора глобальных узловых перемещений $\boldsymbol{\delta}$. $\boldsymbol{Q}$ – действующая на склон нагрузка.

Рассмотренная выше методика реализована в программном комплексе с помощью которого можно исследовать колебательные процессы, происходящие в любой точке склона от действия сейсмической нагрузки. Возможности комплекса программ не исчерпываются только решением задач от заданных начальных смещений части грунта склона. Также можно вводить акселерограммы землетрясений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болдырев Г.Г. Методы определения механических свойств грунтов. Состояние вопроса / Болдырев Г.Г. – Пенза: ПГУАС, 2008. – 696 с.
2. Введение в математическое моделирование: учебное пособие под редакцией П.В.Трусова. – М.: Логос, 2005. – 440 с.
3. Гришин В.А. Математическое моделирование склонов (1) / Гришин В.А., Гришин А.В. // Вісник ОНМУ. – №38. - 2013. – С. 109 - 130.
4. Гришин В.А. Математическое моделирование склонов (2) / Гришин В.А., Гришин А.В. // Вісник ОНМУ. – №38. - 2013. – С. 131 - 148.
5. Гришин В.А. Некоторые модели грунтовой среды / Гришин В.А., Дорофеев В.С. – Одесса: Внешрекламсервис, 2007. – 310 с.
6. Гришин В.А. Одесские склоны и оползни / Гришин В.А., Снисаренко В.И. – К: МП Леся, 2008. – 300 с.

7. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей / Мышкис А.Д. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.
8. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / Самарский А.А., Михайлов А.П. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

REFERENCES

1. Boldyrev G.G. Methods of determination of mechanical properties of soils. State of question / Boldyrev G.G. -Penza: PGUAS, 2008. -696 p.
2. Introduction to mathematical modeling. Tutorial under the drafting by P.V. Trusov. -M.: Logos, 2005. - 440 p.
3. Grishin V.A. Mathematical modeling of slopes (1) / Grishin V.A., Grishin A.V. // Visnyk ONMU. - No. 38. 2013. - P. 109-130.
4. Grishin V.A. Mathematical modeling of slopes (2) / Grishin V.A., Grishin A.V. // Visnyk ONMU. -No. 38. 2013.-p. 131-148.
5. Grishin V.A. Some models of the ground environment / Grishin V.A., Dorofeev V.S. -Odessa: Vnesreklamservis, 2007. -310 p.
6. Grishin V.A. Odessa slopes and landslides / Grishin V.A., Snisarenko V.L. – K.: MP Lesia, 2008. - 300 p.
7. Myshkis A.D. Elements of the theory of mathematical models / Myshkis A.D. - M.: KomKniga, 2007. - 192 p.
8. Samarskij A.A. Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples / Samarskij A.A., Mikhailov A.P. - M.: Physmathlit, 2001. - 320 p.

Статья поступила в редакцию 03.08.2015 г.