

УДК 514.18

## УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ КРИВИЗНОЙ В МЕТОДЕ ВАРИАТИВНОГО ФОРМИРОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ УГЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ

Спиринцев Д.В., к.т.н.,

Балюба И.Г., д.т.н.

*Мелитопольская школа прикладной геометрии,**Мелитопольский государственный педагогический университет**им. Богдана Хмельницкого (Украина)*

Спиринцев В.В., к.т.н.,

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара**(Украина)*

*В работе исследуется вопрос управления кривизной дискретно представленной кривой (ДПК) в процессе сгущения на основе метода вариативного формирования разностных схем угловых параметров.*

*Ключевые слова: дискретно представленная кривая, интерполяция, вариативное дискретное геометрическое моделирование, кривизна ДПК, метод вариативного формирования разностных схем угловых параметров.*

**Постановка проблемы.** Важным элементом, характеризующим форму кривой, является «степень искривленности» или «кривизна» ее в различных точках, которую можно выразить числом [7]. Естественно кривизну кривой в дифференциальной геометрии характеризовать углом поворота касательной, рассчитанным на единицу длины дуги (рис. 1), т.е. отношением  $\omega/\sigma$ . Это отношение носит название средней кривизны длины дуги.

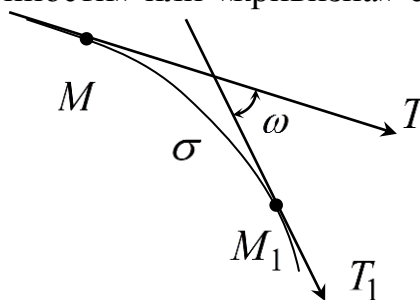


Рис. 1

На различных участках кривой средняя кривизна ее будет, вообще говоря, различной (за исключением окружности). Поэтому от понятия средней кривизны дуги  $MM_1$ , переходят часто к понятию кривизны в точке, определяемой как предел, к которому стремится средняя кривизна дуги  $MM_1$ , когда точка  $M_1$  вдоль кривой стремится к  $M$  [7], т.е.

$$k = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\sigma} \quad (1)$$

где  $k$  - кривизна кривой в данной точке.

В дифференциальной геометрии во многих исследованиях представляется удобным приближенно заменять кривую вблизи рассматриваемой точки - окружностью, имеющей ту же кривизну, что и кривая в этой точке (рис. 2). Это, так называемый, круг кривизны в данной на ней точке  $M$ , который:

- касается кривой в т.  $M$ ;
- направлен выпуклостью вблизи этой точки в ту же сторону что и кривая;
- имеет ту же кривизну что и кривая в т.  $M$ .

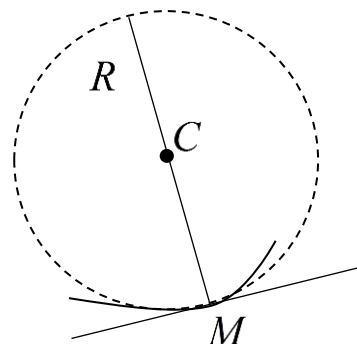


Рис. 2

Центр  $C$  круга кривизны называется центром кривизны и лежит на нормали к кривой в рассматриваемой точке со стороны выпуклости.

Однако, большинство исходных данных представлены дискретно и, зачастую, не могут быть представлены аналитической зависимостью, поэтому, актуальным становится вопрос изучения и управления соответствующими аналогами, которые предлагаются [3] для ДПК.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Вопросом определения и применения в процессе сгущения дискретной кривизны кривой рассматривало многие ученые [1,2,4,6]. Так, например, в работе [4] предлагается формировать обводы второго порядка гладкости на основе специальной функции. В работе [1] была обнаружена связь между длиной звеньев сопроводительной ломаной линии и углами смежности. Предложенный способ был использован в работе [6], однако он позволяет определять только среднюю кривизну на сгущаемом участке без возможности управления ею. Поэтому изучение вопроса изменения и возможности управления кривизной ДПК в процессе сгущения является актуальной задачей.

**Формулирование целей статьи.** Управление кривизной ДПК в процессе сгущения при использовании метода вариативного формирования разностных схем угловых параметров.

**Основная часть.** Рассмотрим кривую в контексте вариативного дискретного геометрического моделирования, в которой кривая представлена в виде ДПК  $(x_i, y_i)$ . Проводя аналогию между рис. 1 и рис. 3, естественно предположить, что средняя кривизна дискретно представленной кривой может характеризоваться углом смежности в точке сгущения  $\gamma'_{i+0,5}$  на заданном участке  $l_i$ , т.е. отношением  $\frac{\gamma'_{i+0,5}}{l_i}$ ,

$i = \overline{0, n-1}$ .

Аналогом круга кривизны, для дискретно представленной кривой может служить окружность, проведенная через три последовательных точки ДПК (рис. 3).

Таким образом, в процессе сгущения мы можем для сгущаемых участков контролировать значение радиусов кривизны моделируемой кривой. Поскольку угол в  $\Delta(i-1)(i-0,5)i$  при вершине  $(i-0,5)$ ,  $i = \overline{1, n}$  является тупым, то рассматриваемый  $\Delta$  является тупоугольным. А,

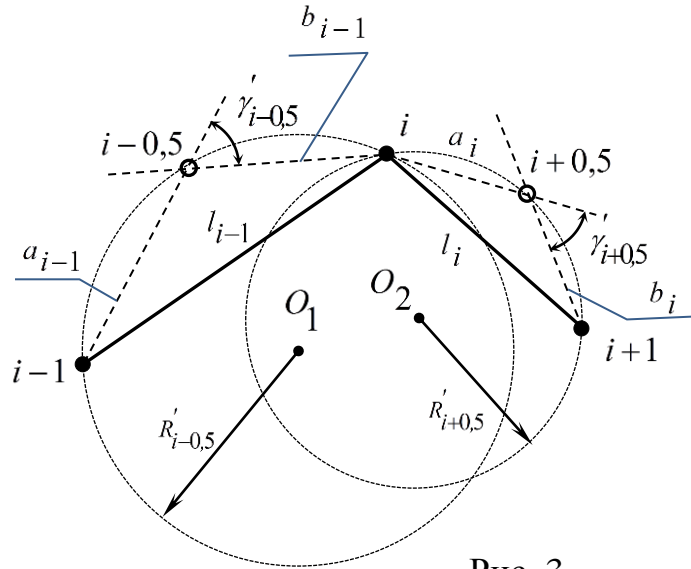


Рис. 3

как известно из курса аналитической геометрии, центр описанной около тупоугольного треугольника окружности лежит вне треугольника. Численное значение радиуса описанной окружности (радиуса кривизны) в данном случае можно определить из теоремы синусов (для звена  $i - (i+1)$ ):

$$2R'_{i+0,5} = \frac{a_i}{\sin \beta_{(i+1)-}} = \frac{b_i}{\sin \beta_{i+}} = \frac{l_i}{\sin \gamma'_{i+0,5}}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (2)$$

где углы  $\beta_{i+}$  и  $\beta_{(i+1)-}$ , согласно [5], составляют некоторую фиксированную часть от угла смежности  $\gamma'_{i+0,5}$  в точке сгущения, т.е.

$$\begin{aligned} \beta_{i+} &= \eta_i \cdot \gamma_{i+0,5} \\ \beta_{(i+1)-} &= (1 - \eta_i) \cdot \gamma_{i+0,5} \end{aligned}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (3)$$

где  $\eta_i$  – коэффициент соотношения угловых параметров, определяемый из выражения:

$$\eta_i = \frac{\gamma_i^0}{\gamma_i^0 + \gamma_{i+1}^0}, \quad i = \overline{0; n-1}. \quad (4)$$

Таким образом, мы получаем возможность управлять кривизной в точках сгущения кривой в процессе ее сгущения.

Однако, контролируя процесс сгущения ДПК на участках  $(i-1)-i$  и  $i-(i+1)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  с учетом дискретной ее кривизны (рис. 4), мы не контролируем значение дискретной кривизны в точке  $i$ . А поскольку для динамических обводов одним из определяющих

является условие монотонности изменения кривизны, то нам необходимо будет учесть и это.

На рис. 4 изображен фрагмент ДПК на котором для обоих звеньев  $((i-1)-i)$  и  $(i-(i+1))$  заданы центры круга кривизны  $C_{i-0,5}$  и  $C_{i+0,5}$ , причем  $R_{i-0,5} < R_{i+0,5}$ .

Для того чтоб добиться монотонного изменения кривизны, полученной в процессе сгущения ДПК, необходимо в процессе сгущения контролировать её на трех участках:  $((i-1)-i)$ ,  $((i-0,5)-(i+0,5))$ ,  $(i-(i+1))$ . При этом необходимо выполнения условия:

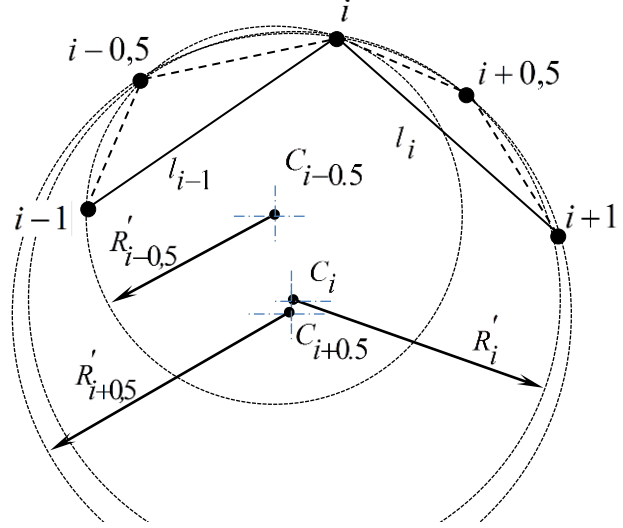


Рис. 4

$$\begin{aligned} R_{i-0,5} < R_i < R_{i+0,5}, & \text{ или } i = \overline{1, n-1}, \\ R_{i-0,5} > R_i > R_{i+0,5}, & \end{aligned} \quad (5)$$

где значения радиусов кривизны определяем из выражения (2)

$$\begin{aligned} 2R_{i-0,5} &= \frac{l_i}{\sin \gamma'_{i-0,5}} \Rightarrow R_{i-0,5} = \frac{l_i}{2 \sin \gamma'_{i-0,5}}; \\ 2R_{i+0,5} &= \frac{l_i}{\sin \gamma'_{i+0,5}} \Rightarrow R_{i+0,5} = \frac{l_i}{2 \sin \gamma'_{i+0,5}}; \\ 2R_i &= \frac{C_i}{\sin \gamma'_i} \Rightarrow R_i = \frac{C_i}{2 \sin \gamma'_i}. \end{aligned}$$

$C_i$  можно выразить из  $\Delta(i-0,5)i(i+0,5)$  используя теорему косинусов:

$$C_i^2 = b_{i-1}^2 + a_i^2 - 2b_{i-1} \cdot a_i \cdot \cos(180 - \gamma'_i), \quad (6)$$

где длины звеньев  $a_i$  та  $b_{i-1}$  определяются из выражения

$$\begin{aligned} \frac{a_i}{\sin \beta_{(i+1)-}} &= \frac{l_i}{\sin \gamma'_{i+0,5}} \Rightarrow a_i = l_i \frac{\sin \beta_{(i+1)-}}{\sin \gamma'_{i+0,5}} = l_i \frac{\sin[(1-\eta_i)\gamma'_{i+0,5}]}{\sin \gamma'_{i+0,5}}; \\ \frac{b_{i-1}}{\sin \beta_{(i-1)+}} &= \frac{l_{i-1}}{\sin \gamma'_{i-0,5}} \Rightarrow b_{i-1} = l_{i-1} \frac{\sin \beta_{(i-1)+}}{\sin \gamma'_{i-0,5}} = l_{i-1} \frac{\sin[\eta_i \cdot \gamma'_{i-0,5}]}{\sin \gamma'_{i-0,5}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$C_i = \sqrt{\left( l_{i-1} \frac{\sin[\eta_i \cdot \gamma'_{i-0,5}]}{\sin \gamma'_{i-0,5}} \right)^2 + \left( l_i \frac{\sin[(1-\eta_i)\gamma'_{i+0,5}]}{\sin \gamma'_{i+0,5}} \right)^2} + \\ + 2 \cdot l_{i-1} \cdot l_i \cdot \frac{\sin[\eta_i \cdot \gamma'_{i-0,5}] \cdot \sin[(1-\eta_i)\gamma'_{i+0,5}]}{\sin \gamma'_{i-0,5} \cdot \sin \gamma'_{i+0,5}} \cdot \cos \gamma'_i.$$

С учетом полученного выражения, формула (5) примет вид:

$$R_i - R_{i-1} > 0, \text{ или } R_i - R_{i-1} < 0, \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$\frac{\sqrt{\left( l_{i-1} \frac{\sin[\eta_i \cdot \gamma'_{i-0,5}]}{\sin \gamma'_{i-0,5}} \right)^2 + \left( l_i \frac{\sin[(1-\eta_i)\gamma'_{i+0,5}]}{\sin \gamma'_{i+0,5}} \right)^2}}{2 \sin \gamma'_i} + \\ + \frac{2 \cdot l_{i-1} \cdot l_i \cdot \frac{\sin[\eta_{i-1} \cdot \gamma'_{i-0,5}] \cdot \sin[(1-\eta_i)\gamma'_{i+0,5}]}{\sin \gamma'_{i-0,5} \cdot \sin \gamma'_{i+0,5}} \cdot \cos \gamma'_i}{2 \sin \gamma'_{i-0,5}} > 0 \quad (7)$$

Полученное дополнительное условие в совокупности с условием отсутствия осцилляции:

$$\gamma_{i+0,5} > 0, \text{ или, } \gamma_{i+0,5} < 0, \quad i = \overline{1, n-1} \quad (8)$$

для разностных схем [5] формируют некую область решения, из которой и будем выбирать значения управляющих параметров.

**Выводы.** Предложенные в работе исследования позволяют при использовании метода на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров в процессе сгущения учитывать не только отсутствие осцилляции, но и управлять кривизной ДПК, что в целом расширяет возможности формообразования и конструирования дифференциально геометрических характеристик ДПК. Дальнейшие исследования могут быть направлены на оптимизацию выбора управляющих параметров из многоугольника решений с учетом возможных значений границ кривизны.

### Литература

1. Верещага В.М. Дискретно–параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей: дисс. ...д–ра техн. наук: 05.01.01 / В.М. Верещага. – Мелитополь, ТГАТА. 1996. – 320с.
2. Гавриленко Е.А. Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны. Дисс. ... к-та. техн. наук: 05.01.01/ Е.А. Гавриленко. – Мелитополь, ТГАТА, 2004, – 149с.
3. Найдиш В.М. Основи прикладної дискретної геометрії [навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III-IV рівнів

- акредитації] / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна. – Мелітополь: ТДАТУ, 2007. – 194с.
4. Найдиш В.М. Формування обводів другого порядку гладкості на основі спеціальної функції / В.М. Верещага, В.М. Щербина // В кн.: Сучасні проблеми геометричного моделювання. Матеріали міжнародної науково-практичної конференції, – Львів, 2003, – С.83-85.
  5. Спиринцев Д.В. Дискретная интерполяция на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров: дисс. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Д.В. Спиринцев. – Мелітополь, ТДАТУ, 2010. – 214 с.
  6. Спиринцев Д.В. Управління кривиною ДПК у методі варіативного формування різницевих схем кутових параметрів/ А.В. Найдиш, Д.В. Спиринцев // Прикл. геом. та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 21-29.
  7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления/ Г.М. Фихтенгольц – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – т.1 – 616с.

### **УПРАВЛІННЯ ДИСКРЕТНОЮ КРИВИНОЮ В МЕТОДІ ВАРІАТИВНОГО ФОРМУВАННЯ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ КУТОВИХ ПАРАМЕТРІВ**

Спиринцев Д.В., Спиринцев В.В., Балюба І.Г.

*В роботі досліджується питання управління кривизною дискретно представлені кривої в процесі згущення на основі методу варіативного формування різницевих схем кутових параметрів.*

*Ключові слова: дискретно представлена крива, інтерполяція, варіативної дискретне геометричне моделювання, дискретна кривизна, кутові параметри.*

### **CONTROL DISCRETE CURVATURE IN THE METHOD VARIABLE FORMATION DIFFERENCE SCHEME ANGULAR PARAMETERS**

D. Spiritsev, V. Spiritsev, I. Balyuba

*We study how to manage the discrete curvature of the curve in the process of thickening based on the method of formation of the difference schemes of variable angular parameters.*

*Keywords: discrete representation of the curve, interpolation, variability discrete geometric modeling, discrete curvature, angle settings.*