УДК 624.131.522

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПО ЕЕ КОНТАКТУ С ЦЕНТРАЛЬНО НАГРУЖЕННЫМ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМ ШТАМПОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ОЧЕРТАНИЯ ПРИ УСЛОВИИ ИХ ПОЛНОГО ПРИЛИПАНИЯ

Богомолов А.Н., Ушаков А.Н.

Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет
г. Волгоград, Украина

АНОТАЦІЯ: Наведено аналітичне рішення задачі щодо напруженого стану в пружній основі абсолютно жорсткого штампу параболічної форми, що знаходиться під дією нормального навантаження при безмежному значенні коефіцієнту тертя по контакту «штамп – напівплощина».

АННОТАЦИЯ: Приведено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии в упругом основании абсолютно жесткого штампа параболического очертания, находящегося под действием нормальной нагрузки при бесконечном значении коэффициента трения по контакту «штамп - полуплоскость».

ABSTRACT: The analytic solution of the task on a tension distribution in the elastic basis of absolutely rigid stamp of the parabolic outline which is under the influence of normal loading at infinite value of friction coefficient on «stamp – half-plane» contact is provided in the work.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: смешанная задача теории упругости, полное прилипание, компоненты напряжения, коэффициент Пуассона.

Рассмотрим штамп с параболическим основанием, симметрично расположенным относительно начала координат, так что

$$g'(t) = 2hit, \tag{1}$$

где $-a \le t \le a$ и h – заданное положительное действительное число (рис.1). Предположим, что внешние силы, действующие на штамп, имеют равнодействующую, направленную вертикально вниз, т.е.

$$X = 0, Y = -P, \tag{2}$$

где P – заданная положительная постоянная величина. Определим напряженное состояние в нижней полуплоскости.

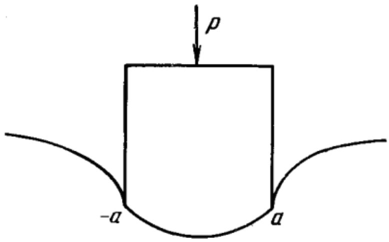


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Решение поставленной задачи проведем методом сопряжения, предложенным Н.И. Мусхелишвили [1].

Функция напряжения $\Phi(z)$ в этом случае на основании формулы (8) §114 [1] с учетом (1) и (2) имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{2\mu hiX(z)}{\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{t}{X(t)(t-z)} dt + \frac{iP}{2\pi} X(z), \tag{3}$$

где

$$X(z) = (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta}, \tag{4}$$

$$\beta = \frac{\ln \aleph}{2\pi}. \tag{5}$$

где μ – постоянная Ламе, $\aleph$ – упругая постоянная, которая выражается через коэффициент Пуассона ν по формуле $\aleph = 3 - 4\nu$, причем коэффициент Пуассона связан с коэффициентом бокового давления ξ_0 соотношением $\xi_0 = \dfrac{\nu}{1-\nu}$.

Вычислим интеграл, стоящий в правой части формулы (3). Поскольку при больших $|z|$

$$\frac{z}{X(z)} = z(z+a)^{\frac{1}{2}-i\beta}(z-a)^{\frac{1}{2}+i\beta} = z^2\left(1+\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}-i\beta}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}+i\beta} =$$

$$= z^2\left[1+\left(\frac{1}{2}-i\beta\right)\frac{a}{z}-\left(\frac{1}{8}+\frac{\beta^2}{2}\right)\frac{a^2}{z^2}+\dots\right]\left[1-\left(\frac{1}{2}+i\beta\right)\frac{a}{z}-\left(\frac{1}{8}+\frac{\beta^2}{2}\right)\frac{a^2}{z^2}+\dots\right]=$$

$$= z^2 - 2\beta aiz - \left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2 + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

то по формуле (40) §110 [1] получаем

$$\int_{-a}^{a}\frac{z}{X(z)(t-z)}dt = \frac{2\pi i}{\aleph+1}\left[\frac{z}{X(z)} - z^2 + 2\beta aiz + \left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2\right].$$

После подстановки значения интеграла формула (3) принимает вид

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z),$$

где

$$\Phi_1(z) = \frac{4\mu hi}{1+\aleph}\left[z - \left(z^2 - 2\beta aiz - \left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2\right)X(z)\right], \qquad (6)$$

$$\Phi_2(z) = \frac{iP}{2\pi}X(z). \qquad (7)$$

Представим (4) в виде

$$X(z) = e^{\left(-\frac{1}{2}+i\beta\right)\ln(z+a)}e^{\left(-\frac{1}{2}-i\beta\right)\ln(z-a)}. \qquad (8)$$

Поскольку логарифм является многозначной функцией, то для его определения, следуя [1, стр. 352], положим $z-t=\rho e^{-i\theta}$, где $\rho=|z-t|$, а $\theta-$ угол между вектором, имеющим начало в t, а конец – в z, с осью абсцисс, причем полагаем этот угол заключенным между 0 и π и отсчитываем его от положительного направления Ox по часовой стрелке.

Прямые вычисления для функции напряжения (6) дают

$$\Phi_1(z)=\frac{4\mu h}{\aleph+1}\left[-y+\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(\left(2x(y-\beta a)\cos r_1+(x^2-y^2+2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2\sin r_1\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\left(x+\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(2x(y-\beta a)\sin r_1-\left(x^2-y^2+2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2\right)\cos r_1\right)\right)\right)\right],$$

$$\overline{\Phi_1}(z)=\frac{4\mu h}{\aleph+1}\left[-y+\frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(\left(x^2-y^2-2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)\right)a^2\sin r_2+2x(y+\beta a)\cos r_2\right)+\right.$$

$$\left.+i\left(x-\frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(\left(x^2-y^2-2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2\right)\cos r_2-2x(y+\beta a)\sin r_2\right)\right)\right],$$

$$\Phi_1'(z)=\frac{4\mu h}{\aleph+1}\left[\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}(2x\cos r_1-2(y+\beta a)\sin r_1)+\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\rho_1\rho_2\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(2x(y-\beta a)(\rho_1\gamma_1+\rho_2\gamma_2)-\right.\right.$$

$$\left.-\left(x^2-y^2+2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2\right)(\rho_1\delta_1+\rho_2\delta_2)\right)+i\left(1-\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}(2x\cos r_1-2(y-\beta a)\sin r_1)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\rho_1\rho_2\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(\left(x^2-y^2+2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2\right)(\rho_1\gamma_1+\rho_2\gamma_2)+2x(y-\beta a)(\rho_1\delta_1+\rho_2\delta_2)\right)\right)\right],$$

где

$$\delta_1=-\beta\cos\left(\frac{\theta_1+3\theta_2}{2}+\beta\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1+3\theta_2}{2}+\beta\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right),$$

$$\delta_2=\beta\cos\left(\frac{3\theta_1+\theta_2}{2}+\beta\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\theta_1+\theta_2}{2}+\beta\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right),$$

$$\gamma_1=-\beta\sin\left(\frac{\theta_1+3\theta_2}{2}+\beta\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta_1+3\theta_2}{2}+\beta\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right), \qquad (9)$$

$$\gamma_2=\beta\sin\left(\frac{3\theta_1+\theta_2}{2}+\beta\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\theta_1+\theta_2}{2}+\beta\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right),$$

$$\rho_1=\sqrt{(a-x)^2+y^2},\ \rho_2=\sqrt{(a+x)^2+y^2},\ \theta_1=\pi-\operatorname{arctg}\frac{|y|}{a-x},$$

$$\theta_2=\operatorname{arctg}\frac{|y|}{a+x}. \tag{10}$$

Для вычисления компонент напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} воспользуемся формулами [1, стр.406]

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left\{\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right\}=4\operatorname{Re}\Phi(z),$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left\{(\bar{z}-z)\Phi'(z)-\Phi(z)-\overline{\Phi(z)}\right\}. \tag{11}$$

С учетом приведенных выражений, из соотношений (11) для функции напряжения (6) имеем

$$\sigma_x=\frac{12\mu h}{\aleph+1}\left[-y+\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(2x(y-\beta a)\cos r_1+(x^2-y^2+2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2)\sin r_1\right)\right]-$$
$$-\frac{4\mu hy}{\aleph+1}\left[1-\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(2x\cos r_1-2(y+\beta a)\sin r_1\right)-\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\rho_1\rho_2\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(\left(x^2-y^2+2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(\rho_1\gamma_1+\rho_2\gamma_2)+2x(y-\beta a)(\rho_1\delta_1+\rho_2\delta_2)\right)\right]-\frac{4\mu h}{\aleph+1}\left[-y+\frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left((x^2-y^2-2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2)\sin r_2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2x(y+\beta a)\cos r_2\right)\right], \tag{12}$$

$$\sigma_y=\frac{4\mu h}{\aleph+1}\left[-y+\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(2x(y-\beta a)\cos r_1+(x^2-y^2+2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2)\sin r_1\right)\right]+$$
$$+\frac{4\mu hy}{\aleph+1}\left[1-\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(2x\cos r_1-2(y+\beta a)\sin r_1\right)-\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\rho_1\rho_2\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(\left(x^2-y^2+2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(\rho_1\gamma_1+\rho_2\gamma_2)+2x(y-\beta a)(\rho_1\delta_1+\rho_2\delta_2)\right)\right]+\frac{4\mu h}{\aleph+1}\left[-y+\frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left((x^2-y^2-2\beta ay-\left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2)\sin r_2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2x(y+\beta a)\cos r_2\right)\right], \tag{13}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{4\mu hy}{\aleph+1}\left[\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(2x\sin r_1 + 2(y-\beta a)\cos r_1\right) + \frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\rho_1\rho_2\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(2x(y-\beta a)(\rho_1\gamma_1+\rho_2\gamma_2) - \right.\right. \tag{14}$$

$$\left.\left. -(x^2-y^2+2\beta ay - \left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2(\rho_1\delta_1+\rho_2\delta_2)\right)\right] -$$

$$-\frac{4\mu h}{\aleph+1}\left[x + \frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(2x(y-\beta a)\sin r_1 - (x^2-y^2-2\beta ay - \left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2)\cos r_1\right)\right] +$$

$$+\frac{4\mu h}{\aleph+1}\left[x - \frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(x^2-y^2-2\beta ay - \left(\frac{1}{2}+2\beta^2\right)a^2\cos r_2 - 2x(y+\beta a)\sin r_2\right)\right]$$

Для функции напряжения (7) решение задачи приведено в [2] и имеет вид

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi}\frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\sin r_1 - \frac{3P}{2\pi}\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\sin r_2 - \frac{yP}{\pi}\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\rho_1\rho_2\sqrt{\rho_1\rho_2}}[\rho_1\gamma_1+\rho_2\gamma_2], \tag{15}$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{2\pi}\frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\sin r_1 - \frac{P}{2\pi}\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\sin r_2 + \frac{yP}{\pi}\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\rho_1\rho_2\sqrt{\rho_1\rho_2}}[\rho_1\gamma_1+\rho_2\gamma_2], \tag{16}$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2\pi}\frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\cos r_1 - \frac{P}{2\pi}\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\cos r_2 - \frac{yP}{\pi}\frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\rho_1\rho_2\sqrt{\rho_1\rho_2}}[\rho_1\delta_1+\rho_2\delta_2], \tag{17}$$

где

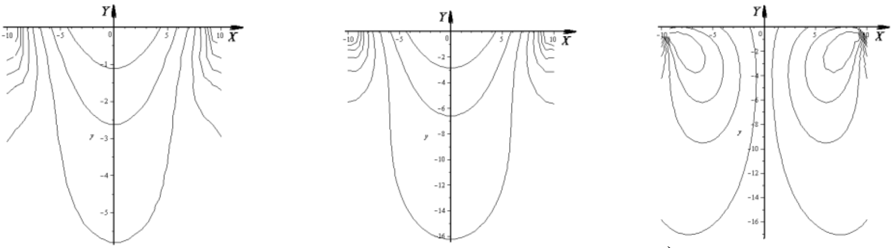
$$r_1 = \frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \beta\ln\frac{\rho_2}{\rho_1},\ r_2 = \frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \beta\ln\frac{\rho_2}{\rho_1},\ \text{а}\ \delta_i\ \text{и}\ \gamma_i\ (i=1,2)$$

определяются формулами (10).

Складывая соответствующие выражения для компонент горизонтального, вертикального и касательного напряжения, определенные формулами (12) – (17), получаем решение рассматриваемой задачи.

На рис. 2 приведены изолинии компонент напряжений, построенные на основании формул (12) – (17) при $a=10$ для глинистого грунта при конкретном значении величины прогиба h и «приведенной» вертикальной нагрузки P^*.

Значение β получено из формулы (5) с учетом коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}42$ для глинистого грунта [4].



а) б) в)

Рис. 2. Изолинии горизонтального а), вертикального б) и касательного в) напряжения при: $h = 1, \quad P^* = 1$.

Полагая в (13) и (14) $y = 0,\ x = t, \theta_1 = \pi,\ \theta_2 = 0,\ \rho_1 = |a - t|,\ \rho_2 = |a + t|,$ получим формулы давления и касательного напряжения для точек t под штампом, при заданной величине прогиба h. Имеем

$$P(t) = \frac{4\mu h}{\sqrt{\aleph}\sqrt{a^2 - t^2}}\left[\left(t^2 - \left(\frac{1}{2} + 2\beta^2\right)a^2\right)\cos\left(\beta \ln\frac{a+t}{a-t}\right) - 2\beta a t \sin\left(\beta \ln\frac{a+t}{a-t}\right)\right], \quad (18)$$

$$T(t) = \frac{4\mu h}{\sqrt{\aleph}\sqrt{a^2 - t^2}}\left[\left(t^2 - \left(\frac{1}{2} + 2\beta^2\right)a^2\right)\sin\left(\beta \ln\frac{a+t}{a-t}\right) + 2\beta a t \cos\left(\beta \ln\frac{a+t}{a-t}\right)\right]. \quad (19)$$

Рассуждая аналогично, заметим, что компоненты (16) и (17) дают формулы давления и касательного напряжения, т.е.

$$P(t) = \frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - t^2}}\frac{\aleph + 1}{\sqrt{\aleph}}\cos\left(\beta \ln\frac{a+t}{a-t}\right), \quad (20)$$

$$T(t) = \frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - t^2}}\frac{\aleph + 1}{\sqrt{\aleph}}\sin\left(\beta \ln\frac{a+t}{a-t}\right). \quad (21)$$

Формулы (20) и (21) были получены Н.И. Мусхелишвили [1, стр. 417] и В.М. Абрамовым [5].

Формулы давления и касательного напряжения, соответствующие поставленной задаче, получаются сложением формул (18), (20) и (19), (21).

ЛИТЕРАТУРА

1 Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мусхелишвили Н.И. – М.: Наука, 1966.
2. Богомолов А.Н. Методы теории функций комплексного переменного в задачах геомеханики / Богомолов А.Н., Ушаков А.Н. – Волгоград: ВолгГАСУ: Изд-во ВГСПУ «Перемена», 2014.
3. Богомолов А.Н. О симметрии компонент напряжения в однородном и изотропном основании абсолютно жесткого штампа при конечном значении коэффициента трения по контакту «штамп-грунт» / Богомолов А.Н., Ушаков А.Н., Богомолова О.А. // Изв. ТулГУ. Сер. Естеств. Науки. – 2013. Вып. 3. – С. 317-322.
4. Справочник проектировщика. Основания, фундаменты и подземные сооружения / под ред. Е.А. Сорочана и Ю.Г. Трофименкова. – М.: Стройиздат, 1985.
5. Абрамов В.М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения / Абрамов В.М. // Докл. АН СССР. - т. XVII. - №4, 1937. – С. 173-178.

REFERENCES

1 Muskhelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematisheskoy teorii uprugosti: Osnovnye uravneniya Ploskaya teoriya uprugosti. Kruchenie i izgib. [Some basic Tasks of mathematical Elasticity Theory : Main Equations. Plein Elasticity Torsion and Flexure.] 5 th edition, revised and enlarged. Moscow, Nauka Publ., `1966, 707 p. (in Russian).
2. Bogomolov A. N., Ushakov A. N. Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo v zadachakh geomekhaniki [Methods of the Theory of Functions of Complex Variables in Geomechanics Problems] Volgograd, Peremena Publ., 2014, 226 p. (in Russian).
3. Bogomolov A. N., Ushakov A. N., Bogomolova O.A. O simmetrii component napryazheniya v odnorodnom I izotropnom osnovanii absolyutno zhestkogo shtampa pri konechnom znachenii velishiny koeffisienta treniya po kontaktu «shtamp-grunt» [On the Symmetry of the Stress Components in Homogeneous Isotropic Foundation of Totally Rigid Due in Case of Final Value of Friction Coefficient on the contact «Die-Soil»]. Izvestiya Tul’skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki [News of the Tula state university. Natural science]. 2013, no 3., pp. 317 – 322. (in Russian).

4. Sorochan E. A. and Trofimenkova Yu. G., ed. Osnovaniya, fundamenty i podzemnye sooruzheniya [Bases, foundations and underground constructions]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1985. 480 p. (in Russian).
5. Abramov V. M. Problema kontakta uprugoi poluploskosti s absolyutno zhestkim fundamentom pri uchete sil treniya [The problem of the contact of an elastic half-plane with an absolutely rigid foundation in the presence of friction] DAN SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Science]. 1937, T. 17. no.4, pp. 173 – 178. (in Russian).

Статья поступила в редакцию 06.07.2016 г.