УДК 514.18

УТВОРЕННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ, ЯКІ ЛЕЖАТЬ НА ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ АСТРОЇДИ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Муквич М.М., к.т.н.*
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ)

У роботі здійснено аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання астроїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній.

Ключові слова: мінімальна поверхня, ізометрична сітка координатних ліній, лінійний елемент поверхні, астроїда, ізотропна крива.

Постановка проблеми. Конструювання та аналітичний опис мінімальних поверхонь є важливою проблемою неперервного геометричного моделювання. До мінімальних поверхонь приводить геометрична задача: знайти поверхню, яка проходить через замкнену криву і має найменшу площу [1].

Аналіз наукових робіт показав, що існує три напрямки сучасних досліджень аналітичного опису мінімальних поверхонь: створення нових потужних методів у варіаційному численні, які дозволяють довести регулярність мінімальних поверхонь у багатовимірних випадках [2]; вирішення практичних задач конструювання поверхонь архітектурних оболонок [3, 4] та розробка ефективних чисельних методів розв’язування диференціальних рівнянь у частинних похідних, до яких приводить задача аналітичного опису мінімальних поверхонь [4, 5]; розробка методів конструювання неперервного каркасу мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної [6, 7]. Дана робота присвячена реалізації метода аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналітичний опис неперервного каркасу мінімальних поверхонь пов'язаний із знаходженням параметричних рівнянь ізотропних кривих нульової

---

* Науковий консультант – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф.

довжини [1]. Побудову мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є реалізовано у дисертаційному дослідженні [6]. У дисертаційному дослідженні [7] знайдено в окремих випадках способи конструювання просторових ізотропних кривих за формулами Шварца та Вейєрштрасса [1]. Тому розширення способів утворення ізотропних кривих за допомогою функцій комплексної змінної є важливою умовою для розв'язання проблеми конструювання неперервного каркасу мінімальних поверхонь.

Формулювання цілей статті. Знайти аналітичний опис поверхні обертання астроїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній та ізотропних кривих, що лежать її поверхні. На основі вказаних ізотропних кривих побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них мінімальні поверхні.

Основна частина. Розглянемо поверхню обертання, параметричні рівняння якої мають вигляд:

$$X(\tau;v)=\varphi(\tau)\cdot\cos v;\quad Y(\tau;v)=\varphi(\tau)\cdot\sin v;\quad Z(\tau;v)=\psi(\tau),\tag{1}$$

де $\varphi=\varphi(\tau)$; $\psi=\psi(\tau)-$параметричні рівняння меридіана поверхні обертання.

У роботі [8] наведено алгоритм відшукання параметричних рівнянь меридіана поверхні обертання, при якому поверхня буде віднесена до ізометричної сітки координатних ліній. Перехід від ортогональної до ізометричної сітки координат здійснюється за допомогою введення нової змінної t яка пов’язана із змінною τ наступним чином [8]:

$$t=\int\frac{\sqrt{(\varphi'_\tau)^2+(\psi'_\tau)^2}}{\varphi}d\tau.\tag{2}$$

Розглянемо поверхню обертання астроїди, яку задано параметричними рівняннями:

$$\begin{gathered}X(\tau;v)=r\cos^3\tau\cdot\cos v;\quad Y(\tau;v)=r\cos^3\tau\cdot\sin v;\\ Z(\tau;v)=r\sin^3\tau,\end{gathered}\tag{3}$$

де $r>0-$параметр астроїди; $\tau\in[0;\,2\pi)$; $v\in[0;\,2\pi)$.

Визначивши, згідно (2), умову переходу до ізометричної сітки координатних ліній $\tau(t)=\arccos\left(\frac{3}{t}\right)$, отримаємо параметричні рівняння поверхні обертання астроїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній:

$$X(t;v)=\frac{27r}{t^3}\cdot\cos v;\quad Y(t;v)=\frac{27r}{t^3}\cdot\sin v;\ Z(t;v)=r\left(1-\frac{9}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}.\tag{4}$$

Розкладемо на множники вираз лінійного елемента поверхні (4), що визначає довжину будь-якої кривої, яка лежить на його поверхні:

$$ds^2 = \frac{729r^2}{t^6} \cdot (dv - i \cdot dt)(dv + i \cdot dt), \tag{5}$$

де $i -$ уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$v = i \cdot t + C \quad \text{або} \quad v = -i \cdot t + C, \tag{6}$$

де $C -$ довільна стала інтегрування.

При підстановці виразу $v = i \cdot t + C$ у рівняння (4) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної кривої, яка лежить на поверхні обертання астроїди:

$$x(t) = \frac{27r}{t^3} \cdot \cos(i \cdot t + C); \; y(t) = \frac{27r}{t^3} \cdot \sin(i \cdot t + C); \; z(t) = r\left(1 - \frac{9}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{7}$$

Здійснимо для функцій (7) заміну: $t = u + i \cdot v$. Відокремивши дійсну та уявну частину, отримаємо рівняння мінімальної поверхні ($C -$ довільна стала):

$$X(u,v) = \frac{27r\left(u\left(u^2 - 3v^2\right)\cos(C - v)\mathrm{ch}(u) - v(3u^2 - v^2)\sin(C - v)\mathrm{sh}(u)\right)}{\left(u^2 + v^2\right)^3};$$

$$Y(u,v) = \frac{27r\left[u\left(u^2 - 3v^2\right)\sin(C - v)\mathrm{ch}(u) + v(3u^2 - v^2)\cos(C - v)\mathrm{sh}(u)\right]}{\left(u^2 + v^2\right)^3}; \tag{8}$$

$$Z(u,v) = r\left[\frac{324u^2v^2}{\left(u^2 + v^2\right)^4} + \left(1 - \frac{9\left(u^2 - v^2\right)}{\left(u^2 + v^2\right)^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{18uv}{\left(u^2 + v^2\right)^2 - 9\left(u^2 - v^2\right)}\right).$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$X^*(u,v) = \frac{-27r\left(u\left(u^2 - 3v^2\right)\sin(C - v)\mathrm{sh}(u) + v(3u^2 - v^2)\cos(C - v)\mathrm{ch}(u)\right)}{\left(u^2 + v^2\right)^3};$$

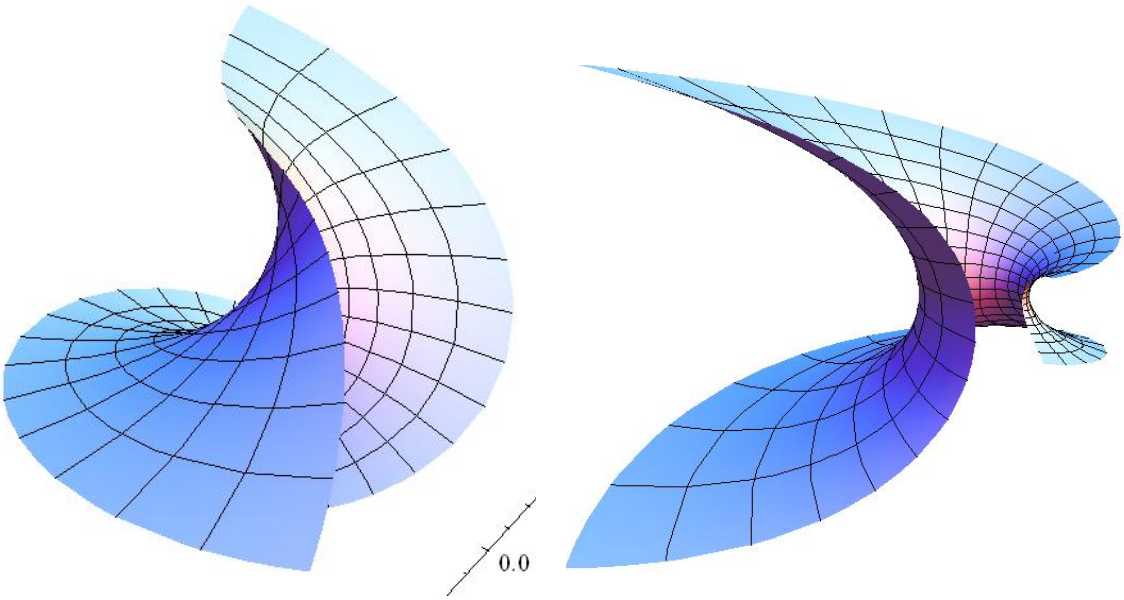
$$Y^*(u,v) = \frac{27r\left[u\left(u^2 - 3v^2\right)\cos(C - v)\mathrm{sh}(u) - v(3u^2 - v^2)\sin(C - v)\mathrm{ch}(u)\right]}{\left(u^2 + v^2\right)^3}; \tag{9}$$

$$Z^*(u,v) = r\left[\frac{324u^2v^2}{\left(u^2 + v^2\right)^4} + \left(1 - \frac{9\left(u^2 - v^2\right)}{\left(u^2 + v^2\right)^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{18uv}{\left(u^2 + v^2\right)^2 - 9\left(u^2 - v^2\right)}\right).$$

На рис.1 (а, б) зображено відсіки мінімальної та приєднаної мінімальної поверхні, побудованих за рівняннями (8) і (9) відповідно при $C = 0;\, u \in [-2;\ldots 2];\;\; v \in [8;\ldots 12]$.

Вираз лінійного елемента поверхні (4) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2 = \frac{729r^2}{t^6} \cdot (dt - i \cdot dv)(dt + i \cdot dv). \tag{10}$$



а *б*

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь:
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (8);
б) відсік приєднаної поверхні, побудованої за рівняннями (9)

Підставивши вирази $t = i \cdot v + C$ або $t = -i \cdot v + C$, отримані із (10), у параметричні рівняння поверхні (4), отримаємо рівняння двох інших сімей уявних ізотропних кривих. Для кожного значення *С* за допомогою знайдених ізотропних кривих можна побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них, які характеризуються спільними метричними властивостями та спільними властивостями кривини поверхні.

Висновки. На поверхні обертання астроїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, для кожного значення *С* можна побудувати чотири сім'ї ізотропних кривих, і кожній кривій поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні.

Література

1. Фиников С.П. Теория поверхностей / С.П. Фиников. – М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
2. Минимальные поверхности / Г. Кархер, Л. Саймон, Ф. Фудзимото, С. Хильдебрандт, Д. Хоффман; под ред. Р. Оссермана; перевод с англ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 352 с.
3. Михайленко В.Е. Конструирование форм современных архитектурных конструкций / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалёв. – Киев: Будівельник, 1978. – 112 с.

4. Абдюшев А.А. Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности / А.А. Абдюшев, И.Х. Мифтахутдинов, П.П. Осипов // Известия КазГАСУ. – 2009. – №2(12). – С. 86-92.
5. Гацунаев М.А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / М.А. Гацунаев, А.А. Клячин // Уфимский мат. журнал. – 2014. – Т. 6, №3. – С. 3-16.
6. Аушева Н.М. Геометричне моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: 05.01.01 / Н. М. Аушева. – К.: КНУБА, 2014. – 38 с.
7. Коровіна І.О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: 05.01.01 / І.О. Коровіна. – К.: КНУБА, 2012. – 20 с.
8. Несвидомин В.Н. Способ аналитического отображения плоских изображений на криволинейные поверхности / В.Н. Несвидомин, Т.С. Пилипака, Т.С. Кремец // «MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture».– Vol. 16, No 3. – Lublin–Rzeszov, 2014. – С. 58 – 65.

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИЗОТРОПНЫХ КРИВЫХ, ЛЕЖАЩИХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ АСТРОИДЫ

Пилипака С.Ф., Муквич Н.Н.

В работе осуществлено аналитическое описание минимальных поверхностей с помощью изотропных кривых, которые лежат на поверхности вращения астроиды, отнесенной к изометрической сети координатных линий.

Ключевые слова: минимальная поверхность, изометрическая сеть координатных линий, линейный элемент поверхности, астроида, изотропная кривая.

CONSTRUCTION OF THE MINIMAL SURFACE USING ISOTROPIC CURVED, LYING ON THE ROTATIONAL SURFACE OF THE ASTROID

S. Pylypaka, M. Mukvich

The paper considers an analytical description of the minimal surfaces with isotropic curves that lie on the surface of rotation of the astroid, referred to the isometric grid of the coordinate lines.

Key words: minimal surface, isometric grid of the coordinate lines, linear element of a surface, astroid, isotropic curve.