

УДК 624.014

Білик С. І., д.т.н. проф.; Тонкачев В. Г., асп.  
КНУБА, м. Київ**ВУЗЛОВА СТІЙКІСТЬ КУПОЛЬНИХ  
КОНСТРУКЦІЙ ЗА МЕТОДОМ  
УЗАГАЛЬНЕНОГО КРИТЕРІЮ**

## АНОТАЦІЯ

Проведено дослідження вузлової стійкості купольних конструкцій на моделях ферм Мізеса прольотом 18м із початковими кутами нахилу стрижнів від 5 до 30 градусів до горизонталі, за допомогою узагальненого критерію стійкості ферм Мізеса. Розглянуто декілька розрахункових випадків: випадок класичної тришарнірної стрижневої системи, та випадки наявності у гребеновому вузлі ферми пружної опори та похилого навантаження, а також їх комбінації. Аналогічні розрахунки проведено за методом скінчених елементів за допомогою програмного комплексу SCAD. Проведено аналіз та порівняння результатів розрахунків за методом скінчених елементів та узагальненим критерієм стійкості ферм Мізеса.

Ключові слова: купольна конструкція, ферма Мізеса, вузлова стійкість, метод скінчених елементів, узагальнений критерій стійкості.

**Актуальність** використання купольних конструкцій обумовлена низкою позитивних властивостей, серед яких є: менші витрати теплової енергії у порівнянні із іншими конструкціями покриття, архітектурна виразність, можливість перекривати великі об'єми простору із мінімальною площею покриття та інші [1].

При проектуванні купольних конструкцій, традиційно прийнято використовувати розрахункові схеми із шарнірними вузловими з'єднаннями. При використанні шарнірних вузлових з'єднань на перший план виходить проблема вузлової стійкості конструкції, а саме стійкості гребенового вузла куполу та прилеглих до нього вузлів. Залежності деформацій купольної системи від навантаження мають нелінійний характер, тому моделювати роботу вузлових з'єднань конструкції під навантаженням зручно із використанням ферми Мізеса як розрахункової моделі.

Перші дослідження тришарнірних стрижневих систем на стійкість були виконані Р. Мізесом

(Richard Edler von Mises, 1925р) [2], ці тришарнірні стрижневі системи і було названо ферма Мізеса. Було проведено широке коло досліджень стійкості ферм Мізеса при пружних опорах та за допомогою динамічного критерію [3, 4, 5], ряд досліджень втрати стійкості за симетричною та несиметричною формами був проведений в [6, 7, 8]. Дослідження стійкості ферм Мізеса із використанням методу скінчених елементів наведено в [9].

Дані дослідження базуються на узагальненому критерії стійкості ферм Мізеса при дії похилого навантаження та при наявності в гребеновому вузлі пружної опори, що розглянутий в роботі [10].

**Постановка задачі.** Провести аналіз та порівняння методів розрахунку вузлової стійкості ферми Мізеса за допомогою узагальненого критерію стійкості та за допомогою методу скінчених елементів із використанням програмного комплексу SCAD.

**Методика.** Спираючись на знайдені раніше залежності [10], були визначені критичні значення навантаження для різних розрахункових ситуацій, пошук критичного значення виконувався із використанням методу "золотого перетину" [11]. Перевірено поведінку ферм Мізеса під навантаженням за допомогою методу скінчених елементів із використанням програмного комплексу SCAD. Методика розрахунку геометрично-нелінійних систем за методом скінчених елементів наведена в роботі [12].

За розрахункові схеми прийнято класичну ферму Мізеса з початковими кутами нахилу стрижнів від вертикалі  $\alpha_{0l} = 60, 70, 80, 85$  градусів. Вихідні дані для розрахункових схем наведені в таблиці 1.

Позначення в табл. 1:  $\beta_p$  – кут нахилу сили від вертикалі, градус;  $k_p$  – параметр жорсткості пружної опори в гребеновому вузлі, т/м;  $a_0$  – початкова 1/2 прольоту ферми.

Навантаження на розрахункову схему прикладалося до гребенового вузла як зосереджена максимальна сила і за допомогою модуля "спеціальні вихідні дані" моделювалось нелінійне навантаження на 25 кроків наступним чином: на протязі перших 20 кроків  $P_{1-20} = 0.05 * P_{max}$  і на 20му кроці сила у гребеновому вузлі набуває максимального значення. Для дослідження поведінки ферми при навантаженнях більших за максимальне, додатково схема була довантажена 5-ма кроками, де  $P_{21-25} = 0.01 * P_{max}$ . У випадку похилого навантаження до уваги бралось значення проєкцій макси-

Таблиця 1. Вихідні дані розрахунку

Початк. кут нахилу стрижнів $\alpha_{0i}$	Прольот ферми $2^*a_0$ , м	Початк. висота ферми $h_0$ , м	Відносна сила в гребеневому вузлі ферми $P_{rel} * 10^{-3}$ , при			Тип елементу SCAD	Поздовж. жорсткість стрижнів $EA_{cal}$ , т
			$\beta_p=0, k_v=0$	$\beta_p=0, k_v=0,01$	$\beta_p=15, k_v=0,01$		
60	18,0	5,196	55,30	81,50	81,91	301	1,0
70	18,0	3,276	16,40	34,80	34,58	301	1,0
80	18,0	1,587	2,00	66,60	25,98	301	1,0
85	18,0	0,787	0,3	26,24	34,97	301	1,0

мальної відносної сили на вісі Z та X, для цього значення максимальної відносної сили було помножено на  $\cos\beta_p$  та  $\sin\beta_p$  відповідно (табл. 2).

Для врахування наявності в гребеневому вузлі пружної опори, в вузол було додатково введено спеціальний елемент "в'язь кінцевої жорсткості" (тип елементу 51) із значенням жорсткості по вісі Z – 0,01т/м.

При значеннях початкового кута нахилу стрижнів від вертикалі 80 та 85 градусів, за наявності пружної опори в гребеневому вузлі з параметром жорсткості  $k_v = 0,01$  згідно [10] максимального значення відносної сили не спостерігається (графік залежності відносної сили від відносного вертикального переміщення не має виражених екстремумів), тому були прийняті умовні значення максимальної сили (див. табл. 2).

Позначення в табл. 2:  $\alpha_{0i}$  – початковий кут нахилу стрижнів від вертикалі;  $k_v$  – параметр жорсткості пружної опори в гребеневому вузлі;  $\beta_p$  – кут нахилу сили в гребеневому вузлі від вертикалі.

Після розрахунків всіх систем на дію заданого навантаження були отримані табличні значення вертикальних переміщень для кожного з кроків навантаження. По отриманих переміщеннях був вико-

наний зворотній аналіз за допомогою узагальненого критерію стійкості ферм Мізеса [10] і для кожного з переміщень отримано значення відносної сили.

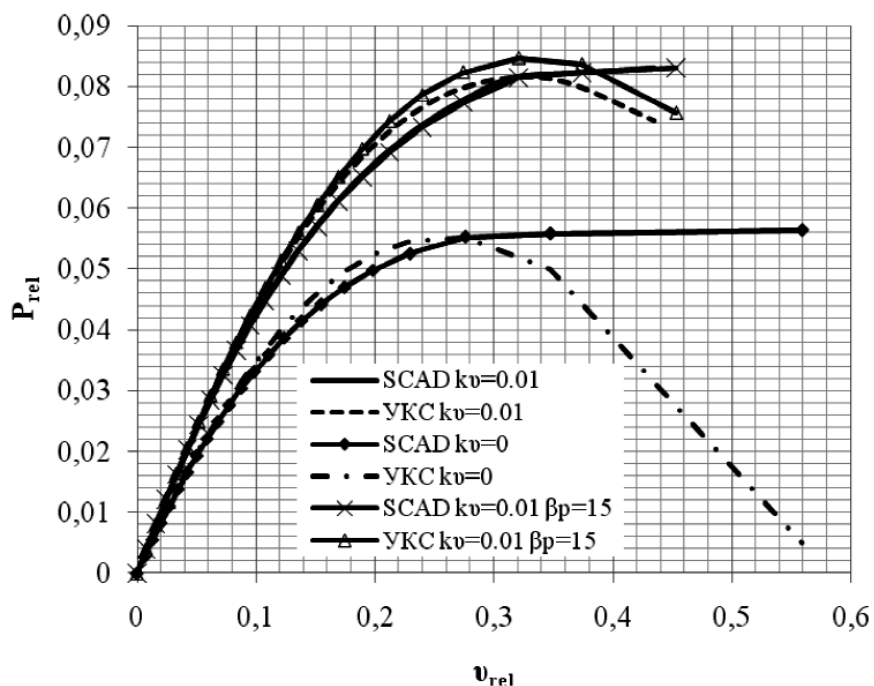
**Результати.** Відносна сила в гребеневому вузлі (див. рис.1) при розрахунку за методом скінчених елементів зростає до максимального значення, після чого деформація системи досить стрімко продовжується майже без зростання відносної сили. За числовими дослідженнями за узагальненим критерієм стійкості, спостерігається схожа залежність відносної сили від відносного вертикального переміщення, але при досягненні значення відносної деформації при якому діє максимальна відносна сила, спостерігається зниження відносної сили при також досить стрімкому зростанні деформації [10].

Максимальне навантаження, при якому відбувається втрата вузлової стійкості ферми, при введенні у гребеневий вузол пружної опори з параметром жорсткості  $k_v=0,01$  збільшується майже у півтора рази.

При куті нахилу стрижнів ферми 70 градусів критична відносна сила з варіантом наявності пружної опори приблизно у 2,25 рази більша ніж критична сила з варіантом без пружної опори (рис. 2).

Таблиця 2. Покрокове навантаження на ферму Мізеса

Крок, i	Відносне навантаження в гребеневому вузлі ферми, $P_{rel}[i]*10^{-3}$											
	$\alpha_{0i}=60^\circ$			$\alpha_{0i}=70^\circ$			$\alpha_{0i}=80^\circ$			$\alpha_{0i}=85^\circ$		
	$k_v$			$k_v$			$k_v$			$k_v$		
	0	0.01		0	0.01		0	0.01		0	0.01	
	$\beta_p$			$\beta_p$			$\beta_p$			$\beta_p$		
	0	0	15°	0	0	15°	0	0	15°	0	0	15°
1	2.77	4.08	4.10	0.82	1.74	1.73	0.10	3.33	1.30	0.02	1.96	1.75
2	5.53	8.15	8.19	1.64	3.48	3.46	0.20	6.66	2.60	0.03	3.91	3.50
3	8.30	12.23	12.29	2.46	5.22	5.19	0.30	9.99	3.90	0.05	5.87	5.24
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
25	58.07	85.58	86.01	17.22	36.54	36.31	2.10	69.93	27.28	0.32	41.06	36.71



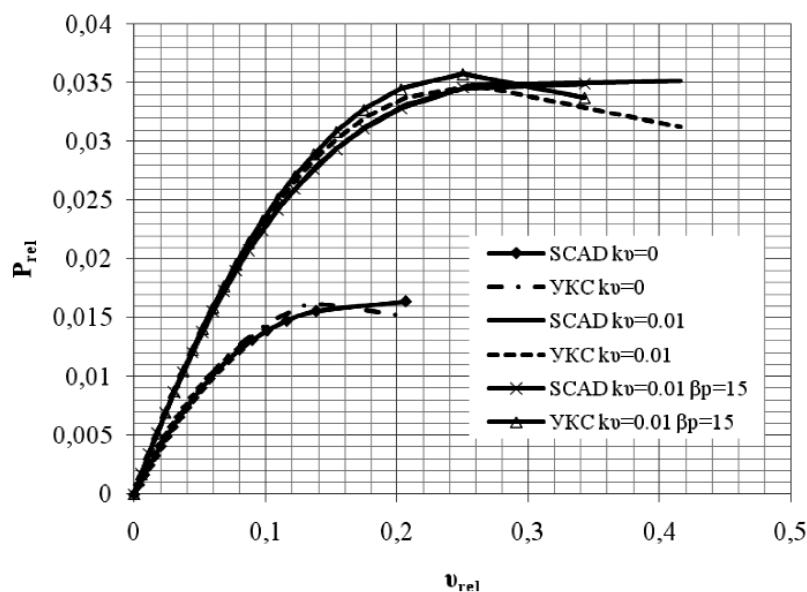
**Рис. 1.** Графіки залежностей відносної сили  $P_{rel}$  в гребеновому вузлі ферми від відносного вертикального переміщення  $P_{rel}$ , отримані за методами скінчених елементів (SCAD)

та узагальненим критерієм стійкості (УКС) при  $\alpha_{0l} = 60^\circ$ :  $P_{rel}$  – відносна сила у гребеновому вузлі;  $v_{rel}$  – відносне вертикальне переміщення гребенового вузла;  $\alpha_{0l}$  – початковий кут нахилу стрижнів від вертикалі;  $k_v$  – параметр жорсткості пружної опори гребенового вузла ферми;  $\beta_p$  – кут нахилу сили від вертикалі;

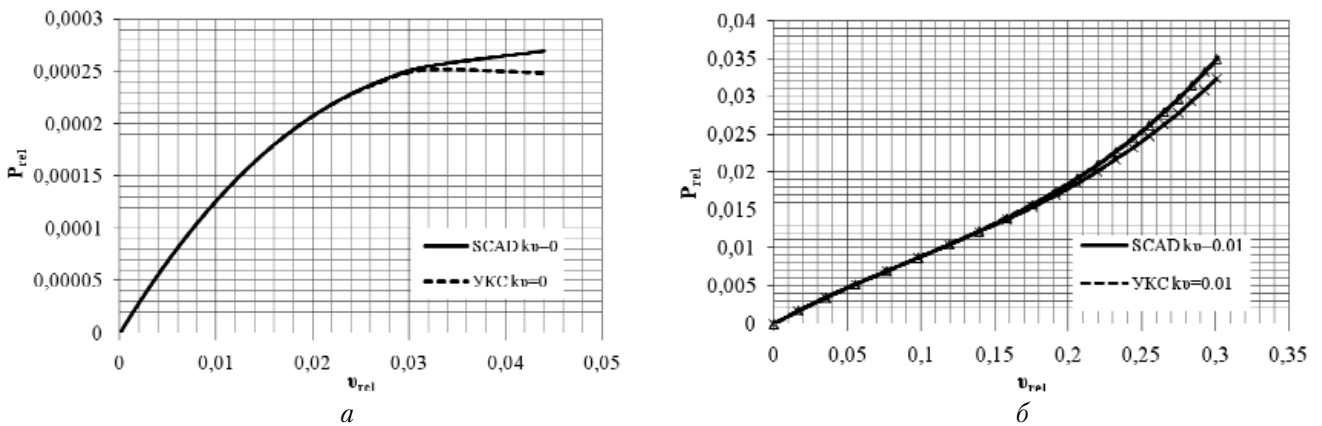
При подальшому збільшенні кута нахилу стрижнів до 80, 85 градусів від вертикалі, значення максимальних відносних сил при наявності пружної опори та без неї будуть відрізнятися вже на порядок,

тому для наочності результати цих досліджень були поділені на окремі графіки (рис. 3, 4).

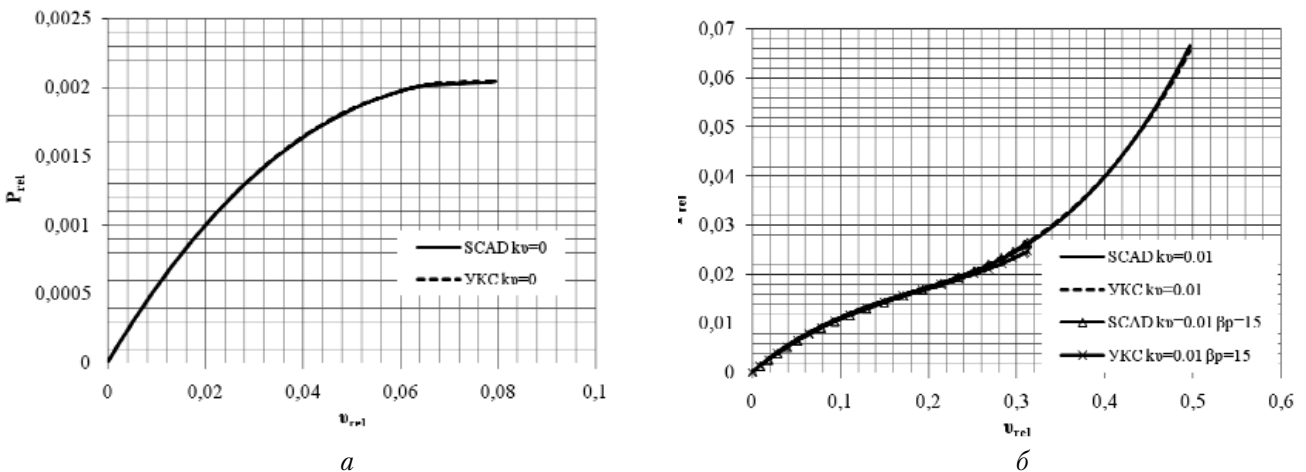
З графіків залежностей (рис. 1 – 4) видно, що деформування ферми Мізеса під навантаженням



**Рис. 2.** Графіки залежностей відносної сили  $P_{rel}$  в гребеновому вузлі ферми від відносного вертикального переміщення  $P_{rel}$ , отримані за методами скінчених елементів (SCAD) та узагальненим критерієм стійкості (УКС) при  $\alpha_{0l} = 70^\circ$ , ( $\alpha_{0l}$ ,  $k_v$ ,  $\beta_p$ ,  $v_{rel}$ ,  $P_{rel}$  – див. рис. 1.)



**Рис. 3.** Графіки залежностей відносної сили  $P_{rel}$  в гребеновому вузлі ферми від відносного вертикального переміщення  $P_{rel}$ , отримані за методами скінчених елементів (SCAD) та узагальненим критерієм стійкості (УКС) при  $\alpha_{0l} = 85^\circ$ , ( $\alpha_{0l}, k_v, \beta_p, v_{rel}, P_{rel}$  – див. рис. 1.): а) при  $k_v=0.01$ , б) при  $k_v=0, \beta_p=0$



**Рис. 4.** Графіки залежностей відносної сили  $P_{rel}$  в гребеновому вузлі ферми від відносного вертикального переміщення  $P_{rel}$ , отримані за методами скінчених елементів (SCAD) та узагальненим критерієм стійкості (УКС) при  $\alpha_{0l} = 80^\circ$  ( $\alpha_{0l}, k_v, \beta_p, v_{rel}, P_{rel}$  – див. рис. 1.): а) при  $k_v=0$  б) при  $k_v=0.01$

при розрахунку за методом скінчених елементів та за методом узагальненого критерію стійкості мають схожий характер, і при малих кутах нахилу стрижнів ферми до горизонту (60-85 градусів від вертикалі) майже не відрізняються.

**Висновки.** 1. Проведено аналіз та порівняння методів розрахунку вузлової стійкості купольних систем із використанням узагальненого критерію стійкості та методу скінчених елементів із використанням програмного комплексу SCAD. Отримано схожі результати розрахунку, що доводить правомочність використання узагальненого критерію стійкості, що дозволить проектувальникові на початкових етапах проектування купольної конструкції прогнозувати вузлову стійкість куполів при відомих геометричних параметрах.

#### ЛІТЕРАТУРА

- Білик С. І. Рациональна форма геометричної схеми рамного каркасу з карнизними похилими елементами навколо функціонального об'єму [Текст] / С.І. Білик // Прикладна геометрія та інженерна графіка., міжвід. наук. зб. МОН України, КНУБА. – К.: 2004. – Вип. 74. – С. 228-235.
- Mises R. *Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie* [Електронний ресурс] // *Z. Angew. Math. Mech.* 3, 406, 1923. – режим доступу: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/zamm.19230030602/pdf>
- Пановко Я. Г. *Устойчивость и колебания упругих систем* [Текст] / Я.Г. Пановко, И.И. Губанов. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
- Бондарь Н.Г. *Устойчивость и колебания упругих систем в современной технике* [Текст] / Н.Г.

Бондарь. — Киев., Вища школа, 1987. — 210 с.

5. Mikhlin Yuri V. *Nonlinear normal vibration modes and their applications* [Электронный ресурс] / Y.V. Mikhlin // *Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications Serra Negra (SP — ISSN 2178-3667), 2010. P. 151-171. — режим доступу: <http://www.sbmac.org.br/dincon/trabalhos/PDF/invited/68092.pdf>.*

6. Феодосьев В. И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов* [Текст] / В.И. Феодосьев. — М., Наука, 1967. — 376 с.

7. Nachbar W. *Dynamic snap — through of a simple viscoelastic truss.* / Nachbar W., Huang N.C. // *Q.Appl.Math.*, 25, p. 65-82, 1967. — режим доступу: [https://www.researchgate.net/publication/268490270\\_Dynamic\\_snap-through\\_of\\_a\\_simple\\_viscoelastic\\_truss](https://www.researchgate.net/publication/268490270_Dynamic_snap-through_of_a_simple_viscoelastic_truss).

8. Marcelo Greco. *Analytical solutions for geometrically nonlinear trusses.* [Электронный ресурс] / Marcelo Greco. Carlos Eduardo Rodrigues Vicente // *Esc. Minas vol.62 no.2 Ouro Preto Apr. June 2009.* — режим доступу: <http://www.scielo.br/scielo>.

9. Crisfield M. *Non?Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1.* [Электронный ресурс] / M. Crisfield // *J. Eng. Mech.*, 10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:7(1504), 1504-1505. — режим доступу: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1993\)119:7\(1504\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:7(1504))

10. Білик С. І., Вплив на стійкість ферми мізеса напрямку дії вузлового навантаження при пружних опорах на прикладі сталевого ребристо-кільцевого купола. [Текст] / В.Г. Тонкачев, С.І. Білик // *Строительство, материаловедение, машиностроение., сб. науч. трудов. Вып.№82. — дн-вск., ГВУЗ ПГАСА, 2015.- с. 44-49.*

11. Карманов В. Г. *Математическое программирование: Учеб. пособие — 5е изд. , стереотип* [Текст] / В. Г. Карманов — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 264с.

12. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. *Расчетные модели сооружений и возможность их анализа*

[Текст] / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер // Киев, Изд-во "Сталь", 2002., 600 с., ил.

#### АННОТАЦИЯ

Выполнены исследования узловой устойчивости купольных конструкций на моделях ферм Мизеса пролетом 18м с начальными углами наклона стержней от 5 до 30 градусов к горизонтали, при помощи обобщенного критерия устойчивости ферм Мизеса. Рассмотрен случай классической трехшарнирной системы и случаи наличия в гребневом узле фермы упругой опоры и наклонной нагрузки, а также их комбинации. Аналогичные расчеты выполнены по методу конечных элементов при помощи программного комплекса SCAD. Проведен анализ и сравнение результатов расчетов по методу конечных элементов и при помощи обобщенного критерия устойчивости ферм Мизеса.

Ключевые слова: купольная конструкция, ферма Мизеса, узловая устойчивость, метод конечных элементов, обобщенный критерий устойчивости.

#### ANNOTATION

The researches of nodal stability of domed structures on the models of the von-Mises trusses with the span of 18m and with the initial angle of rod slope from 5 to 30 degrees to horizontal axis, using the generalized criterion of stability of the von-Mises truss were conducted in this paper. The classical case of the three-hinged rod system and the cases of presence in the ridge node of the truss of elastic support and of the inclined load and also their combinations were considered. The similar calculations by the method of finite elements using the program complex SCAD were implemented. An analysis and comparison of the results of calculations by the finite elements method and using the generalized criterion of stability of the von-Mises truss were conducted.

Keywords: domed structure, von-Mises truss, nodal stability loss, finite elements method, generalized criterion of stability.