УДК 519.816:519.669

ПОДОБИЕ ОБРАТНО-СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОБОЧНОЙ ДИАГОНАЛИ

Муха И.П., к.т.н.,
Литвиненко П.Л., к.т.н.,
Финогенов А.Д., к.т.н.
Национальный технический университет Украины «КПИ» (г. Киев)

В работе рассматриваются обратно-симметричные матрицы, получаемые в результате парных сравнений альтернатив. Приведено доказательство подобия матриц с перестановкой элементов относительно побочной диагонали.

Ключевые слова: обратно-симметричные матрицы, подобие матриц, парное сравнение альтернатив, метод анализа иерархий, принятие решений.

Постановка проблемы. В методе анализа иерархий (МАИ) [1] и ряде других методов, одним из этапов получения оценок является парное сравнение альтернатив. Получаемые в результате данного сравнения матрицы, являются обратно-симметричными. Оценить согласованность суждений эксперта или лица принимающего решения (ЛПР), которая может быть нарушена как человеческими факторами (некомпетентностью, возможностями по оценке, отсутствием достоверной информации об альтернативах и т.д.), так и недостатками используемой шкалы сравнения. Оценка согласованности (ОС) суждений эксперта проводится путем сравнения индекса согласованности (ИС) с индексом случайной согласованности (ИСС):

$$ОС = ИС / ИСС\,; \tag{1}$$

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - N}{N - 1}, \tag{2}$$

где $\lambda_{\max}$ – максимально собственное число матрицы, N – размерность матрицы. ИСС в свою очередь, также определяется на основании (2) для случайной выборки обратно-симметричных матриц, элементами которых являются соответствующие элементы выбранной шкалы сравнения. В разных источниках [2], данные для ИСС отличаются, в виду различий в методах расчета, размерах выборки и исследуемой шкалы.

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [2] приведены результаты полученных оценок ИСС различными авторами. Для матриц малой размерности (N=3-5), в работе [3] было предложено использовать вместо случайной выборки матриц – все возможные матрицы для выбранной шкалы сравнения. Подобие обратно-симметричных матриц относительно побочной диагонали позволяет уменьшить количество необходимых вычислений на 47-50%.

Формулирование целей статьи. В работе [3] использовалось свойство симметричности обратно-симметричных матриц относительно побочной диагонали, но оно было дано без должного математического доказательства. В данной статье рассматривается доказательство подобия данных матриц и, соответственно, корректность полученных оценок [3].

Основная часть. Рассмотрим две матрицы А и В (N=3), которые отличаются перестановкой элементов $a_{12} \to a_{23}$ = $b_{23} \to b_{12}$. Т.к. матрицы А и В обратно-симметричны, то однозначно определяются элементы $a_{21} = 1/a_{12}$, $a_{32} = 1/a_{23}$, $b_{21} = 1/b_{12}$, $b_{32} = 1/b_{23}$.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a_1/b_1 & a_2/b_2 \\ b_1/a_1 & 1 & a_3/b_3 \\ b_2/a_2 & b_3/a_3 & 1 \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & a_3/b_3 & a_2/b_2 \\ b_3/a_3 & 1 & a_1/b_1 \\ b_2/a_2 & b_1/a_1 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Матрица А подобна матрице В (А~В) , если существует такая неособенная матрица S, что:

$$S^{-1}AS = B. \qquad (2)$$

С другой стороны,

$$T^{-1}BT = A. \qquad (3)$$

Воспользуемся свойством подобных матриц: если матрица А подобна матрице В (А~В), а матрица В, в свою очередь подобна матрице С (В~С), то матрица А подобна С (А~С). Для нахождения матриц S, S^{-1}, T, T^{-1} (2,3), приведем матрицы А и В (1) с помощью преобразований подобия [4] к виду Фробениуса F_A и F_B (4).

$$\begin{gathered} F_A = M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2}, \\ F_B = L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1} B L_{n-1} L_{n-2}, \end{gathered} \qquad (4)$$

где L_{n-1} , L_{n-2} , M_{n-1} , M_{n-2} – матрицы, полученные в процессе преобразования матриц А и В к виду Фробениуса. В этом случае, если матрица А~В, то F_A~F_B и F_A = F_B, т.к. подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены, а (2) с учетом (4) преобразуется к виду (5):

$$L_{n-1} L_{n-2} M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1} = B, \qquad (5)$$

где $S = M_{n-1} M_{n-2} L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1}$, $S^{-1} = L_{n-1} L_{n-2} M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1}$.

Шаг 1. Приведение n-й строки матрицы А к виду Фробениуса:

$$M_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_3 b_2}{a_2 b_3} & \dfrac{a_3}{b_3} & -\dfrac{a_3}{b_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; M_{n-1}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{b_2}{a_2} & \dfrac{b_3}{a_3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$A_{(n-1)} = M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{a_1 a_3 b_2}{a_2 b_1 b_3} & \dfrac{a_1 a_3}{b_1 b_3} & \dfrac{a_2}{b_2} - \dfrac{a_1 a_3}{b_1 b_3} \\ \dfrac{b_1 b_3}{a_1 a_3} - \dfrac{a_1 a_3 b_2^2}{a_2^2 b_1 b_3} & 2 + \dfrac{a_1 a_3 b_2}{a_2 b_1 b_3} & 1 - \dfrac{a_1 a_3 b_2}{a_2 b_1 b_3} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Шаг 2. Приведение n-1 строки матрицы А к виду Фробениуса:

$$M_{n-2} = \begin{vmatrix} \dfrac{a_1 a_2^2 a_3 b_1 b_3}{a_2^2 b_1^2 b_3^2 - a_1^2 a_3^2 b_2^2} & \dfrac{-a_1 a_2 a_3 (a_1 a_3 b_2 + 2 a_2 b_1 b_3)}{a_2^2 b_1^2 b_3^2 - a_1^2 a_3^2 b_2^2} & \dfrac{-a_1 a_2 a_3}{a_1 a_3 b_2 + a_2 b_1 b_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_{n-2}^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{b_1 b_3}{a_1 a_3} - \dfrac{a_1 a_3 b_2^2}{a_2^2 b_1 b_3} & 2 + \dfrac{a_1 a_3 b_2}{a_2 b_1 b_3} & 1 - \dfrac{a_1 a_3 b_2}{a_2 b_1 b_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$F_A = A_{(n-2)} = M_{n-2}^{-1} A_{(n-1)} M_{n-2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & \dfrac{(a_2 b_1 b_3 - a_1 a_3 b_2)^2}{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Шаг 3. Приведение n-й строки матрицы В к виду Фробениуса:

$$L_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_1 b_2}{a_2 b_1} & \dfrac{a_1}{b_1} & -\dfrac{a_1}{b_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; L_{n-1}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{b_2}{a_2} & \dfrac{b_1}{a_1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$B_{(n-1)} = L_{n-1}^{-1} B L_{n-1} = A_{(n-1)}.$$

Шаг 4. Приведение n-2 строки матрицы B к виду Фробениуса:

$$L_{n-2} = M_{n-2};\ L_{n-2}^{-1} = M_{n-2}^{-1};$$

$$F_B = B_{(n-2)} = L_{n-2}^{-1} B_{(n-1)} L_{n-2} = F_A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & \dfrac{(a_2 b_1 b_3 - a_1 a_3 b_2)^2}{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Шаг 5. Вычисление матрицы S:

$$S = M_{n-1} M_{n-2} L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1} = M_{n-1} L_{n-2} L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1} = M_{n-1} L_{n-1}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a_3 b_1}{a_1 b_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для матриц большей размерности N=4 и N=5 данный алгоритм также позволяет построить неособенную матрицу S, которая однако имеет гораздо более сложный вид.

Таким образом, доказана симметрия блоков (1 - 2) (рис. 1) относительно побочной диагонали и подобие соответствующих матриц для обратно-симметричных матриц.

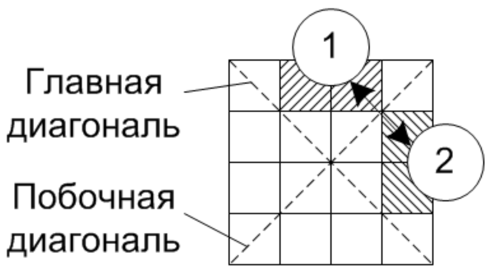

Рис. 1. Схема симметрии блоков

Отметим, что подобие матриц осуществляется только в случае симметрии всего блока, а не отдельных элементов в блоках. Также элементы блоков 1–2 однозначно определяют все элементы матрицы за исключением диагональных элементов.

Выводы. Доказательство подобия обратно-симметричных матриц относительно побочной диагонали позволяет значительно (до 50%) сократить количество матриц, которых необходимо рассчитать, для получения точного (или с заданной точностью) значения индекса случайной согласованности.

Литература

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М.: «Радио и связь», 1993. – 278 с.
2. Панкратова Н.Д. Моделі і методи аналізу ієрархій. Теорія. Застосування : навч. посібник / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашковська. – К.: ІВЦ Видавництво «Політехніка», 2010. – 372 с.
3. Попович Е.С. Особенности определения индекса случайной согласованности в метода анализа иерархий (МАИ) / А.Д. Финогенов, П.Л. Литвиненко, Е.С. Попович // «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності»: 3-я міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених, 22-23 квітня 2014, Київ : матеріали. – К., 2014. – С. 205-210.
4. Данилина Н.И. Численные методы : Учебник для техникумов / Н.И. Данилина, Н.С. Дубровская, О.П. Кваша [и др.]. – М.: «Высш. школа», 1976. – 368 с.

ПОДІБНІСТЬ ОБЕРНЕНО-СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ ВІДНОСНО ПОБІЧНОЇ ДІАГОНАЛІ

Муха І.П., Литвиненко П.Л., Фіногенов О.Д.

В роботі розглядаються обернено-симетричні матриці, що отримуються в результаті парних порівнянь альтернатив. Наведено доказ подібності матриць з перестановкою елементів відносно побічної діагоналі.

Ключові слова: обернено-симетричні матриці, подібність матриць, парне порівняння альтернатив, метод аналізу ієрархій, прийняття рішень.

BACK-SYMMETRIC MATRICES SIMILARITY RELATIVE TO SECONDARY DIAGONAL

I. Muha, P. Lytvynenko, O. Finogenov

Back-symmetric matrices obtained as a result of paired comparisons of alternatives are analyzed in the paper. An evidence of matrices' similarity with elements scrambling relative to secondary diagonal is proposed.

Key words: back-symmetric matrices, matrices similarity, paired comparison of alternatives, analytic hierarchy process, decision making.